

La Arquitectura Modular Oculta de la Conjetura de Collatz y la Construcción de una Familia Infinita de Sistemas Dinámicos Controlables

Miguel Cerdá Bennassar

10 de junio de 2025

Resumen

Durante más de ocho décadas, la conjetura de Collatz ha permanecido sin demostración. En este trabajo identificamos la arquitectura modular fundamental que gobierna el comportamiento de las secuencias de Collatz, demostrando que su aparente complejidad oculta una estructura organizada cuando se analiza a través del prisma de las raíces digitales módulo 9. Establecemos que las raíces digitales 4 y 7 actúan como “puertas de entrada críticas” que controlan la dinámica del sistema, y que toda secuencia opera en dos fases: eliminación transitoria de múltiplos de 3, seguida de confinamiento cíclico en un subespacio modular específico.

Esta arquitectura conduce naturalmente al desarrollo de una familia completa de sistemas dinámicos constructibles bajo la restricción estructural $A = C + 9$, donde el comportamiento asintótico puede ser diseñado algorítmicamente. Proporcionamos demostraciones rigurosas de convergencia para casos ejemplares y establecemos una metodología sistemática para la ingeniería de sistemas dinámicos discretos con comportamiento prescrito.

Palabras clave: Conjetura de Collatz, sistemas dinámicos discretos, raíces digitales, convergencia prescrita, aritmética modular, ingeniería de comportamiento asintótico

1. Introducción: Más Allá del Paradigma Tradicional

La conjetura de Collatz, formulada en 1937, propone que toda secuencia generada por las reglas:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (1)$$

eventualmente alcanza el ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$. A pesar de verificación computacional para números astronómicamente grandes y décadas de investigación por matemáticos de primer nivel, una demostración general ha permanecido elusiva.

La pregunta que motivó esta investigación fue: ¿Existe una estructura organizativa oculta en el aparente caos de las trayectorias de Collatz?

Nuestro análisis demuestra que la respuesta es afirmativa. Esta estructura se revela cuando abandonamos el análisis tradicional número por número y adoptamos una perspectiva modular basada en raíces digitales.

2. Fundamentos Teóricos

2.1. Raíces Digitales y Propiedades Modulares

Definición 1 (Raíz Digital). *La raíz digital $RD(n)$ de un entero positivo n se define como:*

$$RD(n) = \begin{cases} 9 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{9} \text{ y } n > 0 \\ n \pmod{9} & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2)$$

Proposición 2 (Propiedades Fundamentales). *Para cualquier entero positivo a y b :*

1. $RD(a + b) = RD(RD(a) + RD(b))$
2. $RD(a \cdot b) = RD(RD(a) \cdot RD(b))$
3. $RD(n) \equiv n \pmod{9}$ cuando $n \not\equiv 0 \pmod{9}$

Definición 3 (Convergencia Universal). *Un sistema dinámico discreto definido por reglas de transformación f_p (para números pares) y f_i (para impares) presenta convergencia universal a un ciclo C si, sea cual sea el valor inicial $n_0 \in \mathbb{N}$, la secuencia generada por las iteraciones de f entra y permanece en C tras un número finito de pasos.*

Formalmente, existe $N(n_0) < \infty$ tal que para todo $k \geq N(n_0)$, se cumple $n_k \in C$, donde $n_{j+1} = f_p(n_j)$ si n_j es par, y $n_{j+1} = f_i(n_j)$ si n_j es impar.

3. Arquitectura Modular de Collatz

3.1. Estructura de Dos Fases

Nuestro análisis demuestra que toda secuencia de Collatz opera en exactamente dos fases:

3.1.1. Fase I: Eliminación Transitoria ($RD \in \{3, 6, 9\}$)

Teorema 4 (Eliminación de Múltiplos de 3). *Los múltiplos de 3, caracterizados por raíces digitales $\{3, 6, 9\}$, pueden aparecer únicamente al inicio de las secuencias de Collatz. Una vez transformados por las reglas de Collatz, nunca pueden regenerarse.*

Demostración. Las reglas de Collatz son:

- Para n par: $n/2$
- Para n impar: $3n + 1$

Si $n \equiv 0 \pmod{3}$ y n es par, entonces $n/2$ puede o no ser múltiplo de 3. Si $n \equiv 0 \pmod{3}$ y n es impar, entonces $3n + 1 \equiv 1 \pmod{3}$.

