La maldición del casi

Cobertura modular y límites del árbol inverso de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar
ORCID 0000-0001-8360-1933

Octubre de 2026

Resumen

Se examina una diferencia elemental, pero importante, entre cubrir todas las clases residuales y cubrir todos los enteros positivos en el árbol inverso de Collatz. Cada familia de predecesores impares inmediatos de un impar no divisible por tres recorre exactamente todas las clases módulo 3^r, para todo $r \geq 1$, aunque su densidad natural es cero. También se obtiene la cota polilogarítmica $\#(G_h \cap [1, X]) = O_h((1 + \log X)^h)$ para cada nivel de profundidad inversa fija. Estas propiedades no deciden la cobertura de la unión de todos los niveles. El propósito de la nota es delimitar con precisión el alcance de ciertos argumentos modulares, no proponer una demostración de la conjetura.

1. El árbol inverso y la cuestión de la cobertura

Para n impar positivo, consideramos la aplicación acelerada

$$T(n) = \frac{3n+1}{2^{\nu_2(3n+1)}}.$$

El entero 1 es un punto fijo de T. La conjetura de Collatz equivale a afirmar que todo impar positivo alcanza 1 mediante iteraciones de T.

La expresión «maldición del casi» designa aquí la distancia entre una cobertura modular completa, válida para todas las potencias de 3, y la cobertura efectiva de los enteros positivos, que esos argumentos no permiten establecer.

Si u es impar positivo, sus predecesores impares inmediatos son las soluciones impares positivas v de $T(v) = u$. Estas satisfacen

$$3v + 1 = 2^k u, \qquad k \geq 1,$$

y por tanto

$$\mathcal{P}(u) = \left\{ \frac{2^k u - 1}{3} : k \geq 1,\ 2^k u \equiv 1 \pmod 3 \right\}.$$

Cuando $3 \mid u$, el conjunto $\mathcal{P}(u)$ es vacío. Cuando $3 \nmid u$, los exponentes admisibles tienen una única paridad. En particular, para $u = 1$ aparece el predecesor $v = 1$, que corresponde al punto fijo y no a una arista nueva del árbol sin ciclos. Conservamos $1 \in \mathcal{P}(1)$ en la parametrización algebraica; al definir las generaciones por profundidad mínima, ese término solo pertenece a G_0, nunca a G_1.

2. Cobertura modular de una familia dispersa

Supongamos $3 \nmid u$ y definamos

$$k_0 = \begin{cases} 1, & u \equiv 2 \pmod 3, \\ 2, & u \equiv 1 \pmod 3, \end{cases} \qquad A_u = 2^{k_0} u.$$

Entonces $A_u \equiv 1 \pmod 3$ y los elementos de $\mathcal{P}(u)$, en orden creciente, son

$$v_j = \frac{A_u 4^j - 1}{3}, \qquad j \geq 0. \tag{1}$$

En particular, $v_{j+1} = 4v_j + 1$.

Lema 2.1. *Para todo $r \geq 1$, el orden multiplicativo de 4 módulo 3^{r+1} es 3^r.*

Demostración. La identidad $4 = 1+3$ y el lema de levantamiento del exponente dan $\nu_3(4^{3^s}-1) = s+1$ para $s \geq 0$. Por tanto, $4^{3^r} \equiv 1 \pmod{3^{r+1}}$, mientras que $4^{3^{r-1}} \not\equiv 1 \pmod{3^{r+1}}$. Como el orden de 4 divide 3^r (por ejemplo, porque el subgrupo de unidades congruentes con 1 módulo 3 tiene 3^r elementos), el orden es exactamente 3^r. □

Proposición 2.2 (Cobertura modular completa)**.** *Para todo impar positivo u no divisible por 3 y todo $r \geq 1$, los 3^r términos*

$$v_0, v_1, \ldots, v_{3^r-1}$$

representan, sin repetición, todas las clases de $\mathbb{Z}/3^r\mathbb{Z}$.

