Sistemas Dinámicos Modulares con Ciclos-Permutación

Autor: [Miguel Cerdá Bennassar]

17 de junio de 2025

Índice general

1. Introducción	5
2. Fundamentos Generales	6
2.1. Motivación y antecedentes	6
2.2. Definición de Sistemas Dinámicos Modulares con Ciclos-Permutación (SDM-CP)	7
3. Ejemplos Elementales	8
3.1. Caso módulo 2: Collatz y variantes	8
3.2. Caso módulo 3: primeros ciclos biyectivos	8
3.3. Casos módulo 4, 5, 6: crecimiento de complejidad	9
3.4. Comparación cualitativa entre módulos	9
4. Construcción General de Funciones Cíclicas	10
4.1. Particiones modulares	10
4.2. Asignación de funciones por clases de residuos	10
4.3. Condiciones de cierre de ciclo	10
4.4. Construcción inversa desde ciclos objetivo	10
5. Propiedades Estructurales de los SDM-CP	12
5.1. Longitudes de ciclo y cardinalidad	12
5.2. Atractores y dominios de captura	12
5.3. Biyectividad y permutabilidad interna	12
5.4. Estabilidad bajo iteración	12
6. Relación con Sistemas Collatzianos	13
6.1. Comparativa estructural	13
6.2. Transformaciones de equivalencia	13
6.3. Modelos híbridos Collatz-Modular	13
7. Extensiones Modulares y Casos Especiales	15
7.1. Módulos grandes: crecimiento asintótico de ciclos	15
7.2. Combinación de módulos múltiples	15
7.3. Funciones con desplazamiento modular	15
7.4. Observaciones experimentales	16

8. Aplicaciones y Perspectivas	17
8.1. Posibles aplicaciones en teoría de números	17
8.2. Analogías en sistemas discretos	17
8.3. Posibles líneas de investigación futura	17

Conclusión General	18
---------------------------	-----------

Glosario

Antes de adentrarnos en los Sistemas Dinámicos Modulares con Ciclos-Permutación, presentamos un glosario con los términos clave que encontrarás en este documento. Estas definiciones están pensadas para lectores aficionados a las matemáticas, con ejemplos simples para facilitar la comprensión.

Atractor Punto o conjunto de puntos hacia los cuales convergen las iteraciones de un sistema dinámico modular. Por ejemplo, en un sistema con $k = 3$, si $f(0) = 0$, entonces 0 es un atractor porque siempre regresa a sí mismo.

Árbol de iteración Diagrama que muestra cómo los números evolucionan al aplicar la función f . Cada número es un nodo, y las aristas indican la acción de f . Por ejemplo, para $k = 2$, el árbol conecta números pares e impares según sus iteraciones.

Biyectividad Propiedad de una función donde cada entrada produce una salida única, y cada salida corresponde a una única entrada. En los SDM-CP, un sistema biyectivo crea permutaciones sin repeticiones ni pérdidas.

Ciclo Secuencia de números que se repite tras aplicar f varias veces. Por ejemplo, si $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ para $k = 3$, entonces $(1, 2)$ es un ciclo de longitud 2.

Clase de residuo Grupo de números que tienen el mismo resto al dividirse por k . Para $k = 3$, las clases son $\{0, 3, 6, \dots\}$, $\{1, 4, 7, \dots\}$, $\{2, 5, 8, \dots\}$.

Collatziano Sistema inspirado en la conjetura de Collatz, donde las reglas dependen de la paridad o residuos módulo k . Los SDM-CP generalizan estas ideas con funciones personalizadas por clase.

Dominio de captura Conjunto de números que, tras varias aplicaciones de f , llegan a un atractor o ciclo. Por ejemplo, si $f(4) = 1$ y $f(1) = 1$, el número 4 está en el dominio de captura del atractor 1.

Función afín Regla matemática de la forma $f(n) = an + b$, donde a y b son constantes. En los SDM-CP, cada clase de residuo usa una función afín, como $f_0(n) = 2n + 1$ para la clase 0.

Iteración Proceso de aplicar una función repetidamente. Por ejemplo, si $f(1) = 2$ y $f(2) = 3$, la iteración desde 1 genera la secuencia $1, 2, 3, \dots$

Longitud de ciclo Cantidad de números en un ciclo. Por ejemplo, si $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$, el ciclo $(1, 2, 3)$ tiene longitud 3.

Módulo Número entero positivo k que define las clases de residuo. Por ejemplo, $k = 5$ crea cinco clases: 0, 1, 2, 3, 4.

Permutación Reordenamiento de elementos donde cada uno aparece exactamente una vez. En los SDM-CP, una permutación define cómo las clases de residuo se transforman al aplicar f .

