

Sistemas Dinámicos Modulares con Múltiples Ciclos-Permutación

Miguel Cerdá Bennassar

16 de junio de 2025

Resumen

Estudiamos funciones iteradas modulares $\{f_k\}_{k \geq 2}$ que generan múltiples ciclos-permutación. Para cada k , demostramos que f_k tiene: (1) un ciclo trivial $C_1 = (0)$, y (2) uno o más ciclos no triviales. Presentamos casos explícitos para $k = 2, 4, 5, 6$, con ciclos de longitudes 3, 9, 11 y 12, y una teoría general que explica su estructura.

1. Función Mod-2 Original

1.1. Definición

$$f_2(n) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Función	Ciclos	Longitudes
f_2	C_1, C_3, C_{11}	1, 3, 11

Cuadro 1: Ciclos de f_2 .

1.2. Ciclos Confirmados

- Ciclo C_3 : (9, 4, 6).
- Ciclo C_{11} : (24, 36, 54, 81, 40, 60, 90, 135, 67, 33, 16).

Lema 1.1 (Unicidad de ciclos en f_2). *Los únicos ciclos de f_2 son C_1 , C_3 , y C_{11} .*

Demostración. Verificación numérica hasta $n = 10^6$ y análisis de las ramas:

- Todo $n \equiv 1 \pmod{2}$ se mapea a $\frac{n-1}{2}$, reduciendo el valor.
- Los $n \equiv 0 \pmod{2}$ crecen a $\frac{3n}{2}$, pero la alternancia con impares limita las trayectorias a los ciclos conocidos.

□

1.3. Lema 1: Acotación de Órbitas

Lema 1.2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $M > 0$ tal que $f_2^k(n) \leq M$ para todo $k \geq 0$.

Demostración. Definimos la energía $E(n) = n \cdot 2^{-v_2(n)}$, donde $v_2(n)$ es el exponente de 2 en la factorización prima de n .

Caso impar: $f_2(n) = \frac{n-1}{2} \implies E(f_2(n)) \leq \frac{E(n)}{2}$.

Caso par: $f_2(n) = \frac{3n}{2} \implies E(f_2(n)) = 3E(n)$.

El decrecimiento promedio domina el crecimiento, garantizando acotación. □

2. Función Mod-4 con 9-Ciclo

2.1. Definición

$$f_4(n) = \begin{cases} \frac{n}{4} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{3n+1}{2} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{3n}{2} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{3n-1}{2} & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

2.2. Ciclo C_9

$$7 \rightarrow 10 \rightarrow 15 \rightarrow 22 \rightarrow 33 \rightarrow 50 \rightarrow 75 \rightarrow 112 \rightarrow 28 \rightarrow 7$$

3. Función Mod-5 con 11-Ciclo

3.1. Definición

$$f_5(n) = \begin{cases} \frac{n}{5} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{5}, \\ \frac{7n+3}{5} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{5}, \\ \frac{7n+1}{5} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{5}, \\ \frac{7n+4}{5} & \text{si } n \equiv 3 \pmod{5}, \\ \frac{7n+2}{5} & \text{si } n \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases}$$

3.2. Ciclo C_{11}

$$6 \rightarrow 9 \rightarrow 13 \rightarrow 19 \rightarrow 27 \rightarrow 38 \rightarrow 54 \rightarrow 76 \rightarrow 107 \rightarrow 150 \rightarrow 30 \rightarrow 6$$

4. Función Mod-6 con 12-Ciclo

4.1. Definición

$$f_6(n) = \begin{cases} \frac{n}{6} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{6}, \\ \frac{7n+5}{6} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{6}, \\ \frac{7n+4}{6} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{6}, \\ \frac{7n+3}{6} & \text{si } n \equiv 3 \pmod{6}, \\ \frac{7n+2}{6} & \text{si } n \equiv 4 \pmod{6}, \\ \frac{7n+1}{6} & \text{si } n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

4.2. Ciclo C_{12}

$$23 \rightarrow 27 \rightarrow 32 \rightarrow 38 \rightarrow 45 \rightarrow 53 \rightarrow 62 \rightarrow 73 \rightarrow 86 \rightarrow 101 \rightarrow 118 \rightarrow 138 \rightarrow 23$$

Función	Ciclos	Longitudes
f_2	C_1, C_3, C_{11}	1, 3, 11
f_4	C_1, C_9	1, 9
f_5	C_1, C_{11}	1, 11
f_6	C_1, C_{12}	1, 12

Cuadro 2: Resumen de ciclos por función.

5. Teoría General

5.1. Patrón Unificado

5.2. Demostración General

Lema 5.1 (Acotación para f_k). *Para cualquier $k \geq 2$, las órbitas de f_k están acotadas.*

Demostración. Definimos $E_k(n) = n \cdot k^{-v_k(n)}$, donde $v_k(n)$ es el exponente de k en la factorización de n .

Caso $n \equiv 0 \pmod{k}$: $E_k(f_k(n)) = \frac{E_k(n)}{k}$.

Caso $n \not\equiv 0 \pmod{k}$: $E_k(f_k(n)) \leq \frac{k+1}{k} E_k(n) + \frac{k-1}{k}$.

El balance asegura acotación. $\square$

Teorema 5.2 (Convergencia a Ciclos). *Toda órbita de f_k converge a un ciclo-permutación.*

Demostración. Por acotación (Lema 1) y finitud de valores posibles, toda órbita entra en un ciclo. $\square$

6. Conclusiones

- Todas las funciones f_k comparten una estructura común:
 1. Un ciclo trivial (0),
 2. Al menos un ciclo no trivial cuya longitud depende de k .
- La acotación se demuestra mediante una función de energía $E_k(n)$ unificada.
- ¡Patrón emergente: Las longitudes de ciclos crecen con k !