Reflexiones sobre la conjetura de Collatz, la partición 2-ádica de $\mathbb{N}$ y la asimetría epistémica del problema

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Este documento reúne reflexiones surgidas del estudio de la conjetura de Collatz y de la partición 2-ádica de los números naturales. No contiene resultados nuevos ni pretende resolver la conjetura. Su propósito es conceptual: distinguir la sencillez de la función del carácter infinito del escenario en que discurren sus órbitas, describir esas órbitas mediante una partición autosimilar, examinar la asimetría lógica entre refutar y demostrar y considerar qué podría requerir una demostración. La analogía con la paradoja de Fermi se utiliza únicamente como recurso para formular una pregunta, no como argumento matemático.

Índice

1. Introducción **2**

2. La partición 2-ádica de los números naturales **2**

2.1. La descomposición única 2

2.2. Una autosimilitud discreta 2

2.3. Una formulación breve 3

3. La dinámica de Collatz sobre la partición **3**

3.1. Movimiento vertical y cambio de columna 3

3.2. Las órbitas como trayectorias 3

3.3. Lo que la partición deja ver 3

4. La asimetría epistémica del problema **5**

4.1. Refutar y demostrar 5

4.2. La pregunta de Fermi aplicada a Collatz 5

5. ¿Es razonable esperar una demostración? **6**

5.1. La sencillez de la regla y la infinitud del escenario 6

5.2. No sabemos cómo, pero tampoco sabemos que sea imposible 6

5.3. Qué podría aportar una demostración 6

6. Conclusión **7**

1. Introducción

La conjetura de Collatz, también conocida como conjetura $3n+1$, afirma que la órbita de cualquier entero positivo bajo la aplicación

$$C(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ 3n+1, & n \text{ impar}, \end{cases}$$

acaba alcanzando el ciclo trivial $1 \to 4 \to 2 \to 1$.

La regla que genera cada paso es elemental y está perfectamente determinada. Pero una cosa es conocer la función y otra conocer el destino de todas las órbitas que produce sobre un conjunto infinito. Esa distancia entre una ley local sencilla y una afirmación global es el motivo de estas reflexiones.

2. La partición 2-ádica de los números naturales

2.1. La descomposición única

Todo entero positivo n se escribe de forma única como

$$n = 2^k m, \qquad m \text{ impar}, \quad k \geq 0.$$

El exponente k es la valoración 2-ádica $v_2(n)$. De esta manera, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ queda particionado en columnas, una por cada impar m:

$$m,\ 2m,\ 4m,\ 8m,\ \dots$$

Cada columna es infinita; dos columnas distintas no comparten elementos, y entre todas contienen exactamente los enteros positivos.

2.2. Una autosimilitud discreta

Multiplicar por 2 todos los elementos de una columna reproduce la misma columna sin su primer término. Hay, pues, una autosimilitud combinatoria exacta. Se puede hablar, de modo figurado, de una estructura fractal discreta; no se está afirmando que sea un fractal en el sentido geométrico de la dimensión de Hausdorff.

Conviene distinguir la raíz impar de la columna de las valoraciones de sus elementos: cada impar m tiene $v_2(m) = 0$, mientras que sus múltiplos $2^k m$ recorren todos los valores $k \geq 0$.

2.3. Una formulación breve

Infinitos impares, cada uno como raíz de una columna infinita $\{2^k m : k \geq 0\}$: una partición autosimilar de los enteros positivos. Para $k \geq 1$, los elementos de la columna son pares.

3. La dinámica de Collatz sobre la partición

3.1. Movimiento vertical y cambio de columna

La dinámica se puede describir mediante dos operaciones de distinta naturaleza.

Movimiento vertical. Si $n = 2^k m$ con $k \geq 1$, la división por 2 lleva $2^k m$ a $2^{k-1} m$. La raíz impar no cambia: se desciende un nivel en la misma columna.

Cambio de columna. Si m es impar, el paso $3m + 1$ llega a un número par. Escribiendo $a = v_2(3m + 1)$, las a divisiones sucesivas por 2 conducen al impar

$$S(m) = \frac{3m + 1}{2^{v_2(3m+1)}}.$$

La órbita pasa así de la columna de raíz m a la de raíz $S(m)$. La aplicación S, usualmente llamada aplicación acelerada en impares o aplicación de Siracusa, está tan determinada como C; lo difícil no es calcular su siguiente valor, sino controlar globalmente la sucesión de cambios de columna.

3.2. Las órbitas como trayectorias

Una órbita alterna un salto desde una raíz impar m hasta $3m + 1$, que ya pertenece a la columna de raíz $S(m)$, y un descenso por esa columna hasta $S(m)$. Repite después el mismo procedimiento.