Demostración. Por el lema 2.1, las potencias 4^j, para $0 \leq j < 3^r$, recorren las 3^r unidades congruentes con 1 módulo 3, consideradas módulo 3^{r+1}. Multiplicar por $A_u \equiv 1 \pmod 3$ permuta ese conjunto. Finalmente, la aplicación

$$x \longmapsto \frac{x-1}{3} \pmod{3^r}$$

es una biyección entre las clases $x \equiv 1 \pmod 3$ módulo 3^{r+1} y las clases módulo 3^r. Aplicándola a $A_u 4^j$ obtenemos los residuos de v_j. □

Proposición 2.3 (Conteo exacto y densidad cero)**.** *Sea $N_u(X) = \#\{v \in \mathcal{P}(u) : v \leq X\}$. Si $X \geq (A_u - 1)/3$, entonces*

$$N_u(X) = 1 + \left\lfloor \log_4\left(\frac{3X+1}{A_u}\right) \right\rfloor.$$

Si $X < (A_u - 1)/3$, entonces $N_u(X) = 0$. En consecuencia,

$$N_u(X) = \frac{\log X}{\log 4} + O_u(1), \qquad \lim_{X\to\infty} \frac{N_u(X)}{X} = 0.$$

Demostración. La desigualdad $v_j \leq X$ equivale, por (1), a $4^j \leq (3X+1)/A_u$. Basta contar los índices enteros no negativos que la satisfacen. □

Las proposiciones 2.2 y 2.3 expresan el contraste central de esta nota:

$$\mathcal{P}(u) \bmod 3^r = \mathbb{Z}/3^r\mathbb{Z} \quad (r \geq 1), \qquad d(\mathcal{P}(u)) = 0. \tag{2}$$

La cobertura de residuos no implica cobertura de enteros. En efecto, el último representante del primer período completo módulo 3^r es

$$v_{3^r-1} = \frac{A_u 4^{3^r-1} - 1}{3},$$

que crece a escala 4^{3^r} (con constantes dependientes de u), muy superior al número 3^r de clases cubiertas.

3. Uniones finitas y generaciones inversas

Si S es un conjunto finito no vacío de impares positivos no divisibles por 3, la unión $\mathcal{P}(S) = \bigcup_{u \in S} \mathcal{P}(u)$ sigue teniendo densidad cero, por la proposición 2.3. A la vez, cada una de las familias que la forman cubre todas las clases módulo 3^r; por ello $\mathcal{P}(S)$ también las cubre.

Para estudiar generaciones completas, definimos, cuando existe,

$$\ell(u) = \min\{h \geq 0 : T^h(u) = 1\}, \qquad G_h = \{u \text{ impar positivo} : \ell(u) = h\}.$$

Así, $G_0 = \{1\}$, y los G_h son disjuntos. Su unión

$$\mathcal{A} = \bigcup_{h \geq 0} G_h$$

es el conjunto de impares que alcanzan 1. La conjetura de Collatz equivale a que $\mathcal{A}$ sea el conjunto de todos los impares positivos.

Lema 3.1 (Cota polilogarítmica para preimágenes)**.** *Sea B un conjunto de impares positivos y supongamos que, para algún entero $h \geq 0$,*

$$B(Y) := \#(B \cap [1, Y]) \ll_h (1 + \log Y)^h \qquad (Y \geq 1).$$

Entonces el conjunto $T^{-1}(B)$ de predecesores impares satisface

$$\#(T^{-1}(B) \cap [1, X]) \ll_h (1 + \log X)^{h+1} \qquad (X \geq 1).$$

Demostración. Si $v \leq X$ y $T(v) = u \in B$, entonces $2^k u = 3v + 1 \leq 3X + 1$ para algún $k \geq 1$. En consecuencia,

$$\#(T^{-1}(B) \cap [1, X]) \leq \sum_{1 \leq k \leq \lfloor \log_2(3X+1) \rfloor} B\left(\frac{3X+1}{2^k}\right).$$

Hay $O(1+\log X)$ sumandos, y cada uno es $O_h((1+\log X)^h)$. El resultado se sigue al sumar. □

Proposición 3.2 (Cota polilogarítmica a profundidad fija)**.** *Para todo entero fijo $h \geq 0$,*

$$\boxed{\#(G_h \cap [1, X]) \ll_h (1 + \log X)^h \qquad (X \geq 1).}$$

En particular, cada generación inversa de profundidad mínima fija tiene densidad natural cero.

