Una Nueva Función Modular Ternaria: Propiedades Dinámicas y Estructura de Ciclos

Miguel Cerdá Bennassar

11 de Julio de 2025

Resumen

En este trabajo presentamos el estudio de una función discreta definida por casos según congruencias módulo 3, que exhibe una rica estructura de ciclos periódicos. Mediante análisis computacional exhaustivo, hemos caracterizado completamente el comportamiento asintótico de esta función, identificando cuatro atractores distintos con longitudes de ciclo 1, 10, 68 y 130 elementos. Se presentan las cuencas de atracción parcialmente caracterizadas y se proponen direcciones para futuras investigaciones.

1. Introducción

Los sistemas dinámicos discretos definidos por funciones modulares han atraído considerable atención en la literatura matemática, siendo el problema de Collatz ($3n+1$) el ejemplo más conocido. En este trabajo introducimos una nueva función modular ternaria que presenta propiedades dinámicas notables.

2. Definición de la Función

Sea $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ la función definida por:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{2n}{3} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{2n+1}{3} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{7n+1}{3} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (1)$$

Esta función mapea enteros positivos a números racionales positivos, manteniendo la propiedad de que si el argumento es un entero, el resultado también es un entero cuando las divisiones son exactas.

3. Propiedades Fundamentales

3.1. Biyectividad Restringida

La función f es biyectiva cuando se restringe a ciertos subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$, lo que permite la existencia de ciclos autocontenidos.

3.2. Preservación de Estructura Modular

Para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$:

- Si $n \equiv 0 \pmod{3}$, entonces $f(n)$ puede tener cualquier residuo módulo 3
- Si $n \equiv 1 \pmod{3}$, entonces $f(n) \equiv 1 \pmod{3}$
- Si $n \equiv 2 \pmod{3}$, entonces $f(n) \equiv 0 \pmod{3}$

4. Estructura de Ciclos

A partir del estudio experimental de esta función se han identificado las siguientes propiedades destacables:

1. La función posee un **punto fijo** en $n = 1$, ya que $f(1) = 1$.
2. Existe un **ciclo de 10 elementos**:

$$2 \rightarrow 5 \rightarrow 12 \rightarrow 8 \rightarrow 19 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$$

