Lema de densidad 2-ádica en la trayectoria impar de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Noviembre de 2025, revisado en septiembre de 2026

Resumen

Se estudia una tabla que asigna a cada impar m la parte par de su trayectoria bajo la función clásica de Collatz: los valores $3m+1, (3m+1)/2, \ldots$ hasta el último par antes del siguiente impar. La longitud de esa *cola* es $r(m) = \nu_2(3m+1)$. Se demuestra que los impares con $r(m) = r$ forman una única clase módulo 2^{r+1}, de densidad $1/2^r$ entre los impares, y que la tabla tiene una estructura de bloques exacta: entre dos columnas consecutivas con cola de longitud al menos R hay siempre $2^{R-1} - 1$ columnas, cuyo perfil de longitudes es la sucesión $1 + \nu_2(i)$, idéntico en todos los bloques. En consecuencia, la longitud media de la cola es 2. Se precisa el alcance de estos hechos: describen la tabla, no las órbitas, y cualquier sucesión finita de colas la realizan enteros positivos. A continuación se agrupan los impares por su último par A en familias 4-ádicas $\mathcal{F}_A$; el mapa inducido sobre los últimos pares es conjugado de la aplicación de Siracusa, $\mathcal{F}_2$ es la única familia con autoenlace y la atracción de todas las familias hacia $\mathcal{F}_2$ es equivalente a la conjetura de Collatz.

1. Introducción

Sea m un número impar. Bajo la función clásica de Collatz, m va a $3m+1$, que es par, y a continuación se divide entre 2 hasta llegar de nuevo a un impar. Llamamos *cola* de m a la sucesión de pares

$$3m+1,\ \frac{3m+1}{2},\ \ldots,\ \frac{3m+1}{2^{r(m)-1}}, \qquad r(m) = \nu_2(3m+1),$$

donde $\nu_2(x)$ es el exponente de la mayor potencia de 2 que divide a x. La cola tiene exactamente $r(m)$ términos, y el siguiente impar es

$$S(m) = \frac{3m+1}{2^{r(m)}},$$

la *aplicación de Siracusa*. El último par de la cola es $2S(m)$.

La Figura 1 dispone estas colas en una tabla. Este escrito explica exactamente qué muestra esa tabla: con qué frecuencia aparece cada longitud de cola (Sección 3), cómo se organizan las columnas en bloques idénticos (Sección 4), qué dice y qué no dice la tabla sobre las órbitas (Sección 5) y cómo los valores repetidos de la tabla agrupan los impares en familias (Sección 6).

2. La tabla de colas

La tabla tiene una columna por cada impar $m = 2n+1$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$ En la cabecera figuran n y $2n+1$; debajo, la columna contiene la cola de m, de arriba abajo. Así:

- cada *columna* es la parte par de una trayectoria, y su altura es $r(m)$;

- la *fila* j (contando desde la primera fila de pares) contiene el término $(3m+1)/2^{j-1}$ de las columnas con $r(m) \geq j$, y está vacía en las demás.

Los rótulos $\equiv 4$ y $\equiv 2$ de las filas indican la clase módulo 6 de sus valores: la primera fila contiene $3m+1 = 6n+4$, y a partir de ahí las filas alternan valores $\equiv 2$ y $\equiv 4 \pmod 6$. En efecto, si un par es $\equiv 4 \pmod 6$, su mitad es $\equiv 2 \pmod 6$; y si un par $6k+2$ tiene mitad par, esta mitad $3k+1$ es $\equiv 4 \pmod 6$.