La imagen es la de una trayectoria que recorre celdas de una estructura infinita. La regla solo necesita el valor actual; la afirmación que queremos demostrar, en cambio, se refiere al destino de todas las trayectorias posibles.

Aquí aparece una diferencia esencial: describir exactamente el movimiento no equivale a demostrar su comportamiento global. Conocer la partición y conocer la función no basta, por sí solo, para asegurar que toda trayectoria alcance la columna del 1 y, finalmente, el ciclo trivial.

3.3. Lo que la partición deja ver

La partición no resuelve el problema, pero hace visibles algunas propiedades elementales de la dinámica que en la sucesión de valores quedan ocultas. Son hechos conocidos (véanse [1] y [4]); se recogen aquí porque la representación en columnas los vuelve casi evidentes.

Qué celdas reciben saltos. Un salto desde una raíz impar n llega a la celda $3n + 1 = 2^k m$. Como $3n + 1$ es par, $k \geq 1$; y como $3n + 1 \equiv 1 \pmod 3$, ha de cumplirse $2^k m \equiv 1 \pmod 3$. Si 3 divide a m, esta congruencia es imposible: las columnas cuya raíz es múltiplo de 3 no reciben ningún salto. Si m no es múltiplo de 3, como $2^k \equiv (-1)^k \pmod 3$, la congruencia se

cumple exactamente para los k pares cuando $m \equiv 1 \pmod 3$ y para los k impares cuando $m \equiv 2 \pmod 3$. Recíprocamente, en cada una de esas celdas el número

$$n = \frac{2^k m - 1}{3}$$

es un entero impar, porque el numerador es impar al ser $k \geq 1$, y su salto llega precisamente a ella. Así, cada columna de raíz no múltiplo de 3 recibe infinitos saltos, uno en cada nivel de la paridad adecuada, y cada uno procede de un impar distinto.

Una consecuencia inmediata es que $S(m)$ nunca es múltiplo de 3, puesto que $3m + 1$ no lo es. Un múltiplo impar de 3 solo puede aparecer en una órbita como su primer impar; a partir de él, la trayectoria discurre siempre por columnas de raíz no divisible por 3.

La columna del 1. Alcanzar la columna de raíz 1 equivale a alcanzar una potencia de 2, y desde ella el descenso hasta 1 es inmediato. Por lo dicho, esa columna solo recibe saltos en sus niveles pares, es decir, en $4, 16, 64, \ldots$, procedentes de los impares

$$\frac{4^j - 1}{3} = 1,\ 5,\ 21,\ 85,\ 341,\ \ldots \qquad (j \geq 1).$$

El caso $j = 1$ corresponde al propio 1 y al ciclo trivial. Una órbita que no empiece en una potencia de 2 solo puede entrar en la columna del 1 mediante el salto desde uno de los impares $(4^j - 1)/3$ con $j \geq 2$; la conjetura equivale, por tanto, a que toda órbita que no empiece en una potencia de 2 pase por alguno de los números $5, 21, 85, 341, \ldots$

Un ejemplo. La figura 1 muestra la cuadrícula para las raíces 1 a 17 y los niveles 0 a 4, con la órbita de 7:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Cada salto entra en una de las celdas señaladas en el párrafo anterior, ninguno toca las columnas de raíz 3, 9 o 15, y la llegada a la columna del 1 se produce desde el 5, el primero de los impares $(4^j - 1)/3$ mayores que 1.

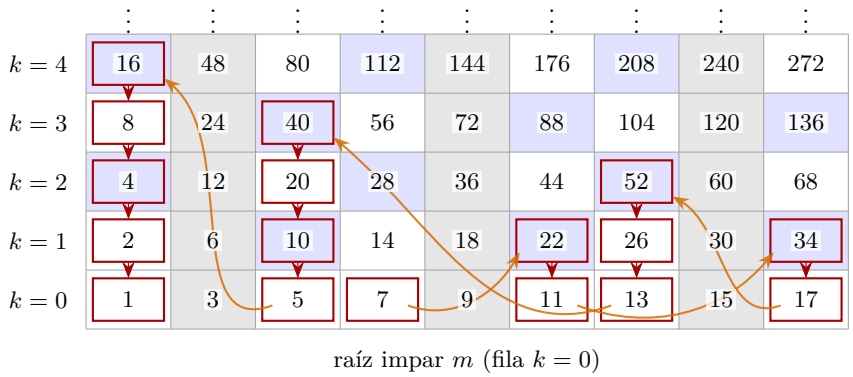

Figura 1: La partición en columnas para las raíces 1 a 17; la celda de la columna m y el nivel k contiene $2^k m$. En gris, las columnas de raíz múltiplo de 3, que no reciben saltos; en azul, las celdas $3n + 1$ con n impar en las que sí entran. Recuadrada, la órbita de 7: las flechas naranjas son los cambios de columna $n \mapsto 3n + 1$ y las rojas, los descensos por división entre 2.