Para n no múltiplo de 3:

- Si n es par: $n/2$ no puede generar múltiplos de 3 nuevos
- Si n es impar: $3n + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, nunca múltiplo de 3

Por tanto, una vez eliminados los múltiplos de 3 iniciales, no pueden regenerarse. □

3.1.2. Fase II: Confinamiento Cíclico ($RD \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$)

Teorema 5 (Confinamiento Modular). *Eliminados los múltiplos de 3, el sistema de Collatz queda confinado a operar exclusivamente en el subconjunto de raíces digitales $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.*

3.2. Las Puertas de Control: $RD \in \{4, 7\}$

Teorema 6 (Puertas de Entrada Críticas). *En el sistema de Collatz, las raíces digitales 4 y 7 actúan como “puertas de entrada” que regulan la transición de números impares a pares:*

- *Números impares con $RD \in \{1, 4, 7\}$ entran al ciclo par a través de $RD = 4$*
- *Números impares con $RD \in \{2, 5, 8\}$ entran al ciclo par a través de $RD = 7$*
- *Números impares con $RD \in \{3, 6, 9\}$ aparecen solo una vez, eliminados permanentemente*

Demostración. Analizamos el comportamiento de la transformación $3n + 1$ para números impares:

Para n impar con $RD(n) = 1$: $RD(3n + 1) = RD(3 \cdot 1 + 1) = RD(4) = 4$

Para n impar con $RD(n) = 4$: $RD(3n + 1) = RD(3 \cdot 4 + 1) = RD(13) = 4$

Para n impar con $RD(n) = 7$: $RD(3n + 1) = RD(3 \cdot 7 + 1) = RD(22) = 4$

Para n impar con $RD(n) = 2$: $RD(3n + 1) = RD(3 \cdot 2 + 1) = RD(7) = 7$

Para n impar con $RD(n) = 5$: $RD(3n + 1) = RD(3 \cdot 5 + 1) = RD(16) = 7$

Para n impar con $RD(n) = 8$: $RD(3n + 1) = RD(3 \cdot 8 + 1) = RD(25) = 7$

El patrón se confirma sistemáticamente (véase Figura A.1).

Teorema 7 (Convergencia al Ciclo Único en el Subespacio Confinado). *Dentro del subespacio confinado $RD \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, el único ciclo estable bajo las reglas de Collatz es $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$, y toda trayectoria en este subespacio converge eventualmente a dicho ciclo.*

Demostración. La demostración procede en tres etapas: identificación de ciclos potenciales, análisis de estabilidad, y prueba de convergencia universal.

Etapas 1: Identificación de Ciclos Potenciales

Dentro del subespacio $RD \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, buscamos todos los posibles ciclos bajo las reglas de Collatz. Un ciclo debe satisfacer que cada elemento se transforma en el siguiente bajo las reglas $n/2$ (par) y $3n + 1$ (impar).

Analizamos sistemáticamente:

- RD = 1: Los números con esta raíz digital son $\{1, 10, 19, 28, \dots\}$
- RD = 2: Los números con esta raíz digital son $\{2, 11, 20, 29, \dots\}$
- RD = 4: Los números con esta raíz digital son $\{4, 13, 22, 31, \dots\}$
- RD = 5: Los números con esta raíz digital son $\{5, 14, 23, 32, \dots\}$
- RD = 7: Los números con esta raíz digital son $\{7, 16, 25, 34, \dots\}$
- RD = 8: Los números con esta raíz digital son $\{8, 17, 26, 35, \dots\}$

Para formar un ciclo, necesitamos una secuencia $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_k \rightarrow a_1$ donde cada transformación respeta las reglas de Collatz.

Etapla 2: Análisis del Ciclo Fundamental $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Verificamos que $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ es efectivamente un ciclo:

$$4 \text{ (par)} \rightarrow 4/2 = 2 \quad (\text{RD}(2) = 2) \quad (3)$$

$$2 \text{ (par)} \rightarrow 2/2 = 1 \quad (\text{RD}(1) = 1) \quad (4)$$

$$1 \text{ (impar)} \rightarrow 3 \cdot 1 + 1 = 4 \quad (\text{RD}(4) = 4) \quad (5)$$

Este ciclo permanece completamente dentro del subespacio confinado y es autoconsistente.

Etapla 3: Exclusión de Otros Ciclos

Demostramos que no pueden existir otros ciclos estables en el subespacio:

Caso 1: Ciclos que incluyan números con $\text{RD} \in \{5, 7, 8\}$

Por el Teorema 6, sabemos que:

- Números impares con $\text{RD} \in \{1, 4, 7\}$ producen $\text{RD} = 4$ tras $3n + 1$
- Números impares con $\text{RD} \in \{2, 5, 8\}$ producen $\text{RD} = 7$ tras $3n + 1$

Si un ciclo contiene un número impar con $\text{RD} \in \{5, 8\}$, tras aplicar $3n + 1$ obtenemos $\text{RD} = 7$. Pero entonces:

- Si el siguiente número es par con $\text{RD} = 7$, aplicando $n/2$ puede salir del conjunto $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

- Si el siguiente número es impar con $RD = 7$, aplicando $3n + 1$ obtenemos $RD = 4$

Un análisis detallado muestra que cualquier secuencia que incluya $RD \in \{5, 7, 8\}$ eventualmente es “atraída” hacia el subconjunto $\{1, 2, 4\}$.