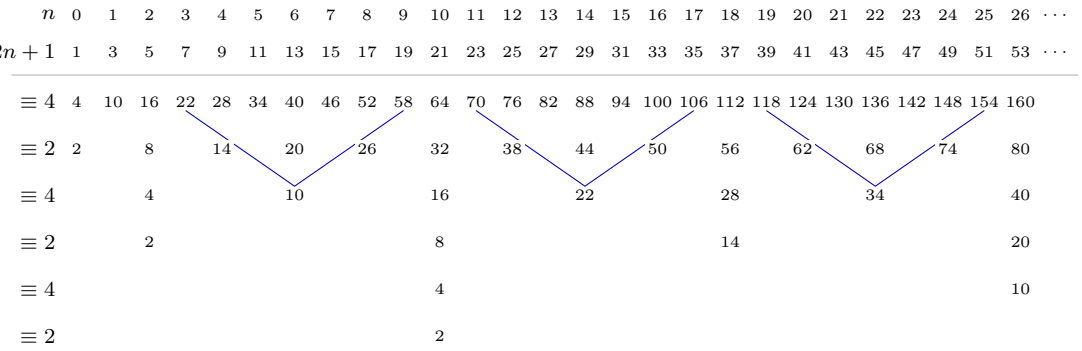

Figura 1: Tabla de colas de los impares $2n+1$, $0 \leq n \leq 26$; la tabla continúa indefinidamente hacia la derecha. Cada columna contiene la parte par de la trayectoria de $2n+1$ bajo la función clásica de Collatz, desde $3(2n+1)+1$ hasta el último par; los rótulos $\equiv 4$ y $\equiv 2$ indican la clase módulo 6 de los valores de cada fila. Cada uve señala un bloque de siete columnas consecutivas con el mismo perfil de alturas $1,2,1,3,1,2,1$, flanqueado por dos columnas de cola más larga, de longitud al menos 4 (Corolario 4.2). El vértice de cada uve es el último par de la columna central del bloque.

3. Densidad de las longitudes de cola

Lema 3.1 (Densidad 2-ádica)**.** *Sea* $r \geq 1$.

(a) Los enteros m *con* $\nu_2(3m+1) = r$ *forman exactamente una clase de congruencia módulo* 2^{r+1}*, formada por impares. Su densidad dentro de los impares es* $1/2^r$.

(b) Los enteros m *con* $\nu_2(3m+1) \geq r$ *forman exactamente una clase módulo* 2^r*, formada por impares. Su densidad dentro de los impares es* $1/2^{r-1}$.

Demostración. (a) La condición $\nu_2(3m+1) = r$ equivale a $3m+1 \equiv 2^r \pmod{2^{r+1}}$. Como 3 es invertible módulo 2^{r+1}, esta congruencia tiene una única solución m módulo 2^{r+1}. Como $r \geq 1$, se tiene $3m+1 \equiv 0 \pmod 2$, luego m es impar. Una clase módulo 2^{r+1} tiene densidad $1/2^{r+1}$ en los enteros, y los impares tienen densidad $1/2$; la densidad relativa es $1/2^r$.

(b) La condición $\nu_2(3m+1) \geq r$ equivale a $3m+1 \equiv 0 \pmod{2^r}$, que tiene una única solución módulo 2^r, impar por el mismo motivo. Su densidad relativa es $(1/2^r)/(1/2) = 1/2^{r-1}$. □

Las primeras clases del apartado (a) son $m \equiv 3 \pmod 4$ para $r=1$, $m \equiv 1 \pmod 8$ para $r=2$, $m \equiv 13 \pmod{16}$ para $r=3$ y $m \equiv 53 \pmod{64}$ para $r=5$; los impares con $r(m) \geq 4$ son los $m \equiv 5 \pmod{16}$.

Corolario 3.2 (Huecos en la tabla)**.** *(a) Dos impares consecutivos con* $r(m) = r$ *distan* 2^{r+1}*, y entre ellos hay exactamente* $2^r - 1$ *impares. En la tabla, las columnas que terminan en la fila* r *aparecen cada* 2^r *columnas.*

(b) La fila j está ocupada en una de cada 2^{j-1} columnas, con $2^{j-1}-1$ columnas vacías entre dos ocupadas.

Demostración. Es inmediato a partir del Lema 3.1, teniendo en cuenta que dos impares que distan $2d$ ocupan columnas que distan d. □

En la Figura 1, la fila 2 está ocupada en las columnas de índice par, la fila 3 en las columnas $n \equiv 2 \pmod 4$ y la fila 4 en las columnas $n \equiv 2 \pmod 8$. Las columnas que terminan exactamente en la fila 3 son las $n \equiv 6 \pmod 8$. Conviene distinguir los dos recuentos: la ocupación de la fila j corresponde a $r(m) \geq j$, con densidad $1/2^{j-1}$, mientras que el final de columna en la fila r corresponde a $r(m) = r$, con densidad $1/2^r$.