Lo que la figura no anticipa es en qué nivel caerá cada salto. De ese nivel, $a = v_2(3m+1)$, depende que la trayectoria gane o pierda tamaño en cada cambio de columna, y es ahí donde interviene el razonamiento heurístico del apartado 4.2.

4. La asimetría epistémica del problema

4.1. Refutar y demostrar

La conjetura es una afirmación universal: para todo entero positivo, la órbita alcanza 1. Para refutarla bastaría un contraejemplo: un ciclo no trivial, o una órbita de la que se demostrase que nunca alcanza 1 (por ejemplo, una órbita divergente).

Para demostrarla, en cambio, hay que establecer una propiedad que abarque todos los enteros positivos, no solo un conjunto finito de casos examinados. La asimetría es lógica: un contraejemplo certificado invalida una afirmación universal, mientras que cualquier verificación finita, por extensa que sea, no la prueba.

Esto no significa que encontrar o demostrar una órbita divergente sea fácil. También la certificación de un contraejemplo puede exigir ideas profundas. Lo que cambia es la clase de evidencia suficiente en uno y otro sentido.

4.2. La pregunta de Fermi aplicada a Collatz

La llamada paradoja de Fermi se formula habitualmente así: si la vida inteligente fuera frecuente en el universo, ¿por qué no observamos señales de ella? Trasladada a Collatz con la misma estructura, la pregunta sería: si existieran órbitas que no alcanzan 1, ¿por qué no ha aparecido ninguna? La conjetura se ha comprobado por cálculo para todos los enteros hasta, al menos, 2^{68} [5], sin que se haya encontrado ninguna excepción.

A diferencia de la paradoja original, esta pregunta tiene una respuesta heurística conocida [1]. Entre los impares m, la proporción de los que cumplen $v_2(3m+1) = j$ es exactamente 2^{-j} para cada $j \geq 1$, como se comprueba considerando las clases módulo 2^{j+1}. Si se admite, como hipótesis, que a lo largo de una órbita los valores sucesivos de $a = v_2(3m+1)$ se comportan como variables independientes con esa distribución, cada paso de S multiplica el tamaño por $3 \cdot 2^{-a}$ aproximadamente, y el cambio medio del logaritmo es

$$\mathbb{E}\big[\log S(m) - \log m\big] \approx \log 3 - \mathbb{E}[a] \log 2 = \log 3 - 2\log 2 = \log \tfrac{3}{4} < 0.$$

En media geométrica, cada paso por un impar reduce el tamaño en un factor próximo a $3/4$. Según este modelo las órbitas tienden a descender, y la existencia de trayectorias que crezcan indefinidamente resulta extremadamente improbable.

La heurística explica por qué no se observan contraejemplos, pero no demuestra que no existan. La distribución de a es exacta sobre las clases residuales; lo que no está justificado es la independencia a lo largo de la órbita de un entero concreto, que está completamente determinada. Los resultados rigurosos de tipo estadístico, desde el de Terras [6] sobre el tiempo de parada de casi todos los enteros hasta el de Tao [3], pueden entenderse como maneras de hacer precisa esa intuición para casi todos los enteros, en sentidos exactos de densidad, sin alcanzar a todos ellos.

Queda así la pregunta que interesa aquí: si todas las órbitas llegan a 1, ¿qué propiedad global garantiza ese desenlace en cada caso, y no solo en promedio? No sabemos si la respuesta vendrá dada por un invariante, una función de descenso, una propiedad aritmética de otro tipo o una combinación de herramientas. La ausencia de una explicación conocida no es evidencia de que esa explicación no exista.

5. ¿Es razonable esperar una demostración?

5.1. La sencillez de la regla y la infinitud del escenario

La función de Collatz es aritmética, explícita y fácil de aplicar. Las órbitas, en cambio, discurren por un dominio infinito y pueden alternar crecimientos y descensos de forma irregular. Esta es la distinción que interesa subrayar.

No sería correcto afirmar que el álgebra, la geometría o el análisis carecen de relación con el problema: se han utilizado herramientas de esas áreas para estudiarlo. Lo que todavía no tenemos es una estructura global conocida que permita pasar de la descripción exacta de los pasos individuales a la convergencia de todas las órbitas.

Por eso, las analogías con otros grandes problemas resueltos tienen un alcance limitado. No es la ausencia de matemáticas aplicables lo que caracteriza a Collatz, sino la dificultad de convertir resultados parciales y descripciones locales en una conclusión universal.

