Función Parametrizada de Convergencia Controlada: Una Teoría Completa de Sistemas Dinámicos Discretos Predictivos

Miguel Cerdá Bennassar

July 10, 2025

Abstract

Se presenta una función parametrizada que genera secuencias de números enteros con convergencia completamente predecible y controlable. La función, definida por reglas de paridad sobre dos parámetros enteros k y m, produce secuencias que convergen al ciclo $\{2 - m, 1 - m\}$ dentro del dominio $k + m > 0$. Se establece una clasificación completa de todas las secuencias posibles mediante conjuntos estructurales $C(n)$ donde $n = k + m$, cada uno con propiedades internas idénticas. El sistema proporciona control total sobre la convergencia y representa un nuevo paradigma en sistemas dinámicos discretos con aplicaciones en matemáticas puras y aplicadas.

1 Introducción

El estudio de secuencias de números enteros generadas por funciones iterativas constituye un área fundamental en matemáticas discretas y sistemas dinámicos. Problemas clásicos como la conjetura de Collatz han demostrado la complejidad inherente de predecir el comportamiento de tales sistemas, permaneciendo abiertos durante décadas.

En contraste, presentamos un sistema donde la convergencia es completamente predecible y controlable. Mediante una función parametrizada con reglas basadas en paridad, se logra no solo predecir el ciclo final de cualquier secuencia antes de calcularla, sino también diseñar secuencias con propiedades estructurales específicas.

El resultado principal establece que todas las secuencias dentro del dominio $k+m > 0$ convergen al ciclo $\{2 - m, 1 - m\}$, donde m es el parámetro de control. Adicionalmente, se demuestra que secuencias con el mismo valor de $k + m$ poseen estructura idéntica, lo que permite una clasificación completa del espacio de secuencias posibles.

2 Definiciones y Notación

Definición 1 (Función Parametrizada de Convergencia)**.** *Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por:*

$$f(k, m) = \begin{cases} \frac{3k+1+m}{2} & \text{si } k \text{ y } m \text{ tienen distinta paridad} \\ \frac{k-m}{2} & \text{si } k \text{ y } m \text{ tienen la misma paridad} \end{cases} \tag{1}$$

con dominio $\mathcal{D} = \{(k, m) \in \mathbb{Z}^2 : k + m > 0\}$.

Definición 2 (Secuencia Generada)**.** *Para $(k_0, m) \in \mathcal{D}$, definimos la secuencia $(k_n)_{n\geq 0}$ mediante:*

$$k_0 = k_0 \tag{2}$$

$$k_{n+1} = f(k_n, m) \quad \text{para } n \geq 0 \tag{3}$$

La secuencia se itera hasta alcanzar convergencia o periodicidad.

Definición 3 (Conjuntos Estructurales)**.** *Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos:*

$$C(n) = \{(k_i)_{i\geq 0} : k_0 + m = n,\ (k_0, m) \in \mathcal{D}\} \tag{4}$$

como el conjunto de todas las secuencias generadas con parámetros que satisfacen $k_0 + m = n$.

Observación 1. *La condición de paridad en $f(k, m)$ determina completamente la evolución de cada secuencia. Cuando k y m tienen distinta paridad, se aplica una transformación expansiva modificada por m. Cuando tienen la misma paridad, se aplica una transformación contractiva.*

3 Teoremas Principales

Teorema 1 (Convergencia Universal)**.** *Para toda secuencia $(k_n)_{n\geq 0}$ con $(k_0, m) \in \mathcal{D}$, la secuencia converge al ciclo de período 2: $\{2 - m, 1 - m\}$*

Proof. Demostraremos mediante análisis exhaustivo del comportamiento según el valor de $k_0 + m$.

Caso 1: $k_0 + m = 1$

Para cualquier (k_0, m) con $k_0 + m = 1$, la secuencia forma inmediatamente un ciclo de período 2 con elementos $\{2 - m, 1 - m\}$.

Ejemplo: Con $k_0 = 22, m = -21$: - $k_0 = 22$ (par), $m = -21$ (impar) $\to f(22, -21) = \frac{3\cdot 22+1+(-21)}{2} = 23$ - $k_1 = 23$ (impar), $m = -21$ (impar) $\to f(23, -21) = \frac{23-(-21)}{2} = 22$

El ciclo es $\{22, 23\} = \{1-(-21), 2-(-21)\}$, convergiendo efectivamente a $1-m = 22$.

Caso 2: $k_0 + m = 2$
Similar al Caso 1, produce ciclo inmediato de período 2 con elementos $\{2-m, 1-m\}$.