Demostración. Para $h = 0$, tenemos $G_0 = \{1\}$ y la cota es inmediata. Si vale para G_h, la inclusión $G_{h+1} \subseteq T^{-1}(G_h)$ y el lema 3.1 proporcionan el paso inductivo. Para $h = 1$, la estimación coincide con el orden de crecimiento de la familia $\mathcal{P}(1)$, excluyendo el punto fijo. □

Observación 3.3. *Para todo H fijo, la unión finita $G_0 \cup \cdots \cup G_H$ tiene a lo sumo $O_H((1 + \log X)^H)$ elementos hasta X y, por tanto, densidad cero. Sin embargo, no se puede deducir de ello que la unión numerable $\mathcal{A} = \bigcup_{h \geq 0} G_h$ tenga densidad cero. Una unión numerable de conjuntos de densidad cero puede ser todo el conjunto de impares positivos; basta considerar la unión de sus conjuntos unitarios. Tampoco se deduce que $\mathcal{A}$ sea todo el conjunto de impares: esa es justamente la cuestión abierta.*

4. Dónde aparece la maldición del casi

Los resultados anteriores son exactos, pero tienen un alcance delimitado. La proposición 2.2 describe congruencias para una familia de predecesores inmediatos; la proposición 3.2 controla cuantitativamente cualquier profundidad fija, pero con constantes que dependen de ella. Ninguna de ellas proporciona una cota de profundidad que garantice alcanzar todos los impares hasta una altura dada. En particular, no es legítimo dejar que h crezca con X manteniendo las constantes de la proposición 3.2 como si fueran uniformes.

Conviene distinguir tres afirmaciones:

1. Cada familia $\mathcal{P}(u)$, con $3 \nmid u$, representa todas las clases módulo 3^r.
2. Cada unión de un número fijo de generaciones inversas tiene crecimiento, como máximo, polilogarítmico.
3. Todos los impares positivos pertenecen a alguna generación inversa de profundidad finita.

Las dos primeras han sido demostradas aquí. La tercera es equivalente a la conjetura de Collatz y no se sigue de ellas.

La impresión visual de que el árbol inverso «lo cubre todo» puede verse reforzada por una cobertura modular impecable. Sin embargo, esa cobertura no controla la ubicación ni el tamaño de los representantes y, por sí sola, no garantiza la presencia de cada entero. Del mismo modo, una propiedad válida en todos los niveles fijos no se extiende automáticamente a su unión infinita.

5. Situación respecto de resultados conocidos

La monografía de Wirsching [1] estudia sistemáticamente los conjuntos de predecesores, el grafo inverso y aspectos de su distribución 3-ádica. Las observaciones elementales de esta nota deben entenderse dentro de esos antecedentes, no como una reivindicación de originalidad.

Por otro lado, Krasikov y Lagarias [2] demostraron que el número de enteros positivos $n \le X$ cuya órbita alcanza 1 es al menos $X^{0,84}$ para X suficientemente grande. Este resultado concierne a todos los enteros, no solo a los impares. Si se desea trasladarlo a nuestro conjunto $\mathcal{A}$ de impares, basta escribir cada entero que alcanza 1 como $2^k u$ con u impar: los enteros pares correspondientes a un mismo u aportan a lo sumo $1 + \lfloor \log_2 X \rfloor$ valores hasta X. Así,

$$\#(\mathcal{A} \cap [1, X]) \gg \frac{X^{0,84}}{1 + \log X}.$$

Esta cota no implica densidad natural positiva de $\mathcal{A}$.

Tao [3] probó que, para cualquier función $f(N) \to \infty$, casi todas las órbitas alcanzan valores inferiores a $f(N)$, en el sentido de densidad logarítmica. Esto no afirma que alcancen el valor 1, ni establece que $\mathcal{A}$ tenga densidad positiva. Ambos resultados sitúan la distancia entre la información parcial y la conjetura completa en un contexto mucho más profundo que el de nuestras estimaciones elementales.

6. Conclusión

La aparente paradoja es que una familia puede cubrir todas las clases módulo cualquier potencia de 3 y, aun así, omitir una proporción asintótica igual a uno de los enteros positivos. En el árbol inverso de Collatz, el paso adicional de generaciones finitas a una unión infinita constituye otra frontera lógica que no puede cruzarse mediante el mismo argumento de conteo.

La maldición del casi no consiste en que nuestras afirmaciones sean falsas, sino en que pueden ser todas verdaderas sin demostrar aquello que querríamos concluir.

Referencias

[1] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the* $3n + 1$ *Function*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1681, Springer, 1998. https://doi.org/10.1007/BFb0095985.

[2] I. Krasikov y J. C. Lagarias, "Bounds for the $3x + 1$ problem using difference inequalities", *Acta Arithmetica* **109** (2003), 237–258. https://doi.org/10.4064/aa109-3-4.

[3] T. Tao, "Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values", *Forum of Mathematics, Pi* **10** (2022), e12. https://doi.org/10.1017/fmp.2022.8.