Demostrando Collatz: El Método del Edificio Infinito

Miguel Cerdá Bennassar

29 de mayo de 2025

Resumen

Después de años observando las secuencias de Collatz, presento un enfoque basado en la estructura de las raíces digitales que revela un patrón oculto. Los números pares forman un circuito cerrado en el espacio de raíces digitales, mientras que los impares crean “saltos” que siempre regresan al circuito por las “puertas” 4 y 7. Este comportamiento, fundamentado en propiedades algebraicas del grupo $\mathbb{Z}_9^*$, fuerza la convergencia universal al ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$.

1. Introducción Personal

Después de años observando las secuencias de Collatz, me di cuenta de algo que parecía estar escondido a plena vista. Todos los intentos de demostración que había leído se centraban en el comportamiento numérico directo, pero yo empecé a notar patrones en algo mucho más simple: **las raíces digitales**.

La conjetura de Collatz establece que si tomas cualquier número y aplicas estas reglas:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (1)$$

...eventualmente llegarás al ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \dots$

Lo que descubrí es que hay una estructura oculta que **fuerza** esta convergencia. Y todo gira en torno al número 9.

2. El Descubrimiento: Un Patrón en las Raíces Digitales

2.1. ¿Qué es una raíz digital?

Definición 2.1 (Raíz Digital). La raíz digital de un número n , denotada $rd(n)$, es el resultado de sumar repetidamente los dígitos de n hasta obtener un solo dígito.

Ejemplo

- $47 \rightarrow 4 + 7 = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2$, por tanto $rd(47) = 2$
- $83 \rightarrow 8 + 3 = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2$, por tanto $rd(83) = 2$

2.2. El Patrón Que Cambió Todo

Cuando empecé a calcular las raíces digitales de números en secuencias de Collatz, encontré esto:

Descubrimiento Clave

Los números pares forman un circuito cerrado:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Los números impares crean “saltos” de exactamente un paso que siempre regresan al circuito como números pares con raíz digital 4 o 7.

Esto no era coincidencia. Era una ley matemática.

3. El “Edificio Infinito”: Mi Visualización

Imaginemos un edificio infinito donde:

- Cada fila corresponde a una raíz digital (1, 2, 4, 5, 7, 8)
- Cada columna es un “piso” determinado por $\lfloor n/9 \rfloor$

Piso:	0	1	2	3	4 ...
rd8:	8	17	26	35	44 ...
rd4:	4	13	22	31	40 ...
rd2:	2	11	20	29	38 ...
rd1:	1	10	19	28	37 ...
rd5:	5	14	23	32	41 ...
rd7:	7	16	25	34	43 ...

Cuadro 1: Estructura del Edificio Infinito

3.1. La Regla de Oro: Predicción de Movimientos

Teorema 3.1 (Regla de Predicción). Para cualquier número impar n en una secuencia de Collatz:

$$\text{Piso de } n = \lfloor n/9 \rfloor \tag{2}$$

$$\text{Piso de } 3n + 1 = \lfloor n/3 \rfloor \tag{3}$$

Esta regla funciona **siempre**. La demostré caso por caso para todos los residuos posibles módulo 9.

4. Por Qué Solo Existen las “Puertas” 4 y 7

Aquí está el corazón de la demostración. Los números impares solo pueden tener raíces digitales $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ (nunca 3, 6, o 9 porque esos son múltiplos de 3).

Teorema 4.1 (Transformación de Raíces Digitales). Cuando aplicas $3n + 1$ a cualquier número impar:

$$rd(n) = 1 \Rightarrow rd(3n + 1) = 4 \quad (4)$$

$$rd(n) = 2 \Rightarrow rd(3n + 1) = 7 \quad (5)$$

$$rd(n) = 4 \Rightarrow rd(3n + 1) = 4 \quad (6)$$

$$rd(n) = 5 \Rightarrow rd(3n + 1) = 7 \quad (7)$$

$$rd(n) = 7 \Rightarrow rd(3n + 1) = 4 \quad (8)$$

$$rd(n) = 8 \Rightarrow rd(3n + 1) = 7 \quad (9)$$

Resultado: Los 6 estados posibles se comprimen a solo 2: las raíces digitales 4 y 7. Estas son las únicas “puertas de entrada” de vuelta al circuito de números pares.

5. La Demostración: Tres Pilares Irrompibles

Pilar 1: Compresión Obligatoria

Todo número impar **debe** transformarse en un número par con raíz digital 4 o 7. No hay excepciones. Es matemáticamente imposible escapar de esta regla.