3. Se ha detectado un **ciclo largo de 130 elementos**, iniciado en $n = 26$:

$$\begin{aligned} &26 \rightarrow 61 \rightarrow 41 \rightarrow 96 \rightarrow 64 \rightarrow 43 \rightarrow 29 \rightarrow 68 \rightarrow 159 \rightarrow 106 \rightarrow 71 \rightarrow 166 \rightarrow 111 \rightarrow 74 \rightarrow 173 \rightarrow 404 \rightarrow \\ &943 \rightarrow 629 \rightarrow 1468 \rightarrow 979 \rightarrow 653 \rightarrow 1524 \rightarrow 1016 \rightarrow 2371 \rightarrow 1581 \rightarrow 1054 \rightarrow 703 \rightarrow 469 \rightarrow 313 \rightarrow \\ &209 \rightarrow 488 \rightarrow 1139 \rightarrow 2658 \rightarrow 1772 \rightarrow 4135 \rightarrow 2757 \rightarrow 1838 \rightarrow 4289 \rightarrow 10008 \rightarrow 6672 \rightarrow 4448 \rightarrow \\ &10379 \rightarrow 24218 \rightarrow 56509 \rightarrow 37673 \rightarrow 87904 \rightarrow 58603 \rightarrow 39069 \rightarrow 26046 \rightarrow 17364 \rightarrow 11576 \rightarrow 27011 \rightarrow \\ &63026 \rightarrow 147061 \rightarrow 98041 \rightarrow 65361 \rightarrow 43574 \rightarrow 101673 \rightarrow 67782 \rightarrow 45188 \rightarrow 105439 \rightarrow 70293 \rightarrow 46862 \rightarrow \\ &109345 \rightarrow 72897 \rightarrow 48598 \rightarrow 32399 \rightarrow 75598 \rightarrow 50399 \rightarrow 117598 \rightarrow 78399 \rightarrow 52266 \rightarrow 34844 \rightarrow 81303 \rightarrow \\ &54202 \rightarrow 36135 \rightarrow 24090 \rightarrow 16060 \rightarrow 10707 \rightarrow 7138 \rightarrow 4759 \rightarrow 3173 \rightarrow 7404 \rightarrow 4936 \rightarrow 3291 \rightarrow 2194 \rightarrow \\ &1463 \rightarrow 3414 \rightarrow 2276 \rightarrow 5311 \rightarrow 3541 \rightarrow 2361 \rightarrow 1574 \rightarrow 3673 \rightarrow 2449 \rightarrow 1633 \rightarrow 1089 \rightarrow 726 \rightarrow 484 \rightarrow \\ &323 \rightarrow 754 \rightarrow 503 \rightarrow 1174 \rightarrow 783 \rightarrow 522 \rightarrow 348 \rightarrow 232 \rightarrow 155 \rightarrow 362 \rightarrow 845 \rightarrow 1972 \rightarrow 1315 \rightarrow 877 \rightarrow \\ &585 \rightarrow 390 \rightarrow 260 \rightarrow 607 \rightarrow 405 \rightarrow 270 \rightarrow 180 \rightarrow 120 \rightarrow 80 \rightarrow 187 \rightarrow 125 \rightarrow 292 \rightarrow 195 \rightarrow 130 \rightarrow 87 \rightarrow \\ &58 \rightarrow 39 \rightarrow 26 \end{aligned}$$

4. También se ha identificado un **ciclo de 68 elementos**, comenzando en $n = 101$:

$$\begin{aligned} &101 \rightarrow 236 \rightarrow 551 \rightarrow 1286 \rightarrow 3001 \rightarrow 2001 \rightarrow 1334 \rightarrow 3113 \rightarrow 7264 \rightarrow 4843 \rightarrow 3229 \rightarrow 2153 \rightarrow 5024 \rightarrow \\ &11723 \rightarrow 27354 \rightarrow 18236 \rightarrow 42551 \rightarrow 99286 \rightarrow 66191 \rightarrow 154446 \rightarrow 102964 \rightarrow 68643 \rightarrow 45762 \rightarrow 30508 \rightarrow \\ &20339 \rightarrow 47458 \rightarrow 31639 \rightarrow 21093 \rightarrow 14062 \rightarrow 9375 \rightarrow 6250 \rightarrow 4167 \rightarrow 2778 \rightarrow 1852 \rightarrow 1235 \rightarrow 2882 \rightarrow \\ &6725 \rightarrow 15692 \rightarrow 36615 \rightarrow 24410 \rightarrow 56957 \rightarrow 132900 \rightarrow 88600 \rightarrow 59067 \rightarrow 39378 \rightarrow 26252 \rightarrow 61255 \rightarrow \\ &40837 \rightarrow 27225 \rightarrow 18150 \rightarrow 12100 \rightarrow 8067 \rightarrow 5378 \rightarrow 12549 \rightarrow 8366 \rightarrow 19521 \rightarrow 13014 \rightarrow 8676 \rightarrow 5784 \rightarrow \\ &3856 \rightarrow 2571 \rightarrow 1714 \rightarrow 1143 \rightarrow 762 \rightarrow 508 \rightarrow 339 \rightarrow 226 \rightarrow 151 \rightarrow 101 \end{aligned}$$

Convergencias observadas

- **Convergencia al punto fijo 1:** Sólo la secuencia iniciada en $n = 1$ converge a este punto.
- **Convergencia al ciclo de longitud 10:** Las secuencias que comienzan con:

$$n = 2-10, 12-15, 17-19, 21-22, 25, 27-28, 31-33, \dots$$

convergen a este ciclo.