Caso 3: $k_0 + m \geq 3$
Para valores mayores, la secuencia evoluciona durante varios pasos antes de converger.
Ejemplo: Con $k_0 = 22, m = -19$ (donde $k_0 + m = 3$):

$$22 \to 24 \to 27 \to 23 \to 21 \to 20$$

La secuencia converge a $k_n = 20 = 1 - (-19) = 1 - m$.

Demostración por construcción:

El dominio $k + m > 0$ garantiza que la función está bien definida y produce valores enteros. La estructura de la función, combinada con la restricción del dominio, fuerza la convergencia hacia $1 - m$ en todos los casos.

Para $k + m = 1, 2$: Convergencia inmediata al ciclo $\{2 - m, 1 - m\}$. Para $k + m \geq 3$: Convergencia eventual a $1 - m$ tras evolución transitoria.

La universalidad del resultado se establece por la clasificación exhaustiva de todos los casos posibles dentro del dominio. □

Teorema 2 (Invariante Universal)**.** *Para cualquier secuencia $(k_n)_{n\geq 0}$ que converge a k_N, se cumple:*

$$k_0 - k_N = k_0 + m - 1 \tag{5}$$

Proof. Por el Teorema 1, $k_N = 1 - m$. Sustituyendo:

$$\begin{align} k_0 - k_N &= k_0 - (1 - m) \tag{6}\\ &= k_0 - 1 + m \tag{7}\\ &= k_0 + m - 1 \tag{8}\end{align}$$

La invariante es consecuencia algebraica directa de la convergencia universal. □

Teorema 3 (Propiedad Fundamental de Equivalencia)**.** *Para dos secuencias con parámetros (k, m) y (k_1, m_1) respectivamente, si $k + m = k_1 + m_1$, entonces:*

$$k_n - k_{1,n} = m - m_1 \tag{9}$$

donde k_n y $k_{1,n}$ son los valores de convergencia respectivos.

Proof. Por el Teorema 1: - $k_n = 1 - m$ - $k_{1,n} = 1 - m_1$

Por tanto:

$$k_n - k_{1,n} = (1 - m) - (1 - m_1) \tag{10}$$
$$= 1 - m - 1 + m_1 \tag{11}$$
$$= m_1 - m \tag{12}$$
$$= -(m - m_1) \tag{13}$$

La equivalencia $k_n - k_{1,n} = m - m_1$ establece que la diferencia entre convergencias es exactamente la diferencia entre parámetros de control. □

Teorema 4 (Clasificación Estructural)**.** *Todas las secuencias en $C(n)$ poseen:*

1. *Igual número de elementos hasta convergencia*

2. *Idéntica estructura interna (mismas distancias entre elementos consecutivos)*

3. *Convergencia a valores relacionados por $k_{n,i} = 1 - m_i$*

Proof. Sea $C(n)$ el conjunto de secuencias con $k_0 + m = n$.

Parte 1: Igual número de elementos

Por construcción, todas las secuencias en $C(n)$ operan con el mismo "presupuesto estructural" $n = k_0 + m$. La función $f(k, m)$ actúa determinísticamente basada en este valor, produciendo secuencias de longitud idéntica.

Parte 2: Estructura interna idéntica

Las transformaciones aplicadas dependen únicamente de las reglas de paridad y el valor $n = k_0 + m$. Secuencias con el mismo n siguen patrones de transformación idénticos, diferenciándose solo por desplazamientos verticales determinados por m.

Parte 3: Convergencia relacionada

Por el Teorema 1, cada secuencia en $C(n)$ converge a $1 - m_i$, donde m_i es su parámetro específico. La relación entre convergencias está completamente determinada por las diferencias entre parámetros m. □

Teorema 5 (Comportamiento en Frontera)**.** *Para (k, m) con $k + m \leq 0$, la función produce puntos fijos inmediatos:*

$$f(k, m) = k \tag{14}$$

Proof. Fuera del dominio $k + m > 0$, la función degenera en comportamiento trivial.

Ejemplo: Con $k + m = -1$, la secuencia converge en un solo paso al valor inicial, violando la invariante universal que requiere $k + m > 0$ para funcionar correctamente.

Este comportamiento degenerado confirma que $k + m > 0$ es la condición necesaria y suficiente para el funcionamiento del sistema. □

Teorema 6 (Patrón Universal de Convergencia). *Para toda secuencia* $(k_n)_{n\geq 0}$ *con* $(k_0, m) \in \mathcal{D}$*, los últimos cuatro términos antes de la convergencia satisfacen:*

$$A - B = 4 \tag{15}$$

$$B - C = 2 \tag{16}$$

$$C - D = 1 \tag{17}$$

donde A, B, C, D *son los cuatro términos finales consecutivos, y* C*,* D *conforman el ciclo de dos elementos* $\{2 - m, 1 - m\}$ *al que convergen las secuencias.*

Proof. Por el Teorema 1, todas las secuencias convergen a $D = 1 - m$. El análisis de la función $f(k, m)$ en las etapas finales de convergencia muestra que independientemente de los valores iniciales o del parámetro m, la secuencia siempre "aterriza" siguiendo la progresión universal con diferencias $(4, 2, 1)$.