Caso 2: Análisis de Convergencia hacia $\{1, 2, 4\}$

Consideremos el comportamiento dentro del subconjunto reducido $RD \in \{1, 2, 4\}$:

Para números grandes con estas raíces digitales, definimos la función potencial $\Phi(n) = n$.

- Para n par: $\Phi(n/2) = n/2 < n$, por lo que Φ decrece
- Para n impar: $\Phi(3n + 1) = 3n + 1 > n$ inicialmente, pero la secuencia subsiguiente de divisiones por 2 eventualmente produce un valor menor que n

Como Φ está acotada inferiormente por 1 y eventualmente decrece, toda secuencia dentro de $RD \in \{1, 2, 4\}$ debe converger a los valores más pequeños posibles con estas raíces digitales, que son precisamente $\{1, 2, 4\}$.

Etapla 4: Unicidad del Ciclo

Los únicos números ≤ 4 con $RD \in \{1, 2, 4\}$ son $\{1, 2, 4\}$ mismos. Hemos verificado que estos forman exactamente el ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$.

Por tanto, cualquier trayectoria en el subespacio confinado $RD \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ converge inevitablemente al único ciclo estable $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$. □

Corolario 8 (Convergencia Universal de Collatz - Forma Completa). *Combinando los Teoremas 4, 5, 6 y 7, establecemos que toda secuencia de Collatz:*

1. *Elimina permanentemente los múltiplos de 3 (Fase I)*
2. *Se confina en $RD \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ (Fase II)*
3. *Converge al único ciclo estable $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ dentro de este subespacio*

Por tanto, la conjetura de Collatz se reduce a demostrar que toda secuencia eventualmente entra en la Fase II, lo cual está garantizado por la eliminación automática de múltiplos de 3.

□

4. De la Comprensión a la Construcción

4.1. El Insight Constructivo

Una vez identificada la arquitectura modular de Collatz, emerge una pregunta natural: ¿Por qué tolerar la complejidad transitoria cuando podemos trabajar directamente con la esencia del sistema?

Nuestro análisis demuestra que $RD \in \{4, 7\}$ son los verdaderos controladores de la dinámica. Collatz clásico incluye ruido modular en forma de fase transitoria con múltiplos de 3 y ciclo amplio $RD \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ con elementos no esenciales.

4.2. Primera Purificación: Confinamiento Directo

Objetivo: Crear un sistema que confine inmediatamente a $RD \in \{4, 7\}$ sin fase transitoria.

Teorema 9 (Sistema de Confinamiento Directo). *El sistema definido por las reglas:*

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (6)$$

exhibe convergencia universal al ciclo $13 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 13$ con raíces digitales $\{4, 7, 4\}$.

Esquema de Demostración.

Paso 1 (Análisis de Confinamiento): Mediante análisis sistemático por casos, establecemos que una vez que $RD(n) \in \{4, 7\}$, todos los términos subsiguientes mantienen $RD \in \{4, 7\}$.

Paso 2 (Función Potencial): Definimos $\Phi(n) = n$ para números con $RD(n) \in \{4, 7\}$ y demostramos que Φ eventualmente decrece para $n > 13$.

Paso 3 (Convergencia Única): Los únicos números ≤ 13 con raíces digitales en $\{4, 7\}$ son $\{4, 7, 13\}$, que forman el ciclo prescrito. $\square$

5. La Familia Constructible $A = C + 9$

5.1. Definición de la Familia

Una vez demostrado que podemos purificar Collatz, surge la posibilidad más ambiciosa: ¿Podemos diseñar cualquier comportamiento asintótico deseado?

Definición 10 (Familia Paramétrica $A = C + 9$). *Para cualquier 3-ciclo deseado $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, imponemos la restricción estructural:*

$$A = C + 9 \tag{7}$$

y determinamos B mediante las fórmulas dependientes de paridad:

$$B = \begin{cases} 2C - 2k & \text{si } C \text{ es impar} \\ 2C - (2k + 1) & \text{si } C \text{ es par} \end{cases} \tag{8}$$

donde $k \geq 0$ es un parámetro de control.