Residuo Resto que queda al dividir un número por k . Por ejemplo, para $k = 3$, el número 7 tiene residuo 1 porque $7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Sistema dinámico modular Modelo donde una función f se aplica iterativamente a números enteros, usando reglas basadas en aritmética modular. Los SDM-CP son un tipo especial que asigna funciones por clases de residuo.

Estabilidad Característica de un sistema donde los ciclos o atractores no cambian drásticamente con pequeñas modificaciones. Un sistema SDM-CP estable mantiene sus patrones bajo iteraciones.

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de las últimas décadas, muchos sistemas discretos iterativos han captado el interés de matemáticos, físicos e ingenieros por igual. Entre ellos, la célebre **Conjetura de Collatz** es uno de los ejemplos paradigmáticos: una función simple, definida por casos según la paridad, que genera trayectorias numéricas de enorme complejidad. Sin embargo, Collatz es solo un caso particular dentro de una clase más amplia de sistemas dinámicos, donde los números se transforman repetidamente bajo reglas modulares. Este libro está dedicado a la exploración de estos sistemas, que denominaremos **Sistemas Dinámicos Modulares con Ciclos-Permutación (SDM-CP)**.

La idea central que unifica nuestro enfoque es el siguiente principio:

Principio modular cíclico: dado un conjunto de residuos módulo k , es posible definir funciones iterativas que permutan los elementos de forma controlada, generando ciclos cerrados cuyas propiedades dependen de la estructura modular elegida.

Nuestro objetivo es construir, estudiar y clasificar estas funciones, analizando los patrones que emergen cuando variamos el módulo k , la regla de transición, y la presencia o no de semillas (atractores externos al ciclo).

Este trabajo surge como continuación y reorganización de investigaciones previas, en las que inicialmente exploramos secuencias pseudo-Collatzianas y sistemas de ciclos programados (SCP). En la presente obra hemos decidido unificar y generalizar aquellos resultados bajo un marco conceptual más sólido, donde la aritmética modular y las permutaciones controladas juegan un papel central.

Capítulo 2

Fundamentos Generales

2.1. Motivación y antecedentes

A lo largo de la historia de las matemáticas discretas, el estudio de sistemas dinámicos definidos por reglas iterativas simples ha producido fenómenos de gran complejidad. Uno de los ejemplos paradigmáticos es la conocida **conjetura de Collatz**, que plantea un problema abierto desde hace décadas a partir de una función recursiva elemental.

La fascinación por estos sistemas no proviene únicamente de la dificultad de su resolución formal, sino también de los patrones emergentes que aparecen en sus trayectorias. Estos patrones reflejan estructuras internas no evidentes, muchas veces relacionadas con propiedades modulares, divisibilidad, y permutaciones de subconjuntos numéricos.

En este contexto, el presente trabajo introduce el estudio sistemático de los **Sistemas Dinámicos Modulares con Ciclos-Permutación (SDM-CP)**. Estos sistemas representan una clase más general que incluye, como caso particular, las funciones Collatzianas, pero se extienden hacia modelos donde las reglas de transformación están controladas explícitamente mediante la aritmética modular.

El desarrollo de los SDM-CP permite:

- Construir funciones generadoras de ciclos de forma programada, especificando la longitud, los residuos y el comportamiento interno de los ciclos.
- Analizar la interacción entre paridad, divisibilidad, y comportamiento asintótico de las trayectorias.
- Proporcionar marcos funcionales donde es posible tanto el control de atracción (convergencia a ciclos desde semillas externas) como el confinamiento biyectivo puro.
- Explorar extensiones naturales al variar el módulo de trabajo k , con resultados observables en el crecimiento de la complejidad cíclica.

La motivación central es, por tanto, establecer un marco unificador donde distintas clases de secuencias iterativas puedan analizarse como casos particulares de una misma teoría basada en transformaciones modulares.

2.2. Definición de Sistemas Dinámicos Modulares con Ciclos-Permutación (SDM-CP)

Un **Sistema Dinámico Modular con Ciclos-Permutación (SDM-CP)** es un sistema iterativo discreto, definido sobre el conjunto de los números enteros (o un subconjunto finito de los mismos), donde cada iteración aplica una función dependiente de la clase de congruencia del número bajo un módulo fijo k .

Formalmente, definimos:

- Sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, el módulo de trabajo.
- Sea el conjunto de clases de residuos módulo k :

$$\mathcal{R}_k = \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}.$$

- Se define un sistema de funciones por clases de residuos:

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = f_i(n) \text{ si } n \equiv i \pmod{k}.$$

- Cada función parcial $f_i(n)$ está asociada a la clase de residuo i .