4. Estructura de bloques

La densidad no dice todavía cómo se ordenan las longitudes entre columna y columna. El resultado siguiente muestra que ese orden es rígido.

Proposición 4.1 (Bloques de la tabla)**.** *Sean $R \geq 2$ y m_0 un impar con $r(m_0) \geq R$. Entonces:*

(a) para $1 \leq i \leq 2^{R-1}-1$,

$$r(m_0 + 2i) = 1 + \nu_2(i);$$

(b) el siguiente impar con cola de longitud al menos R es $m_0 + 2^R$.

En particular, entre dos columnas consecutivas con cola de longitud al menos R hay exactamente $2^{R-1}-1$ columnas, y su perfil de longitudes,

$$1+\nu_2(1),\ 1+\nu_2(2),\ \ldots,\ 1+\nu_2(2^{R-1}-1),$$

es el mismo en todos los bloques. Este perfil es simétrico, todas sus longitudes son menores que R y su máximo, igual a $R-1$, se alcanza solo en la columna central, $i = 2^{R-2}$.

Demostración. Se tiene $3(m_0 + 2i) + 1 = (3m_0 + 1) + 6i$, con $\nu_2(3m_0 + 1) \geq R$ y $\nu_2(6i) = 1 + \nu_2(i)$. Si $1 \leq i \leq 2^{R-1}-1$, entonces $\nu_2(i) \leq R-2$, luego $\nu_2(6i) \leq R-1 < R$, y la valuación de la suma es la del sumando de menor valuación: $r(m_0 + 2i) = 1 + \nu_2(i)$. Esto prueba (a) y muestra que ninguna de esas columnas tiene cola de longitud al menos R. Para $i = 2^{R-1}$ ambos sumandos son divisibles por 2^R, luego $r(m_0 + 2^R) \geq R$, lo que prueba (b). La simetría se sigue de $\nu_2(i) = \nu_2(2^{R-1} - i)$ para $0 < i < 2^{R-1}$, y el máximo, de que $\nu_2(i) = R-2$ solo para $i = 2^{R-2}$ en ese intervalo. □

La sucesión $1+\nu_2(i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, es la llamada *sucesión regla*: $1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, \ldots$ La proposición no afirma que las alturas de la tabla, leídas desde la columna $n = 0$, sigan esa sucesión; de hecho empiezan $2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, \ldots$ Lo que afirma es que las columnas *interiores* de cada bloque, es decir, las situadas estrictamente entre dos columnas consecutivas con cola de longitud al menos R, tienen las alturas $1+\nu_2(1), \ldots, 1+\nu_2(2^{R-1}-1)$, las mismas en todos los bloques. Las columnas que delimitan los bloques quedan fuera de ese perfil y tienen colas de longitud variable. Para $R = 4$, las columnas interiores son las que señalan las uves de la Figura 1, y las que las delimitan son sus flancos.

Como el enunciado vale para todo R, el patrón se repite a todas las escalas: cada bloque de nivel R está formado por dos bloques de nivel $R-1$ separados por su columna central, de altura $R-1$.

Corolario 4.2 (Las uves de la figura)**.** *Las columnas con cola de longitud al menos* 4 *son las de* $m \equiv 5 \pmod{16}$*, es decir,* $n \equiv 2 \pmod 8$*. Entre dos consecutivas hay un bloque de siete columnas,* $n \equiv 3, 4, \ldots, 9 \pmod 8$*, con perfil de alturas*

$$1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 1,$$

idéntico en todos los bloques. La columna central, $n \equiv 6 \pmod 8$*, corresponde a* $m \equiv 13 \pmod{16}$ *y termina en la fila* 3 *con el último par*

$$\frac{3m+1}{4} = 10 + 12t \qquad (m = 13 + 16t),$$

de modo que los vértices de las uves son $10, 22, 34, 46, 58, \ldots$ *Las columnas de los flancos,* $m = 5 + 16t$*, tienen cola de longitud*

$$r(5 + 16t) = 4 + \nu_2(1 + 3t) \geq 4,$$

que no es constante: para $t = 0, 1, \ldots, 5$ *vale* $4, 6, 4, 5, 4, 8$*.*

Demostración. Es la Proposición 4.1 con $R = 4$. Para los flancos, $3(5+16t)+1 = 16(1+3t)$. □