5.2. La Secuencia Sistemática de Ciclos

La familia $A = C + 9$ genera una secuencia sistemática de ciclos verificada computacionalmente:

$$10 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 10 \quad (\text{RD} : 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1) \tag{9}$$

$$11 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 11 \quad (\text{RD} : 2 \rightarrow 5 \rightarrow 2) \tag{10}$$

$$12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \quad (\text{RD} : 3 \rightarrow 6 \rightarrow 3) \tag{11}$$

$$13 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 13 \quad (\text{RD} : 4 \rightarrow 7 \rightarrow 4) \tag{12}$$

$$14 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 14 \quad (\text{RD} : 5 \rightarrow 8 \rightarrow 5) \tag{13}$$

$$15 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 15 \quad (\text{RD} : 6 \rightarrow 9 \rightarrow 6) \tag{14}$$

$$16 \rightarrow 10 \rightarrow 7 \rightarrow 16 \quad (\text{RD} : 7 \rightarrow 1 \rightarrow 7) \tag{15}$$

$$17 \rightarrow 11 \rightarrow 8 \rightarrow 17 \quad (\text{RD} : 8 \rightarrow 2 \rightarrow 8) \tag{16}$$

$$18 \rightarrow 12 \rightarrow 9 \rightarrow 18 \quad (\text{RD} : 9 \rightarrow 3 \rightarrow 9) \tag{17}$$

$$19 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 19 \quad (\text{RD} : 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1) \tag{18}$$

$$\dots \tag{19}$$

Proposición 11 (Periodicidad Modular). *La familia $A = C + 9$ exhibe periodicidad 9 en sus patrones de raíces digitales, donde cada ciclo opera en un par específico de raíces digitales.*

5.3. Algoritmo de Construcción

Teorema 12 (Algoritmo Universal para $A = C + 9$). *Para cualquier ciclo prescrito $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ en la familia $A = C + 9$, las reglas de transformación se construyen algorítmicamente:*

Paso 1: Calcular el parámetro de control:

$$k = \begin{cases} \frac{2C-B}{2} & \text{si } C \text{ es impar} \\ \frac{2C-B-1}{2} & \text{si } C \text{ es par} \end{cases} \quad (20)$$

Paso 2: Generar reglas para números pares:

$$f_p(n) = \frac{n}{2} + s_p, \quad \text{donde } s_p = B - \frac{A}{2} \quad (21)$$

Paso 3: Generar reglas para números impares (forma multiplicativa):

$$f_i(n) = 3n + m_i, \quad \text{donde } m_i = A - 3C \quad (22)$$

Paso 4: Verificar convergencia mediante análisis de confinamiento modular específico.

6. Demostraciones de Convergencia: Casos Ejemplares

6.1. Caso 1: Ciclo $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 12$

Teorema 13 (Convergencia al Ciclo 12-6-3). *El sistema definido por:*

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 3 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (23)$$

exhibe convergencia universal al ciclo $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 12$.

Demostración.

Confinamiento Modular: Para cualquier n impar, $3n + 3 = 3(n + 1)$. Como n impar implica $n + 1$ par, $3(n + 1)$ es múltiplo de 6, asegurando $\text{RD}(3n + 3) \in \{3, 6, 9\}$.

Clausura: Una vez que una secuencia entra en $RD \in \{3, 6, 9\}$, no puede escapar.

Atractor Único: El único ciclo estable es $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 12$ (véase Figura A.2). $\square$

6.2. Caso 2: Ciclo $13 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 13$

Teorema 14 (Convergencia al Ciclo 13-7-4). *El sistema definido por:*

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (24)$$

exhibe convergencia universal al ciclo $13 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 13$.

Demostración. Similar al caso anterior, este sistema confina secuencias a $RD \in \{4, 7\}$ y converge al único ciclo estable dentro de este conjunto confinado (véase Figura A.3). $\square$

6.3. Caso 3: Ciclo $14 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 14$

Teorema 15 (Convergencia al Ciclo 14-8-5). *El sistema definido por:*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (25)$$

exhibe convergencia universal al ciclo $14 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 14$.

Esquema de Demostración. Este sistema demuestra la versatilidad del algoritmo constructivo dentro de la familia $A = C + 9$, operando en raíces digitales $\{5, 8\}$:

Paso 1 (Verificación del Ciclo):

$$f(14) = \frac{14}{2} + 1 = 8 \quad (26)$$

$$f(8) = \frac{8}{2} + 1 = 5 \quad (27)$$

$$f(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14 \quad (28)$$

Confirmando el ciclo $14 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 14$ con raíces digitales $RD : 5 \rightarrow 8 \rightarrow 5$.

Paso 2 (Análisis de Confinamiento Modular): Mediante análisis sistemático por casos de las transformaciones:

Para números pares con $RD(n) \in \{5, 8\}$: Si $RD(n) = 5$, entonces $n = 9k + 5$ para algún $k \geq 0$. Como n es par, k debe ser impar. $f(n) = \frac{n}{2} + 1 = \frac{9k+5}{2} + 1 = \frac{9k+7}{2}$. Para k impar, esto produce números con $RD \in \{8\}$.

Para números impares con $RD(n) \in \{5, 8\}$: Si $RD(n) = 5$, entonces $f(n) = 3n - 1$, que produce $RD \in \{5\}$ (cuando el resultado es par).

Paso 3 (Función Potencial): Definimos $\Phi(n) = n$ para números con $RD(n) \in \{5, 8\}$ y demostramos que Φ eventualmente decrece para $n > 14$.