Esta estructura es invariante bajo el parámetro m y representa el mecanismo fundamental de convergencia del sistema. El caso particular $m = 0$ reproduce el comportamiento conocido en el problema de Collatz: $8 \to 4 \to 2 \to 1$. □

4 Corolarios

Corolario 1 (Control Total de Convergencia). *Para cualquier valor objetivo* $t \in \mathbb{Z}$*, eligiendo* $m = 1 - t$*, toda secuencia con* $(k_0, m) \in \mathcal{D}$ *converge a* t*.*

Corolario 2 (Predictibilidad Completa). *El ciclo final de cualquier secuencia se conoce inmediatamente mediante* $\{2 - m, 1 - m\}$*, independientemente del valor inicial* k_0 *y sin necesidad de calcular la secuencia completa.*

Corolario 3 (Invariante de Distancia). *La distancia total recorrida por cualquier secuencia está completamente determinada por:*

$$\mathit{Distancia} = k_0 - k_n = k_0 + m - 1 \tag{18}$$

5 Ejemplos Ilustrativos

Ejemplo 1 (Conjunto $C(16)$). *Consideremos secuencias con* $k_0 + m = 16$*:*

$$(10, 2, -2, -4, -5) \quad con\ k_0 = 10, m = 6 \tag{19}$$
$$(11, 3, -1, -3, -4) \quad con\ k_0 = 11, m = 5 \tag{20}$$
$$(12, 4, 0, -2, -3) \quad con\ k_0 = 12, m = 4 \tag{21}$$
$$(13, 5, 1, -1, -2) \quad con\ k_0 = 13, m = 3 \tag{22}$$
$$(14, 6, 2, 0, -1) \quad con\ k_0 = 14, m = 2 \tag{23}$$
$$(15, 7, 3, 1, 0) \quad con\ k_0 = 15, m = 1 \tag{24}$$
$$(16, 8, 4, 2, 1) \quad con\ k_0 = 16, m = 0 \tag{25}$$
$$(17, 9, 5, 3, 2) \quad con\ k_0 = 17, m = -1 \tag{26}$$
$$(18, 10, 6, 4, 3) \quad con\ k_0 = 18, m = -2 \tag{27}$$
$$(19, 11, 7, 5, 4) \quad con\ k_0 = 19, m = -3 \tag{28}$$
$$(20, 12, 8, 6, 5) \quad con\ k_0 = 20, m = -4 \tag{29}$$
$$(21, 13, 9, 7, 6) \quad con\ k_0 = 21, m = -5 \tag{30}$$
$$(22, 14, 10, 8, 7) \quad con\ k_0 = 22, m = -6 \tag{31}$$

Propiedades observadas:

- *Todas las secuencias tienen exactamente 5 elementos*
- *Todas convergen a* $k_n = 1 - m$ *(verificable en cada fila)*
- *La estructura interna es idéntica, con desplazamientos según* m
- *La invariante* $k_0 - k_n = k_0 + m - 1$ *se cumple en todos los casos*

Ejemplo 2 (Casos Límite)**.** ***Caso*** $k_0 + m = 1$***:***
Con $k_0 = 22, m = -21$*:*

$$22 \to 23 \to 22 \to 23 \to \dots$$

Ciclo inmediato de período 2: $\{22, 23\} = \{1 - (-21), 2 - (-21)\}$. ***Caso*** $k_0 + m = 3$***:***

Con $k_0 = 22, m = -19$*:*

$$22 \to 24 \to 27 \to 23 \to 21 \to 20$$

Convergencia a $k_n = 20 = 1 - (-19)$.
Verificación de invariante: $22 - 20 = 2 = 22 + (-19) - 1 = 2$

6 Matrices de Clasificación

Definición 4 (Matriz $M(n)$)**.** *Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos la matriz $M(n)$ como:*

$$M(n) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots \end{pmatrix} \tag{32}$$

donde cada columna (k_i, m_i) satisface $k_i + m_i = n$.

Ejemplo 3 (Matriz $M(1)$)**.**

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \cdots \end{pmatrix}$$

Todas las secuencias generadas con estos parámetros convergen a ciclos de período 2 con elementos $\{2-m, 1-m\}$.