Así, los bloques que señalan las uves son escrupulosamente iguales en longitud, mientras que las columnas que los separan tienen colas más largas y variables. Esas columnas de separación se ordenan a su vez según el mismo esquema a una escala mayor: basta aplicar la Proposición 4.1 con $R \geq 5$.

Proposición 4.3 (Longitud media de la cola)**.** *Para* $x \to \infty$*,*

$$\frac{1}{\#\{m \leq x \ \textit{impar}\}} \sum_{\substack{m \leq x \\ m \ \textit{impar}}} r(m) = 2 + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

Demostración. Se tiene

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ m \text{ impar}}} r(m) = \sum_{j \geq 1} \#\{m \leq x \text{ impar} : r(m) \geq j\}.$$

Por el Lema 3.1(b), el conjunto de la derecha es una clase módulo 2^j, con $x/2^j + \theta_j$ elementos en $[1, x]$, donde $|\theta_j| \leq 1$; y es vacío si $2^j > 3x + 1$. Sumando sobre los $O(\log x)$ valores relevantes de j se obtiene $x + O(\log x)$. Como hay $x/2 + O(1)$ impares en $[1, x]$, la media es $2 + O(\log x/x)$. □

Observación 4.4 (Interpretación heurística)*.* Cada paso impar multiplica aproximadamente por 3 y la cola divide por $2^{r(m)}$. Si a lo largo de una órbita las longitudes de cola aparecieran con las frecuencias de la tabla, el cambio logarítmico medio por paso impar sería

$$\log 3 - 2 \log 2 = \log \tfrac{3}{4} < 0,$$

y la órbita descendería en promedio. Para que haya descenso basta que la longitud media de cola supere $\log_2 3 \approx 1{,}585$; en la tabla vale 2. Esta es la base del modelo estocástico clásico [4]. Se trata de una heurística: la tabla describe todos los impares, no los que visita una órbita concreta.

5. Alcance: de la tabla a las órbitas

Los resultados anteriores son estáticos: describen la tabla completa, recorrida en el orden de los impares. Una órbita, en cambio, salta de columna en columna, y la tabla no dice en qué columnas cae. Dos hechos precisan este límite.

Proposición 5.1 (Rachas de colas unitarias)**.** *Sea m impar con $\nu_2(m+1) = k$. Entonces*

$$r(m) = r(S(m)) = \cdots = r(S^{k-2}(m)) = 1 \qquad y \qquad r(S^{k-1}(m)) \geq 2.$$

En consecuencia, toda racha de colas de longitud 1 en una órbita es finita, y su longitud es $\nu_2(m+1) - 1$, donde m es el primer impar de la racha.

Demostración. Si $\nu_2(m+1) = k \geq 2$, entonces $m \equiv 3 \pmod 4$, luego $r(m) = 1$ y $S(m) + 1 = \frac{3m+1}{2} + 1 = \frac{3}{2}(m+1)$, de modo que $\nu_2(S(m)+1) = k - 1$. Por inducción, tras $k-1$ pasos se llega a un impar m' con $\nu_2(m'+1) = 1$, es decir, $m' \equiv 1 \pmod 4$, para el que $r(m') \geq 2$. □

Por ejemplo, $m = 2^k - 1$ da una racha de $k - 1$ colas unitarias. Que cada racha sea finita no impide, por sí solo, que una órbita encadene rachas indefinidamente. El resultado siguiente, que se remonta a Terras [7] y es un caso particular del teorema de estructura de Kontorovich y Sinai [2], muestra que la información modular no basta para excluirlo.