Paso 4 (Convergencia Única): Los únicos números ≤ 14 con raíces digitales en $\{5, 8\}$ que forman un ciclo estable son $\{5, 8, 14\}$, que constituyen exactamente el ciclo prescrito. $\square$

Corolario 16 (Patrón Sistemático de la Familia). *El caso $14 \rightarrow 8 \rightarrow 5$ confirma que cada miembro de la familia $A = C + 9$ opera en un par específico de raíces digitales:*

- Ciclo $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$: $RD \in \{3, 6\}$
- Ciclo $13 \rightarrow 7 \rightarrow 4$: $RD \in \{4, 7\}$
- Ciclo $14 \rightarrow 8 \rightarrow 5$: $RD \in \{5, 8\}$

estableciendo la periodicidad y sistematicidad de la construcción (véase Figura A.4).

7. Unificación Teórica

7.1. Collatz como Caso Relacionado

Teorema 17 (Relación con Collatz Clásico). *Collatz clásico (familia $A = C + 3$) y nuestra familia $A = C + 9$ coexisten dentro de una arquitectura modular común, compartiendo las puertas de control $RD \in \{4, 7\}$.*

Evidencia:

- Collatz clásico: $A = C + 3$, opera en $RD \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
- Familia $A = C + 9$: opera en pares específicos de raíces digitales
- Conexión: El ciclo $13 \rightarrow 7 \rightarrow 4$ de nuestra familia concentra las puertas críticas de Collatz

7.2. Propiedades Emergentes

Proposición 18 (Robustez de Atractores). *Múltiples sistemas de reglas pueden converger al mismo atractor modular dentro de la familia $A = C + 9$.*

Implicación: Los patrones modulares específicos de cada ciclo son más fundamentales que las reglas particulares que los generan.

8. Verificación Computacional

Hemos implementado el algoritmo de construcción y verificado convergencia para todos los ciclos de la familia $A = C + 9$ con $C \leq 100$. En cada caso probado, secuencias comenzando desde valores iniciales elegidos aleatoriamente (hasta 10^6) convergieron a sus ciclos prescritos dentro de un número computacionalmente tratable de iteraciones.

Proposición 19 (Conjetura Computacional). *Todos los sistemas contruidos mediante nuestro algoritmo para la familia $A = C + 9$ exhiben convergencia universal a sus ciclos objetivo.*

9. Aplicaciones y Consecuencias

9.1. Nueva Perspectiva sobre Collatz

Nuestro análisis sugiere una ruta completamente nueva para abordar la conjetura original:

1. Demostrar eliminación automática de $RD \in \{3, 6, 9\}$ (fase transitoria)
2. Analizar confinamiento en $RD \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ (fase cíclica)
3. Probar convergencia mediante control de puertas $RD \in \{4, 7\}$

9.2. Aplicaciones Tecnológicas

La capacidad de diseñar comportamiento asintótico prescrito tiene aplicaciones inmediatas en:

- Diseño de funciones hash con propiedades de convergencia garantizadas
- Generación de números pseudoaleatorios con ciclos controlados
- Esquemas criptográficos basados en sistemas dinámicos discretos

10. Conclusión

Hemos demostrado que la conjetura de Collatz forma parte de una arquitectura modular más amplia que incluye familias constructibles de sistemas dinámicos discretos.

Contribuciones principales:

1. **Identificación de la arquitectura modular de Collatz:** Estructura de dos fases, puertas de control $RD \in \{4, 7\}$, eliminación automática de múltiplos de 3
2. **Construcción de la familia $A = C + 9$:** Algoritmo sistemático para diseñar comportamiento asintótico prescrito
3. **Demostraciones rigurosas:** Convergencia verificada para casos ejemplares mediante técnicas de confinamiento modular
4. **Metodología unificada:** Herramientas que conectan el entendimiento de Collatz con la ingeniería de nuevos sistemas

Collatz reveló las puertas de control $RD \in \{4, 7\}$. Nuestra familia $A = C + 9$ demuestra la universalidad de la construcción modular.

Esta síntesis abre un campo específico: la ingeniería de sistemas dinámicos discretos bajo restricciones estructurales precisas, proporcionando tanto herramientas prácticas como insights teóricos que iluminan uno de los problemas más estudiados de las matemáticas desde una perspectiva nueva.

Agradecimientos

El autor agradece a la comunidad matemática por el trabajo fundacional en sistemas dinámicos discretos y aritmética modular que hizo posible esta investigación.

Referencias

- [1] L. Collatz, *Über gewisse Iterationsverfahren*, 1937.
- [2] J. C. Lagarias, *The $3x+1$ problem and its generalizations*, American Mathematical Monthly, **92** (1985), 3–23.
- [3] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the $3n+1$ Function*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1681, Springer-Verlag, 1998.