El sistema dinámico se genera iterando repetidamente la aplicación de f sobre un valor inicial $n_0 \in \mathbb{Z}$:

$$n_1 = f(n_0), \quad n_2 = f(n_1), \quad n_3 = f(n_2), \dots$$

Un SDM-CP se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades esenciales:

1. **Modularidad controlada:** la elección de las funciones $f_i(n)$ depende exclusivamente de la clase de residuo de n módulo k .
2. **Generación de ciclos:** existen subconjuntos de valores para los cuales la iteración de f produce ciclos finitos estables.
3. **Permutación interna:** en los casos biyectivos confinados, el conjunto de elementos que conforman el ciclo es cerrado bajo f , actuando f como permutación de dicho conjunto.

Capítulo 3

Ejemplos Elementales

3.1. Caso módulo 2: Collatz y variantes

El caso más conocido de sistema dinámico modular sobre $k = 2$ corresponde a la familia de funciones inspiradas en la conjetura de Collatz.

En este escenario, el conjunto de residuos módulo 2 es:

$$\mathcal{R}_2 = \{0, 1\},$$

lo que equivale a clasificar los números en pares e impares. La regla clásica de Collatz puede escribirse de forma modular como:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 3n + 1, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

La iteración de f sobre cualquier entero positivo genera una secuencia que, según la conjetura, siempre termina alcanzando el ciclo trivial:

$$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$$

Existen múltiples variantes funcionales que también operan sobre $k = 2$, mediante modificaciones en los coeficientes asignados a cada paridad.

3.2. Caso módulo 3: primeros ciclos biyectivos

Para $k = 3$, el conjunto de residuos es:

$$\mathcal{R}_3 = \{0, 1, 2\}.$$

Se puede construir, por ejemplo:

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ n + 1, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ n - 2, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Produciendo el ciclo:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0.$$

3.3. Casos módulo 4, 5, 6: crecimiento de complejidad

Aumentando el módulo k , la complejidad estructural crece. Por ejemplo:

- Para $k = 4$: ciclos de longitud 4.
- Para $k = 5$: ciclos de longitud 5 o particiones internas.
- Para $k = 6$: ciclos múltiples combinados.

3.4. Comparación cualitativa entre módulos

El paso de $k = 2$ (Collatz) hacia $k \geq 3$ introduce:

- Mayor flexibilidad.
- Permutabilidad completa.
- Programación directa de ciclos deseados.

Capítulo 4

Construcción General de Funciones Cíclicas

4.1. Particiones modulares

Dado un módulo fijo k , el conjunto de residuos $\mathcal{R}_k$ define la partición:

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{n \in \mathbb{Z} : n \equiv i \pmod{k}\}.$$

4.2. Asignación de funciones por clases de residuos

Cada clase $i \in \mathcal{R}_k$ recibe una función $f_i(n)$, generalmente de forma afín:

$$f_i(n) = a_i \cdot n + b_i.$$

La condición básica es:

$$f_i(n) \pmod{k} \equiv \pi(i),$$

donde π es la permutación deseada.

4.3. Condiciones de cierre de ciclo

Se debe cumplir:

$$f^{(\ell)}(n) = n,$$

para que la iteración cierre el ciclo de longitud ℓ .

4.4. Construcción inversa desde ciclos objetivo

Partiendo de los valores concretos $C = \{c_0, c_1, \dots, c_{\ell-1}\}$, se plantean las ecuaciones:

$$f_{i_j}(c_j) = c_{j+1}.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtienen los parámetros a_i y b_i que generan el ciclo deseado.

Capítulo 5

Propiedades Estructurales de los SDM-CP

5.1. Longitudes de ciclo y cardinalidad

- La longitud máxima es $\ell = k$.
- Las permutaciones se descomponen en ciclos disjuntos.
- Cada permutación sobre $\mathcal{R}_k$ genera una estructura única de ciclos.

5.2. Atractores y dominios de captura

- Existen dominios de captura finitos que terminan en los ciclos estables.
- Los sistemas biyectivos puros carecen de semillas externas.

5.3. Biyectividad y permutabilidad interna

- En los sistemas biyectivos, la función global f es una permutación cerrada.
- Cada residuo pertenece nativamente a un ciclo.

5.4. Estabilidad bajo iteración

- Los SDM-CP son estables por construcción.
- Toda trayectoria converge a un ciclo predefinido.

Capítulo 6

Relación con Sistemas Collatzianos

6.1. Comparativa estructural

Aunque conceptualmente relacionados, los SDM-CP y los sistemas Collatzianos presentan diferencias clave:

- Collatz trabaja sobre módulo 2; los SDM-CP permiten $k \geq 2$.
- En SDM-CP el diseñador controla las funciones $f_i(n)$.
- Los SDM-CP permiten permutabilidad pura y programación exacta.
- Collatz sigue abierto como conjetura, mientras los SDM-CP son programables.