5.2. No sabemos cómo, pero tampoco sabemos que sea imposible

Conviene separar tres afirmaciones: «no sé cómo podría demostrarse», que expresa una dificultad percibida; «dudo que llegue a demostrarse», que expresa una expectativa; y «es imposible demostrarla», que es una tesis matemática mucho más fuerte y que solo tiene sentido preciso respecto de un sistema formal. El más habitual es la teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel con el axioma de elección, conocida como ZFC, que sirve de fundamento a casi toda la matemática actual. Decir que la conjetura es imposible de demostrar significaría, en ese marco, que es independiente de ZFC: que ni ella ni su negación pueden deducirse de sus axiomas. Hay enunciados de los que se sabe que son independientes en este sentido; el más conocido es la hipótesis del continuo, que Gödel (1940) mostró que no puede refutarse en ZFC y Cohen (1963) que tampoco puede demostrarse.

No conocemos una demostración de la conjetura ni una demostración de su independencia respecto de ZFC. La dificultad que hoy encontramos no autoriza a concluir que la demostración sea imposible.

5.3. Qué podría aportar una demostración

Cabe imaginar, sin pretender agotar las posibilidades, varias clases de argumentos.

Una medida global de descenso. Por ejemplo, para la aplicación acelerada S sobre impares, una función V con valores en un conjunto bien ordenado, estrictamente decreciente en cada paso mientras no se alcance 1, garantizaría la llegada a 1. Exigir solo descenso en valores reales, sin condiciones adicionales, no bastaría. Para la aplicación clásica C hay que tener en cuenta que el ciclo $1 \to 4 \to 2 \to 1$ impide un descenso estricto en todos sus pasos. Conviene observar,

además, que si la conjetura es cierta una función así existe trivialmente: basta tomar como $V(m)$ el número de pasos que necesita la órbita de m para llegar a 1. La dificultad no está, pues, en la existencia de V, sino en encontrar una que pueda definirse y controlarse sin conocer de antemano el destino de las órbitas.

Una estructura algebraica o modular. Una relación suficientemente fuerte entre las clases aritméticas y las trayectorias podría excluir de manera global los comportamientos incompatibles con la conjetura. Las congruencias conocidas describen aspectos de la dinámica, como las restricciones de entrada vistas en el apartado 3.3, pero no proporcionan por sí solas ese cierre.

Un argumento estadístico acompañado de una exclusión de excepciones. Los métodos probabilísticos y de tipo ergódico pueden ofrecer información sobre conjuntos muy amplios de órbitas; el modelo heurístico descrito en el apartado 4.2 es su punto de partida natural. Sin embargo, una afirmación sobre «casi todos» no equivale a una afirmación sobre «todos». El trabajo de Tao sobre órbitas que alcanzan valores casi acotados ilustra la potencia y también esa diferencia lógica.

Una contradicción global. Otra vía consistiría en suponer la existencia de una órbita que nunca alcance 1 y obtener una contradicción. Una órbita de ese tipo tendría que entrar en un ciclo no trivial o ser no acotada, pues una órbita acotada solo toma un número finito de valores y, por tanto, es eventualmente periódica. No es necesario presuponer de antemano que una órbita no acotada tienda a infinito.

6. Conclusión

La partición 2-ádica de $\mathbb{N}$ permite contemplar la dinámica de Collatz como una combinación de descensos verticales, completamente explícitos, y cambios de columna gobernados por la aplicación de Siracusa. Es una representación útil, pero no una demostración.

El problema no reside en ignorar la regla que produce la siguiente celda: esa regla es conocida y exacta. Reside en la distancia entre saber cómo se genera cada paso y poder afirmar qué sucede finalmente con todas las trayectorias en un escenario infinito.

La asimetría entre refutar y demostrar nos recuerda qué cuenta como prueba en cada caso. La analogía con Fermi expresa, de manera intuitiva, la pregunta que permanece: si la conjetura es verdadera, ¿qué principio matemático explica su universalidad?

Quizás la respuesta requiera descubrir un invariante; quizás adopte una forma que hoy no imaginamos. Mientras tanto, distinguir entre la función, la estructura que recorren sus órbitas y la propiedad global que se quiere probar ayuda, al menos, a formular con mayor precisión la dificultad. Ese es el alcance, deliberadamente modesto, de estas reflexiones.

Referencias

[1] J. C. Lagarias, «The $3x + 1$ problem and its generalizations», *American Mathematical Monthly* **92**(1) (1985), 3–23.

[2] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x+1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010.

[3] T. Tao, «Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values», *Forum of Mathematics, Pi* **10** (2022), e12. arXiv:1909.03562.

[4] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the* $3n + 1$ *Function*, Lecture Notes in Mathematics 1681, Springer, 1998.

[5] D. Barina, «Convergence verification of the Collatz problem», *The Journal of Supercomputing* **77** (2021), 2681–2688.

[6] R. Terras, «A stopping time problem on the positive integers», *Acta Arithmetica* **30** (1976), 241–252.