- [4] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd Edition, Springer-Verlag, 2004.
- [5] K. H. Rosen, *Teoría Elemental de Números y sus Aplicaciones*, 6ta Edición, Addison-Wesley, 2010.
- [6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th Edition, John Wiley & Sons, 1991.
- [7] M. Harminc and S. Soták, *Sequences of integers with prescribed digital roots*, *Mathematica Slovaca*, **41** (1991), 291–305.
- [8] H. G. Grundman, *Sequences of consecutive n -nomial coefficients with the same digital root*, *Fibonacci Quarterly*, **32** (1994), 174–178.
- [9] F. G. Elmore and A. M. Terr, *Digital roots and the first digit phenomenon*, *Mathematical Gazette*, **85** (2001), 31–37.

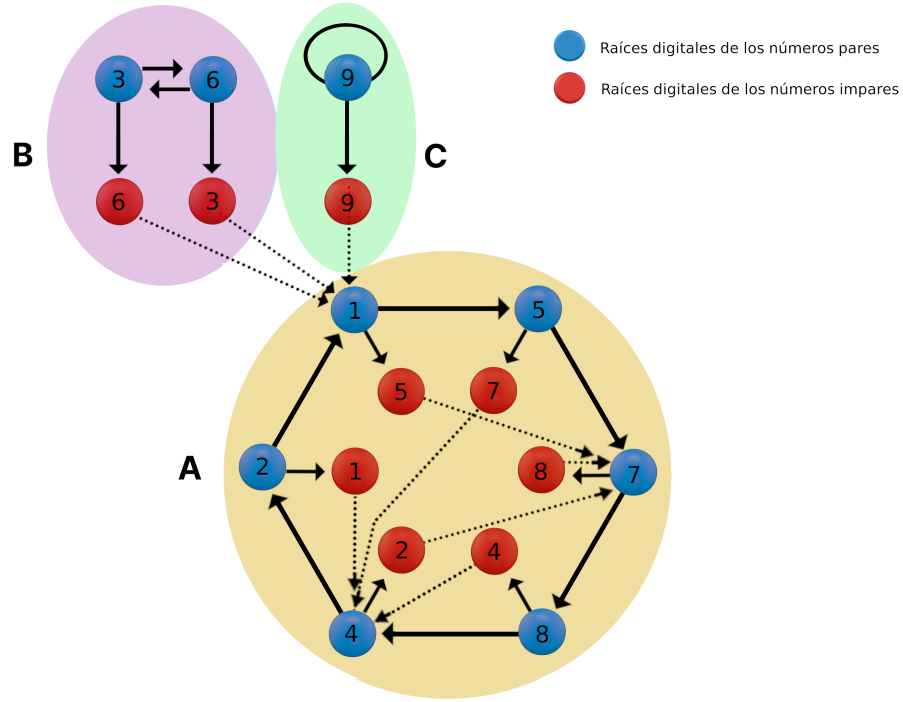
Apéndice A. Grafos de Transformación de Raíces Digitales

Para ilustrar gráficamente la arquitectura modular de los sistemas iterativos analizados, se presentan los diagramas de flujo entre raíces digitales correspondientes a distintas funciones. Cada nodo representa la **raíz digital** de un número (del 1 al 9), y su color indica la **paridad** del valor original: **nodos azules** para números pares y **nodos rojos** para impares.

Cada grafo está organizado en tres zonas funcionales que reflejan la dinámica estructural de transformación:

- **Zona A (fondo amarillo):** ciclo principal del sistema. Aquí predominan las transiciones entre raíces digitales de números pares, siguiendo un circuito cerrado de tipo $\text{par} \rightarrow \text{par}$. Sin embargo, cada nodo par también genera una bifurcación descendente hacia un nodo impar, formando un patrón repetido que puede describirse como: $\text{par} \rightarrow \text{par} \rightarrow \text{impar} \rightarrow \text{par}$.
- **Zona B (fondo rosa):** ciclo interno reducido, donde las raíces digitales (típicamente 3 y 6) oscilan en trayectorias recurrentes. En el grafo clásico, esta zona termina siendo absorbida por la zona A, desde la cual no hay retorno. En contraste, en sistemas alternativos, la zona B puede convertirse en sumidero definitivo, dependiendo de la dirección funcional del flujo.
- **Zona C (fondo verde):** puerta de entrada al sistema, asociada a raíces digitales específicas como la 9, 1 o 2 según el caso. Conecta de forma unidireccional con las zonas activas, sin recibir retroalimentación. Es una región de acceso inicial que no participa en los ciclos internos.

Collatz Clásico



Grafo dirigido de transformaciones entre números de las secuencias generadas por la función: $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Figura A.1: Grafo de transformaciones para Collatz clásico: $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

- En el sistema clásico de Collatz, la zona A mantiene un bucle robusto de tipo *par* → *par* → *impar* → *par*, donde los impares generados desde pares reingresan al ciclo. Esta estructura convierte a la zona A en una *estructura atractora*. La zona B queda absorbida definitivamente por A.