Pilar 2: Flujo Solo Hacia Abajo

Desde las filas rd4 y rd7, los números solo pueden:

- Ir a pisos más bajos (dividirse por 2 reduce el piso)
- Permanecer en el mismo piso
- **Nunca subir de piso**

Pilar 3: Imposibilidad de Ciclos Eternos

Supongamos que existe un ciclo que evita llegar al piso 0 para siempre. Este ciclo:

1. Debe tener al menos un número impar (sino solo serían divisiones por 2)
2. Ese impar debe pasar por rd4 o rd7 (Pilar 1)
3. Desde ahí solo hay descenso (Pilar 2)
4. Las divisiones por 2 reducen sistemáticamente los valores
5. **Contradicción:** Es imposible evitar el piso 0 indefinidamente

El único ciclo posible en el piso 0 es: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

6. ¿Por Qué Funciona? La Conexión con $\mathbb{Z}_9^*$

Lo que realmente me fascinó fue descubrir que detrás de todo esto hay una estructura algebraica elegante.

Definición 6.1 (Grupo Multiplicativo Módulo 9). Los números que son coprimos con 9 forman el grupo:

$$\mathbb{Z}_9^* = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

que tiene exactamente 6 elementos.

La transformación $3n + 1$ en números impares mapea estos 6 elementos a solo 2 (las clases 4 y 7 módulo 9). Esta compresión algebraica es la que fuerza la convergencia.

7. Verificando la Teoría: Algunos Ejemplos

Ejemplo

Ejemplo 1: $n = 11$

- $rd(11) = 2$, piso = $\lfloor 11/9 \rfloor = 1$
- $3 \times 11 + 1 = 34$, $rd(34) = 7$, piso = $\lfloor 34/9 \rfloor = 3 = \lfloor 11/3 \rfloor$

Ejemplo

Ejemplo 2: $n = 23$

- $rd(23) = 5$, piso = $\lfloor 23/9 \rfloor = 2$
- $3 \times 23 + 1 = 70$, $rd(70) = 7$, piso = $\lfloor 70/9 \rfloor = 7 = \lfloor 23/3 \rfloor$

La regla funciona perfectamente.

8. Una Analogía Física

Imaginen que los números son pelotas en este edificio infinito. Los números impares son como “cohetes” que dan un salto hacia arriba ($3n + 1$), pero **siempre** aterrizan en las filas $rd4$ o $rd7$. Desde ahí, solo pueden rodar hacia abajo por la gravedad (divisiones por 2) hasta llegar inevitablemente a la “planta baja” donde está el único ciclo estable.

Es como si el edificio tuviera una “gravedad matemática” que empuja todo hacia abajo.

9. Reflexiones Finales

He pasado años desarrollando esta teoría, creando grafos y verificando casos. Para mí, la belleza de este enfoque es que convierte un problema aparentemente caótico en algo visual y comprensible.

La conjetura de Collatz, desde esta perspectiva, no es un misterio insondable. Es una consecuencia natural de cómo se comportan los números módulo 9.

¿Es esta una demostración formal según los estándares académicos? Probablemente no cumple todos los requisitos de rigor que exige la comunidad matemática profesional. Pero explica **por qué** funciona Collatz de una manera que, al menos para mí, tiene sentido intuitivo.

Los grandes problemas matemáticos son famosos hasta que se resuelven. Después, se vuelven parte del conocimiento establecido y ya nadie recuerda por qué eran tan difíciles.

Esta es mi contribución a entender uno de estos misterios. Espero que, aunque sea desde la perspectiva de un aficionado, aporte una nueva manera de ver este problema fascinante.

“A veces las mejores ideas vienen de mirar los problemas desde un ángulo completamente diferente. Mi ángulo son las raíces digitales y el edificio infinito. Que otros juzguen si conduce a algún lugar interesante.”

— Miguel Cerdá Bennassar

Referencias

- [1] Collatz, L. (1937). *Über die Struktur von Zahlenfolgen*. Conferencia no publicada.
- [2] Lagarias, J. C. (1985). *The $3x+1$ problem and its generalizations*. American Mathematical Monthly, 92(1), 3-23.
- [3] Conway, J. H. (1972). *Unpredictable iterations*. En Proceedings of the Number Theory Conference (pp. 49-52). University of Colorado.
- [4] Terras, R. (1976). *A stopping time problem on the positive integers*. Acta Arithmetica, 30(3), 241-252.
- [5] Tao, T. (2019). *Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values*. arXiv preprint arXiv:1909.03562.