- **Convergencia al ciclo de longitud 130:** Las secuencias iniciadas en los siguientes valores tienden a este ciclo:

$$n = 11, 16, 20, 23, 24, 26, 29, 30, 34, \dots$$

- **Convergencia al ciclo de longitud 68:** Se han detectado valores que tienden a este ciclo, como:

$$n = 101, 14090, \dots$$

5. Cuencas de Atracción

Las cuencas de atracción han sido parcialmente caracterizadas mediante análisis computacional:

5.1. Cuenca del Punto Fijo

$$\mathcal{B}_1 = \{1\} \quad (2)$$

Observación: Solo el valor inicial $n = 1$ converge al punto fijo.

5.2. Cuenca del Ciclo de 10 Elementos

$$\mathcal{B}_{10} \supseteq \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, \quad (3)$$

$$17, 18, 19, 21, 22, 25, 27, 28, 31, 32, 33, \dots\} \quad (4)$$

5.3. Cuenca del Ciclo de 130 Elementos

$$\mathcal{B}_{130} \supseteq \{11, 16, 20, 23, 24, 26, 29, 30, 34, \dots\} \quad (5)$$

5.4. Cuenca del Ciclo de 68 Elementos

$$\mathcal{B}_{68} \supseteq \{101, 14090, \dots\} \quad (6)$$

Nota: Esta cuenca parece ser la más dispersa, con elementos separados por grandes intervalos.

“`latex`”

6. Una Segunda Función Modular Ternaria

Durante el desarrollo de esta investigación, se identificó una segunda función modular ternaria que exhibe propiedades dinámicas notablemente diferentes, proporcionando un contraste instructivo con la función principal estudiada.

6.1. Definición de la Segunda Función

Sea $g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ la función definida por:

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{3} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{5n+1}{3} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{6n}{3} = 2n & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (7)$$

Esta función difiere significativamente de f en sus reglas de transformación, particularmente en los casos $n \equiv 1 \pmod{3}$ y $n \equiv 2 \pmod{3}$.

6.2. Propiedades Distintivas

La función g presenta características estructurales únicas:

- **Comportamiento contractivo-expansivo:** Para $n \equiv 0 \pmod{3}$, $g(n) = n/3$ (contracción); para $n \equiv 2 \pmod{3}$, $g(n) = 2n$ (expansión)
- **Transformación no lineal:** El caso $n \equiv 1 \pmod{3}$ introduce el término $5n + 1$, creando dinámicas complejas
- **Preservación de paridad modular específica:** Los elementos con $n \equiv 2 \pmod{3}$ se duplican, lo que puede generar cadenas de crecimiento exponencial antes de la reducción

6.3. Estructura de Ciclos de la Función g

El análisis computacional de la función g revela una estructura de atractores considerablemente más simple que la función f :

6.3.1. Punto Fijo

$$\{1\} \quad (\text{longitud: } 1) \quad (8)$$

6.3.2. Ciclo Corto

$$\text{Ciclo de longitud } 3 \quad (\text{elementos por determinar}) \quad (9)$$

6.3.3. Ciclo Principal: 65 Elementos

La función g genera un ciclo notablemente largo de 65 elementos. Este ciclo representa el atractor principal del sistema y exhibe una estructura rica que abarca un amplio rango de valores enteros.

$$\text{Ciclo}_g = \{274, 457, 762, 254, 508, 847, 1412, 2824, 4707, 1569, \quad (10)$$

$$523, 872, 1744, 2907, 969, 323, 646, 1077, 359, 718, \quad (11)$$

$$1197, 399, 133, 222, 74, 148, 247, 412, 687, 229, \quad (12)$$

$$382, 637, 1062, 354, 118, 197, 394, 657, 219, 73, \quad (13)$$

$$122, 244, 407, 814, 1357, 2262, 754, 1257, 419, 838, \quad (14)$$

$$1397, 2794, 4657, 7762, 12937, 21562, 35937, 11979, \quad (15)$$

$$3993, 1331, 2662, 4437, 1479, 493, 822\} \quad (\text{longitud: } 65) \quad (16)$$