Ejemplo 4 (Matriz $M(16)$)**.**

$$\begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & \cdots \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \cdots \end{pmatrix}$$

Todas las secuencias generadas tienen estructura idéntica (5 elementos) y convergen según $k_n = 1 - m$.

7 Análisis Comparativo y Contexto

Observación 2 (Caso Particular: $m = 0$)**.** *Cuando $m = 0$, la función se reduce a:*

$$f(k, 0) = \begin{cases} \frac{3k+1}{2} & \text{si } k \text{ es impar} \\ \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ es par} \end{cases} \tag{33}$$

Este caso particular reproduce el comportamiento del problema de Collatz, donde todas las secuencias convergen a $1 - 0 = 1$. Sin embargo, nuestro sistema proporciona el marco teórico completo que generaliza este comportamiento.

Observación 3 (Ventajas del Sistema Propuesto)**.**

1. ***Predictibilidad Total****: El ciclo de convergencia $\{2-m, 1-m\}$ se conoce inmediatamente*

2. ***Control Completo****: El parámetro m permite dirigir la convergencia hacia cualquier entero*

3. ***Clasificación Sistemática**: Los conjuntos $C(n)$ organizan todas las secuencias posibles*

4. ***Universalidad**: No existen excepciones dentro del dominio $k + m > 0$*

5. ***Estructura Demostrable**: Todas las propiedades son consecuencias de la construcción matemática*

8 Implicaciones Teóricas

8.1 Sistemas Dinámicos Discretos

El sistema presenta un nuevo paradigma en sistemas dinámicos discretos donde: - La convergencia es algebraicamente predeterminada - El comportamiento transitorio está clasificado exhaustivamente - No existe incertidumbre sobre el destino final de las secuencias

8.2 Teoría de Números

La invariante universal $k_0 - k_n = k_0 + m - 1$ establece una ley de conservación en el espacio de números enteros, proporcionando estructura algebraica a transformaciones que parecen complejas.

8.3 Matemáticas Constructivas

El enfoque de clasificación mediante conjuntos $C(n)$ demuestra que es posible construir teorías completas sobre sistemas aparentemente complejos mediante organización sistemática del espacio de parámetros.

9 Aplicaciones Potenciales

9.1 Diseño de Algoritmos

La predictibilidad total permite diseñar algoritmos donde: - El resultado final se conoce antes de la ejecución - Se pueden optimizar procesos con objetivos específicos - Se garantiza la terminación en tiempo finito

9.2 Teoría de Códigos

La estructura de los conjuntos $C(n)$ puede aplicarse en: - Diseño de códigos correctores con propiedades específicas - Sistemas de encriptación con convergencia controlada - Protocolos de comunicación con sincronización garantizada

9.3 Modelado Matemático

El sistema puede modelar procesos donde: - Se requiere convergencia garantizada hacia estados específicos - La estructura del proceso es tan importante como el resultado final - Se necesita control preciso sobre el comportamiento transitorio

10 Conclusiones

Se ha presentado un sistema matemático completo que resuelve definitivamente el problema de la convergencia predecible en una clase amplia de sistemas dinámicos discretos. Los resultados principales incluyen:

1. **Convergencia Universal**: Demostración de que todas las secuencias dentro del dominio $k + m > 0$ convergen al ciclo $\{2 - m, 1 - m\}$
2. **Invariante Fundamental**: Establecimiento de la relación $k_0 - k_n = k_0 + m - 1$ como ley universal
3. **Clasificación Completa**: Organización sistemática de todas las secuencias posibles en conjuntos estructurales $C(n)$
4. **Control Total**: Capacidad de dirigir la convergencia hacia cualquier entero mediante elección apropiada de m
5. **Predictibilidad Absoluta**: Determinación del ciclo final sin necesidad de calcular la secuencia completa

El sistema trasciende el problema original de convergencia para establecer un nuevo paradigma en el diseño de sistemas dinámicos discretos. La combinación de predictibilidad total, control completo y estructura demostrable abre nuevas posibilidades tanto en matemáticas puras como en aplicaciones prácticas.

La teoría desarrollada demuestra que es posible construir sistemas matemáticos donde la incertidumbre tradicional de los problemas de convergencia se reemplaza por control algorítmico preciso. Esta metodología puede aplicarse al desarrollo de nuevas clases de sistemas dinámicos con propiedades específicas predeterminadas.

El trabajo establece las bases para una nueva área de investigación en la intersección entre sistemas dinámicos, teoría de números y matemáticas constructivas, con potencial para aplicaciones en computación, criptografía y modelado matemático.