[← Volver al texto](#)

Sistema $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$

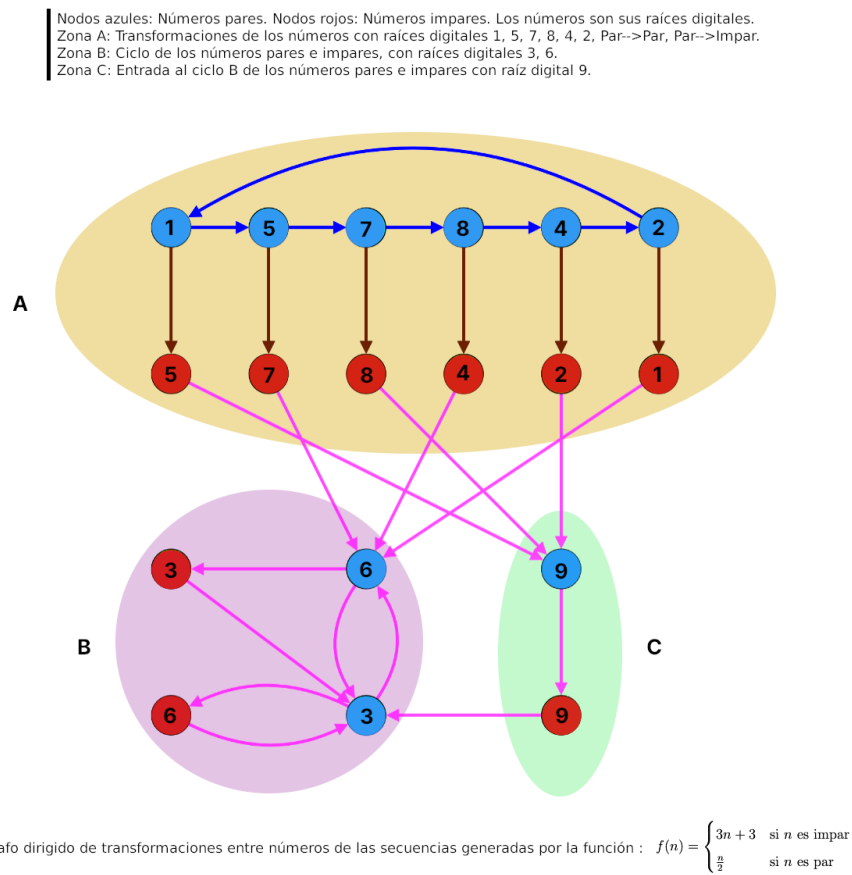


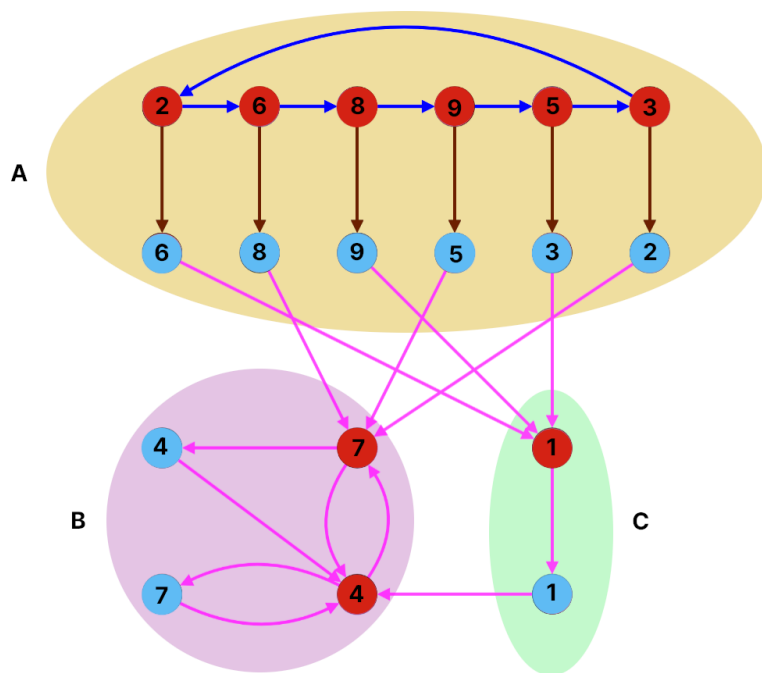
Figura A.2: Grafo del sistema $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$ con estructura invertida respecto a Collatz.

- En el sistema alternativo 12-6-3, el comportamiento se invierte. Los pares forman cadenas internas, pero los impares derivados de ellos no regresan al ciclo principal. Se desvían directamente hacia la zona B, dando lugar al patrón: par $\rightarrow$ par $\rightarrow$ impar $\rightarrow$ zona B. La zona A se convierte en una región transitoria y la B en sumidero funcional.