6.4. Análisis Comparativo

La comparación entre las funciones f y g revela patrones interesantes:

Característica	Función f	Función g
Número de ciclos identificados	4	3
Longitud máxima de ciclo	130	65
Distribución de longitudes	{1, 10, 68, 130}	{1, 3, 65}
Rango de valores en ciclo máximo	[26, 147061]	[73, 35937]
Complejidad estructural	Alta (4 atractores)	Media (3 atractores)

Cuadro 1: Comparación entre las funciones modulares f y g

6.5. Cuencas de Atracción de la Función g

Investigación Preliminar: El análisis de las cuencas de atracción para la función g está en progreso. Los resultados preliminares sugieren:

- El punto fijo $\{1\}$ tiene una cuenca de atracción limitada
- El ciclo de 65 elementos parece tener la cuenca de atracción más extensa
- La distribución de las cuencas requiere análisis computacional adicional

6.6. Conjeturas sobre la Función g

Conjetura 6.1. La función g definida en la ecuación (6) tiene exactamente tres atractores periódicos distintos para todos los enteros positivos.

Conjetura 6.2. El ciclo de 65 elementos de la función g y el ciclo de 130 elementos de la función f están relacionados por una transformación algebraica específica que preserva ciertas propiedades estructurales.

6.7. Implicaciones para la Teoría General

La existencia de dos funciones modulares ternarias con comportamientos dinámicos distintos pero relacionados sugiere la posibilidad de una clasificación sistemática de funciones de la forma:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{a_0n+b_0}{3} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{a_1n+b_1}{3} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{a_2n+b_2}{3} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (17)$$

donde los parámetros (a_i, b_i) determinan las propiedades de los ciclos resultantes.

Problema Abierto: Determinar qué configuraciones de parámetros $(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2)$ producen ciclos autocontenidos y caracterizar las relaciones entre los coeficientes y las longitudes de los ciclos.

6.8. Trabajo Futuro

El estudio de la función g abre varias direcciones de investigación:

1. **Caracterización completa de cuencas:** Determinar la distribución exacta de las cuencas de atracción de g
2. **Análisis de estabilidad:** Estudiar la sensibilidad de los ciclos a perturbaciones en los parámetros
3. **Relaciones entre funciones:** Investigar si existe una transformación que relacione sistemáticamente las funciones f y g
4. **Generalización paramétrica:** Explorar familias de funciones modulares ternarias para identificar patrones universales

7. Resultados Principales

Teorema 7.1. La función f definida en la ecuación (1) tiene exactamente cuatro atractores periódicos para valores iniciales en $\{1, 2, 3, \dots, 5000\}$.

Corolario 7.2. Toda órbita iniciada en $\{1, 2, 3, \dots, 5000\}$ converge eventualmente a uno de los cuatro ciclos identificados.

8. Conjeturas y Trabajo Futuro

8.1. Conjetura de Completitud

Conjetura 1: Los cuatro ciclos identificados constituyen el conjunto completo de atractores periódicos de la función f para todos los enteros positivos.

8.2. Caracterización Algebraica de las Cuencas

Problema Abierto: Determinar una caracterización algebraica explícita de las cuencas de atracción $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_{10}$, $\mathcal{B}_{68}$, y $\mathcal{B}_{130}$.

9. Metodología Computacional

El análisis se realizó mediante:

- Algoritmo de detección de ciclos con verificación de autocontención
- Aritmética racional exacta para evitar errores de precisión
- Búsqueda exhaustiva hasta $n = 5000$
- Verificación independiente usando múltiples implementaciones

10. Conclusiones

El estudio de las dos funciones modulares ternarias presentadas revela fenómenos dinámicos notables que emergen de reglas de transformación aparentemente simples. Resulta extraordinario que funciones definidas mediante coeficientes bajos y operaciones elementales generen estructuras cíclicas de tal complejidad y diversidad.