Proposición 5.2 (Realización de sucesiones finitas de colas)**.** *Sean $r_1, \ldots, r_j \geq 1$ y $s = r_1 + \cdots + r_j$. Los impares m con*

$$r(m) = r_1,\ r(S(m)) = r_2,\ \ldots,\ r(S^{j-1}(m)) = r_j$$

forman exactamente una clase módulo 2^{s+1}, de densidad $1/2^s$ entre los impares.

Demostración. Por inducción en j. El caso $j = 1$ es el Lema 3.1(a). Supongamos el resultado para $(r_2, \ldots, r_j)$: la condición sobre $S(m)$ es $S(m) \equiv c \pmod{2^{s'+1}}$, con $s' = s - r_1$. Por el caso $j = 1$, los impares con $r(m) = r_1$ son $m = a + 2^{r_1+1}u$, $u \in \mathbb{Z}$, y para ellos

$$S(m) = \frac{3a + 1 + 3 \cdot 2^{r_1+1}u}{2^{r_1}} = S(a) + 6u.$$

La condición $S(a) + 6u \equiv c \pmod{2^{s'+1}}$, con $c - S(a)$ par, equivale a $3u \equiv (c - S(a))/2 \pmod{2^{s'}}$, que determina u módulo $2^{s'}$. Por tanto m queda determinado módulo $2^{r_1+1+s'} = 2^{s+1}$. La densidad es $(1/2^{s+1})/(1/2) = 1/2^s$. □

Observación 5.3. Por la Proposición 5.2, cualquier segmento finito de órbita con colas prescritas, por ejemplo una concatenación de rachas largas con longitud media de cola inferior a $\log_2 3$, lo realizan infinitos enteros positivos, aunque con densidad $1/2^s$, que tiende a cero al alargar el segmento. Por tanto, ninguna propiedad que dependa solo de los restos módulo potencias de 2 de un número finito de iterados puede excluir, por sí sola, que una órbita concatene indefinidamente comportamientos expansivos. Lo que la tabla establece es su escasez. Con argumentos de este tipo se prueba que casi todos los enteros descienden por debajo de su valor inicial [7, 1], y, de forma mucho más fina, que casi todas las órbitas alcanzan valores casi acotados [6]. Excluir esos comportamientos para todo entero positivo es el núcleo abierto del problema y queda fuera del alcance de este escrito.

6. Nodo de cierre par y familias 4-ádicas

En la Figura 1 algunos valores se repiten en columnas distintas: el 10 aparece al final de las columnas $n = 1$, 6 y 26; el 22 al final de las columnas $n = 3$ y 14. Esta sección explica esas repeticiones.

Definición 6.1 (Nodo de cierre par)**.** Para m impar, su *nodo de cierre par* es el último par de su cola,

$$A(m) = \frac{3m+1}{2^{r(m)-1}} = 2S(m).$$

Proposición 6.2 (Clases de los nodos de cierre)**.** *Para todo impar m se cumple $A(m) \equiv 2$ o $10 \pmod{12}$. Recíprocamente, todo $A \equiv 2, 10 \pmod{12}$ es nodo de cierre de algún impar.*

Demostración. $S(m)$ es impar, y no es múltiplo de 3 porque $3m + 1 \equiv 1 \pmod 3$. Luego $S(m) \equiv 1, 5 \pmod 6$ y $A(m) = 2S(m) \equiv 2, 10 \pmod{12}$. El recíproco se sigue de la Proposición 6.4, que da elementos explícitos de cada familia. □

Definición 6.3 (Familia asociada a un nodo)**.** Para $A \equiv 2, 10 \pmod{12}$, la *familia* de A es

$$\mathcal{F}_A = \{m \text{ impar} : A(m) = A\} = \{m \text{ impar} : S(m) = A/2\}.$$

Es decir, $\mathcal{F}_A$ es el conjunto de preimágenes impares de $A/2$ por la aplicación de Siracusa.

