El número 1 como origen estructural en la conjetura de Collatz

Miquel Cerdá Bennassar

Enero de 2026

Resumen

En este trabajo se propone una lectura de la conjetura de Collatz que desplaza el centro de atención desde la noción de convergencia hacia la de generación y cobertura. Se propone considerar el número 1 como raíz de la construcción inversa, además de como punto de llegada de las trayectorias directas. Esta perspectiva convierte el problema clásico («¿por qué todo converge al ciclo 4–2–1?») en una cuestión combinatoria: ¿el árbol inverso generado desde el 1 cubre todo $\mathbb{N}$? Se distingue esta equivalencia formal de una demostración de cobertura, que sigue siendo el problema abierto.

1. Introducción y motivación

La conjetura de Collatz afirma que, para cualquier entero positivo n, la iteración de la función

$$C(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

termina alcanzando el ciclo $4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \cdots$. A pesar de su formulación sencilla, no existe aún una demostración general ni una refutación.

Una manera habitual de estudiar el problema consiste en analizar las órbitas directas de C, que pueden presentar aumentos y descensos. Sin embargo, el estudio del operador inverso C^{-1} ofrece una visión complementaria: en lugar de preguntar por qué las trayectorias convergen, se puede preguntar si todo número natural puede alcanzarse mediante aplicación sucesiva de las reglas inversas a partir del ciclo trivial.

En esta nota se adopta deliberadamente esa segunda perspectiva y se pone énfasis en el papel estructural del número 1 como raíz generadora.

2. Los números impares como copia indexada de $\mathbb{N}$

Consideremos el conjunto de los números impares positivos $I = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$. Definimos la aplicación

$$T\colon I \to \mathbb{N}, \qquad T(m) = \frac{m+1}{2}.$$

Proposición 2.1. *T es una biyección y satisface $T(2k-1) = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Dado $k \in \mathbb{N}$, se tiene $T(2k-1) = (2k-1+1)/2 = k$. Recíprocamente, todo k tiene preimagen única $2k-1 \in I$. Por tanto T es biyectiva. □

En particular, $T(1) = 1$, de modo que el 1 es el único punto fijo de T en I. Esta identidad expresa únicamente una reindexación de los impares positivos.

Esta correspondencia no constituye por sí sola una propiedad dinámica de Collatz ni impone restricciones a sus órbitas. Se incluye únicamente para distinguir la enumeración de los impares de su evolución bajo C.

3. El árbol inverso con raíz en el 1

El operador inverso de Collatz se define como sigue:

Definición 3.1 (Preimágenes de Collatz)**.** Dado $m \in \mathbb{N}$, las preimágenes inmediatas son:

- $2m$ (siempre),
- $\frac{m-1}{3}$, siempre que $m \equiv 1 \pmod 3$ y $\frac{m-1}{3}$ sea entero positivo e impar.

Aplicando iterativamente estas reglas a partir del número 1 se obtiene la componente inversa del ciclo trivial. Al suprimir las aristas de dicho ciclo, esta componente puede representarse como un árbol enraizado en 1.

Lema 3.1. *Todo número generado desde* 1 *por un número finito de aplicaciones de las reglas inversas tiene una órbita directa que alcanza* 1*.*

Demostración. Si n se obtiene desde 1 mediante r aplicaciones de reglas inversas, existe una cadena $1 = x_0, x_1, \ldots, x_r = n$ tal que $C(x_j) = x_{j-1}$ para $1 \le j \le r$. Por tanto $C^r(n) = 1$. No es necesario que los valores disminuyan en cada paso. □

En consecuencia, «llegar al 1» en la dinámica directa equivale a «ser descendiente del 1» en la dinámica inversa. La conjetura de Collatz puede entonces reformularse de la siguiente manera:

Conjetura 3.1 (Forma enumerativa)**.** *El conjunto de enteros positivos generado desde* 1 *mediante un número finito de aplicaciones de las reglas de preimagen es todo* $\mathbb{N}$*.*

Esta reformulación sustituye la pregunta por las órbitas directas por una pregunta de cobertura. Ambas afirmaciones son lógicamente equivalentes y ninguna resulta demostrada por la otra formulación.

La figura siguiente ilustra las primeras generaciones de la estructura inversa de Collatz a partir del número 1. Las flechas azules representan la duplicación $m \mapsto 2m$ y la flecha naranja la preimagen impar $m \mapsto (m-1)/3$, cuando es admisible. Desde la raíz se observa la generación de enteros; en sentido contrario, las mismas aristas describen sus pasos directos hacia el 1.

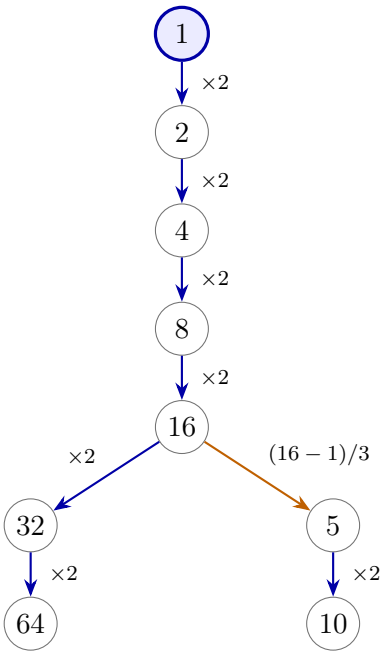

Figura 1: Fragmento inicial del árbol inverso de Collatz con raíz en el número 1. Se omite la arista del ciclo trivial que va de 4 a 1, así como otras preimágenes.

4. El 1 como origen y como cierre

El número 1 desempeña distintos papeles en esta descripción:

- es el único entero positivo cuyo único divisor positivo es él mismo,
- satisface $T(1) = 1$, y es el único impar positivo m para el que $T(m) = m$,
- se elige como punto inicial de la generación inversa, por lo que aparece sin aplicar ninguna regla,
- cada entero positivo se escribe de manera única como $m \cdot 2^k$, con m impar y $k \geq 0$; las divisiones sucesivas por 2 llevan a m, no necesariamente a 1.

Así, el 1 es el punto de partida de la componente inversa que se construye. Que esa componente incluya todos los enteros positivos es precisamente la conjetura, no una consecuencia de las propiedades anteriores.

En este sentido, la metáfora de la escalera resulta ilustrativa: el escalón que se pisa al comenzar a subir (↑) es el mismo que se pisa al terminar de bajar (↓). No existen dos escaleras distintas; solo cambia la dirección del recorrido.

5. Conclusión

La formulación inversa de la conjetura exige demostrar que todo entero positivo pertenece al conjunto generado desde el ciclo 4–2–1. Los enteros que no pertenecieran a ese conjunto tendrían órbitas directas que no alcanzan 1, ya fuera por un ciclo distinto

o por una trayectoria sin retorno al ciclo trivial. Al desplazar el foco hacia el origen (en lugar del destino), el problema adquiere un carácter más combinatorio que dinámico.

Queda por demostrar rigurosamente que la aplicación iterada de las reglas inversas a partir del 1 agota $\mathbb{N}$. Una demostración de esta cobertura resolvería la conjetura, aunque podría requerir argumentos equivalentes a los utilizados en el análisis directo.

La perspectiva inversa ofrece un lenguaje combinatorio de preimágenes, niveles y cobertura que puede resultar útil para organizar preguntas y cálculos. Sin embargo, las reglas locales no garantizan la cobertura global y esta reformulación no reduce por sí misma la dificultad del problema. Su interés aquí es expositivo y estructural, no la obtención de un nuevo criterio de convergencia.