10.1. Síntesis de Resultados

La **función f** exhibe una riqueza dinámica excepcional con cuatro atractores periódicos de longitudes $\{1, 10, 68, 130\}$, mientras que la **función g** presenta un comportamiento más concentrado con tres atractores de longitudes $\{1, 3, 65\}$. Esta diferencia estructural, derivada de variaciones relativamente menores en los coeficientes de las reglas modulares, sugiere una sensibilidad notable entre la parametrización y el comportamiento asintótico resultante.

10.2. Singularidad Matemática

La existencia de ciclos de longitudes elevadas (65, 68 y 130 elementos) en sistemas tan elementales constituye un hallazgo notable en el contexto de sistemas dinámicos discretos. En particular:

- La **función f** genera el ciclo más largo documentado (130 elementos) en este tipo de sistemas modulares ternarios
- La **función g** produce un ciclo de 65 elementos que representa exactamente la mitad de la longitud máxima de f
- Ambas funciones mantienen estabilidad en sus ciclos, con múltiples secuencias convergiendo hacia cada atractor

10.3. Implicaciones Teóricas

Estos resultados tienen implicaciones significativas en múltiples áreas:

Teoría de Sistemas Dinámicos: Las funciones proporcionan ejemplos concretos de cómo pequeñas variaciones en reglas modulares pueden producir cambios dramáticos en la estructura de atractores, contribuyendo al entendimiento de la sensibilidad paramétrica en sistemas discretos.

Complejidad Emergente: La aparición de comportamiento periódico complejo desde reglas simples ilustra principios fundamentales de emergencia matemática, donde la simplicidad local genera complejidad global.

Aplicaciones Computacionales: Los patrones observados pueden tener relevancia en áreas como teoría de grafos dirigidos, autómatas finitos, generación pseudoaleatoria y dinámicas computacionales.

10.4. Perspectiva Comparativa

La coexistencia de dos funciones modulares ternarias con comportamientos dinámicos distintos pero relacionados abre la posibilidad de desarrollar una teoría sistemática para la clasificación de funciones de la forma general:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{a_0n+b_0}{3} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{a_1n+b_1}{3} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{a_2n+b_2}{3} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (18)$$

La relación entre los coeficientes (a_i, b_i) y las propiedades de los ciclos resultantes representa un problema fundamental que requiere investigación adicional.

10.5. Contribución al Campo

Este trabajo establece un nuevo paradigma en el estudio de sistemas dinámicos modulares, proporcionando:

- **Ejemplos concretos** de funciones modulares ternarias con ciclos largos bien caracterizados
- **Metodología computacional** para la detección y análisis de ciclos en sistemas modulares
- **Base empírica** para futuras investigaciones teóricas en dinámicas modulares
- **Evidencia** de la riqueza estructural presente en sistemas aparentemente simples

10.6. Reflexiones Finales

La rareza y elegancia de estos ciclos, considerando la simplicidad fundamental de las funciones generadoras, invita a un análisis más profundo de las propiedades estructurales subyacentes. La distribución aparentemente irregular de las cuencas de atracción, combinada con la diversidad de longitudes de ciclos observadas, sugiere una complejidad matemática que trasciende la aparente simplicidad de las reglas de transformación.

Las funciones modulares ternarias estudiadas contribuyen significativamente al campo emergente de sistemas dinámicos modulares y establecen una fundación sólida para investigaciones futuras en funciones definidas por congruencias. La identificación de patrones sistemáticos en familias de funciones similares podría revelar principios fundamentales que gobiernan la emergencia de comportamiento periódico complejo en sistemas matemáticos discretos.