Proposición 6.4 (Descripción de las familias)**.** *(a) Si $A \equiv 10 \pmod{12}$, entonces*

$$\mathcal{F}_A = \left\{ \tfrac{A \cdot 4^k - 1}{3} : k \geq 0 \right\},$$

y sus elementos tienen colas de longitud $1, 3, 5, \ldots$

(b) Si $A \equiv 2 \pmod{12}$, entonces

$$\mathcal{F}_A = \left\{ \tfrac{2A \cdot 4^k - 1}{3} : k \geq 0 \right\},$$

y sus elementos tienen colas de longitud $2, 4, 6, \ldots$

En ambos casos, si m_A es el menor elemento, la familia es m_A, $4m_A{+}1$, $16m_A{+}5$, …, obtenida iterando $x \mapsto 4x + 1$. El menor elemento es $\equiv 3 \pmod 4$ en el caso (a) y $\equiv 1 \pmod 8$ en el caso (b); los demás son $\equiv 5 \pmod 8$.

Demostración. $A(m) = A$ equivale a $3m + 1 = A \cdot 2^s$ con $s = r(m) - 1 \geq 0$; al dividir $3m + 1$ entre 2^s se obtiene A. Para que m sea entero hace falta $A \cdot 2^s \equiv 1 \pmod 3$. Como $2 \equiv -1 \pmod 3$: si $A \equiv 1 \pmod 3$ (caso $A \equiv 10 \pmod{12}$), s debe ser par, $s = 2k$; si $A \equiv 2 \pmod 3$ (caso $A \equiv 2 \pmod{12}$), s debe ser impar, $s = 2k + 1$. Esto da las fórmulas y las longitudes de cola $r = s + 1$. En ambos casos los valores obtenidos son impares: para $s \geq 1$ porque $A \cdot 2^s - 1$ es impar, y para $s = 0$ porque $A = 10 + 12t$ da $(A - 1)/3 = 3 + 4t$. De la fórmula, $\frac{A \cdot 4^{k+1} - 1}{3} = 4 \cdot \frac{A \cdot 4^k - 1}{3} + 1$, y lo mismo en el caso (b). Por último, $A = 10 + 12t$ da $m_A = 3 + 4t \equiv 3 \pmod 4$; $A = 2 + 12t$ da $m_A = (2A - 1)/3 = 1 + 8t \equiv 1 \pmod 8$; y $4x + 1 \equiv 5 \pmod 8$ para x impar. □

En particular, $S(4m + 1) = S(m)$ para todo impar m. Algunas familias:

$$\mathcal{F}_2 = \{1, 5, 21, 85, \ldots\}, \quad \mathcal{F}_{10} = \{3, 13, 53, 213, \ldots\}, \quad \mathcal{F}_{14} = \{9, 37, 149, \ldots\},$$

$$\mathcal{F}_{22} = \{7, 29, 117, \ldots\}, \quad \mathcal{F}_{26} = \{17, 69, 277, \ldots\}, \quad \mathcal{F}_{34} = \{11, 45, 181, \ldots\}.$$

Observación 6.5 (Las familias en la tabla). Si $m = 2n+1$, entonces $4m+1 = 2(4n+2)+1$: el paso de un elemento de la familia al siguiente lleva la columna n a la columna $4n+2$ y alarga la cola en dos filas. Los valores repetidos de la Figura 1 son exactamente las familias. El 10 cierra las columnas $n = 1$, 6 y 26 (impares 3, 13 y 53) en las filas 1, 3 y 5. El 2 cierra las columnas $n = 0$, 2 y 10 (impares 1, 5 y 21) en las filas 2, 4 y 6, y el siguiente elemento de su familia, 85, cerraría la columna 42 en la fila 8. En particular, los vértices de las uves son nodos de cierre de familias del tipo (a).

Proposición 6.6 (Partición en familias). *Las familias $\mathcal{F}_A$, con $A \equiv 2, 10 \pmod{12}$, son no vacías, disjuntas dos a dos, y su unión es el conjunto de los impares positivos.*

Demostración. Cada impar m tiene un único nodo de cierre $A(m)$, determinado por la factorización única $3m + 1 = 2^r q$ con q impar. Por la Proposición 6.4, cada familia es no vacía. □

El mapa reducido sobre los nodos

Desde la familia $\mathcal{F}_A$, el impar siguiente es $q = A/2$, que pertenece a la familia de su propio nodo de cierre. Esto define el *mapa reducido*

$$\Phi(A) = A(A/2) = \frac{3A+2}{2^{\nu_2(3A+2)-1}}, \qquad A \equiv 2, 10 \pmod{12}.$$

La segunda expresión se obtiene de $3(A/2)+1 = (3A+2)/2$, cuya valuación es $\nu_2(3A+2)-1$. Por ejemplo, $\Phi(2) = 2$, $\Phi(10) = 2$, $\Phi(14) = 22$ y $\Phi(22) = 34$.