6.2. Transformaciones de equivalencia

Ciertos modelos permiten reinterpretar variantes Collatzianas como SDM-CP sobre módulos mayores. Por ejemplo:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{3} + 1, & n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{2n+1}{3}, & n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{4n+2}{3}, & n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Estas transformaciones permiten experimentar con analogías funcionales.

6.3. Modelos híbridos Collatz-Modular

Se pueden diseñar modelos mixtos como:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{3n+1}{2}, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

O incluso sobre $k = 3$:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{3n+2}{3}, & n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{2n+1}{3}, & n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{4n+5}{3}, & n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Estos modelos híbridos conectan los mundos Collatzianos y modulares.

Capítulo 7

Extensiones Modulares y Casos Especiales

7.1. Módulos grandes: crecimiento asintótico de ciclos

El número de permutaciones posibles crece como $k!$. Por ejemplo:

$$k = 5 \implies 5! = 120.$$

Para módulos grandes:

- Los SDM-CP pueden programar ciclos extremadamente largos.
- Se permite ramificación interna en subciclos independientes.

7.2. Combinación de módulos múltiples

Trabajando simultáneamente con varios módulos $\{k_1, k_2, \dots\}$:

- Se introducen niveles adicionales de control.
- El Teorema Chino del Resto permite combinar congruencias.

7.3. Funciones con desplazamiento modular

La forma funcional:

$$f_i(n) = a_i \cdot n + b_i,$$

con:

$$b_i \equiv \pi(i) - a_i \cdot i \pmod{k},$$

permite ajustar las transiciones exactas para cualquier permutación deseada.

7.4. Observaciones experimentales

Se han observado:

- Estabilidad perfecta bajo iteración.
- Combinatoria rica de ciclos.
- Patrones recurrentes sobre raíces digitales.
- Escalabilidad indefinida sin caos.

Capítulo 8

Aplicaciones y Perspectivas

8.1. Posibles aplicaciones en teoría de números

- Construcción controlada de permutaciones.
- Relaciones profundas con aritmética modular.
- Modelos experimentales de ciclos programados.
- Generación de nuevas conjeturas.

8.2. Analogías en sistemas discretos

Los SDM-CP se relacionan con:

- Autómatas finitos.
- Teoría de grafos dirigidos.
- Programación de permutaciones.
- Criptografía modular.

8.3. Posibles líneas de investigación futura

Existen múltiples líneas abiertas:

- Clasificación completa de permutaciones.
- Teoría algebraica de construcción inversa.
- Combinación multinivel de módulos.
- Análisis de simetrías internas.
- Exploración computacional masiva.
- Aplicaciones interdisciplinarias.

Conclusión General

A lo largo de este trabajo hemos desarrollado de forma progresiva la teoría de los **Sistemas Dinámicos Modulares con Ciclos-Permutación (SDM-CP)**, partiendo de sus fundamentos algebraicos hasta sus aplicaciones potenciales.

Síntesis conceptual

Los SDM-CP constituyen una familia amplia de sistemas dinámicos discretos caracterizados por:

- El uso sistemático de la aritmética modular como estructura base.
- La programación funcional controlada de permutaciones sobre los residuos módulo k .
- La capacidad de generar ciclos exactos de longitud deseada mediante construcción inversa.
- La estabilidad absoluta bajo iteración, sin divergencias ni caos.
- La posibilidad de configurar tanto sistemas biyectivos confinados como sistemas atractores con semillas externas.

Relación con otras teorías

En el camino hemos explorado:

- La relación conceptual y funcional entre los SDM-CP y las secuencias de tipo Collatz.
- Las analogías con autómatas finitos, grafos dirigidos y sistemas de permutaciones.
- Las posibilidades de conexión interdisciplinaria con teoría de números, criptografía y teoría de códigos.

Perspectivas futuras

Lejos de constituir un marco cerrado, los SDM-CP abren puertas a:

- Nuevos programas de clasificación funcional.
- Exploraciones experimentales de ciclos programables en módulos grandes.
- Modelos híbridos de dinámica discreta de interés tanto teórico como aplicado.

Reflexión final

Este libro no pretende agotar el campo, sino ofrecer un marco de partida, claro y funcional, desde el cual construir, explorar y ampliar un universo de dinámicas discretas completamente gobernables, donde la aritmética modular deja de ser solo una herramienta de cálculo para convertirse en el lenguaje natural de la programación dinámica.