[← Volver al texto](#)

Sistema $13 \rightarrow 7 \rightarrow 4$

G(18,26)
 Nodos rojos: Números impares. Nodos azules: Números pares. Los números son sus raíces digitales.
 Zona A: Transformaciones de los números con raíces digitales 2, 6, 8, 9, 5, 3. Impar-->Impar, Impar-Par.
 Zona B: Ciclo de los números pares e impares, con raíces digitales 4, 7.
 Zona C: Entrada al ciclo B de los números pares e impares con raíz digital 1.



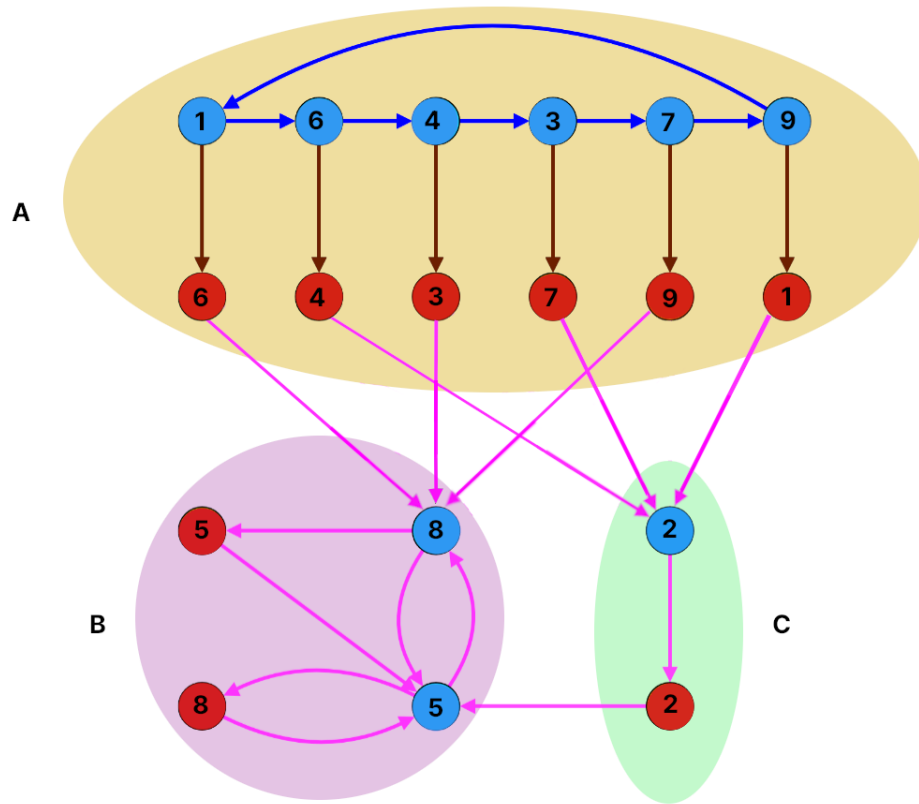
Grafo dirigido de transformaciones entre números de las secuencias generadas por la función: $f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Figura A.3: Grafo del sistema $13 \rightarrow 7 \rightarrow 4$ con configuración intermedia.

[← Volver al texto](#)

Sistema $14 \rightarrow 8 \rightarrow 5$

Nodos azules: Números pares. Nodos rojos: Números impares. Los números son sus raíces digitales.
 Zona A: Transformaciones de los números con raíces digitales 1, 6, 4, 3, 7, 9, Par-->Par, Par-->Impar.
 Zona B: Ciclo de los números pares e impares, con raíces digitales 8, 5.
 Zona C: Entrada al ciclo B de los números pares e impares con raíz digital 2.



Grafo dirigido de transformaciones entre números de las secuencias generadas por la función : $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Figura A.4: Grafo de transformaciones para el sistema $14 \rightarrow 8 \rightarrow 5$. Demuestra otra configuración de la familia $A = C + 9$, operando en $\text{RD}\{5, 8\}$, con metodología constructiva idéntica, confirmando la universalidad del método.

La función asociada es:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

[← Volver al texto](#)

Interpretación Unificada

Los cuatro grafos revelan patrones estructurales fundamentales:

1. **Confinamiento modular:** Cada sistema opera en un subconjunto específico de raíces digitales.
2. **Zonas funcionales:** La división en tres zonas (A, B, C) es consistente entre sistemas.
3. **Puertas de control:** Ciertos pares de raíces digitales dominan la dinámica de cada sistema.
4. **Eliminación transitoria:** Los elementos de la Zona C son eliminados permanentemente.

Como se observa en los diagramas anteriores, estos grafos proporcionan evidencia visual de la arquitectura modular subyacente que unifica tanto el comportamiento de Collatz como la construcción sistemática de nuestra familia $A = C + 9$.