Proposición 6.7 (Conjugación con la aplicación de Siracusa). *Para todo $A \equiv 2, 10 \pmod{12}$ y todo $t \geq 0$,*

$$\Phi^t(A) = 2\, S^t(A/2).$$

En consecuencia, las órbitas del grafo de familias son las órbitas de la aplicación de Siracusa sobre los impares no múltiplos de 3, multiplicadas por 2.

Demostración. $\Phi(A) = A(A/2) = 2S(A/2)$, y se itera. □

Proposición 6.8 (Unicidad del autoenlace). *En el grafo de familias, $\mathcal{F}_2$ es la única familia con autoenlace, es decir, $\Phi(A) = A$ si y solo si $A = 2$.*

Demostración. Por la Proposición 6.7, $\Phi(A) = A$ equivale a $S(q) = q$ con $q = A/2$, es decir, a $3q + 1 = q \cdot 2^r$ para $r = r(q)$. Entonces $q(2^r - 3) = 1$, luego $q = 1$ y $r = 2$, es decir, $A = 2$. Recíprocamente, $\Phi(2) = 2$, que corresponde al ciclo $4 \to 2 \to 1$. □

La proposición excluye puntos fijos distintos de $A = 2$, pero no ciclos más largos del grafo de familias: por la Proposición 6.7, esos ciclos corresponderían exactamente a ciclos no triviales de la aplicación de Siracusa.

Proposición 6.9 (Equivalencia con la conjetura de Collatz). *Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(i) para todo $A \equiv 2, 10 \pmod{12}$ existe $t \geq 0$ con $\Phi^t(A) = 2$;

(ii) la conjetura de Collatz: toda trayectoria de un entero positivo alcanza el 1.

Demostración. (ii)⇒(i): la trayectoria de $A/2$ alcanza el 1, luego $S^t(A/2) = 1$ para algún t, y $\Phi^t(A) = 2$ por la Proposición 6.7. (i)⇒(ii): dado un entero positivo N, tras dividir entre 2 se llega a un impar m. Si $m = 1$, no hay nada que probar. En otro caso, $q = S(m)$ es impar y no múltiplo de 3, así que $A = 2q$ es un nodo; por (i) y la Proposición 6.7, $S^t(q) = 1$ para algún t, luego la trayectoria de N alcanza el 1. □

Por tanto, la atracción global hacia $\mathcal{F}_2$ no es una conjetura nueva, sino una reformulación de la conjetura de Collatz en el lenguaje de las familias.

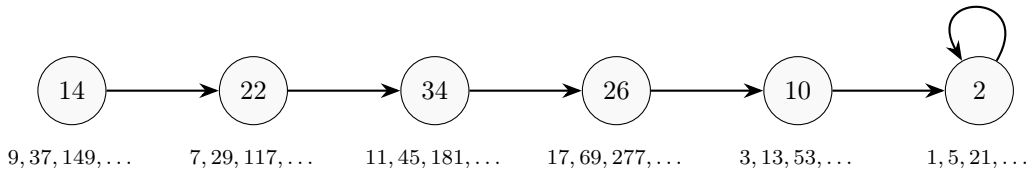

Figura 2: Un camino del grafo de familias: cada nodo A representa la familia $\mathcal{F}_A$, con sus primeros elementos debajo, y la flecha va de A a $\Phi(A)$. Por ejemplo, desde $\mathcal{F}_{14}$ el impar siguiente es 7, cuyo último par es 22. La familia $\mathcal{F}_2$ es la única con autoenlace, correspondiente al ciclo $4 \to 2 \to 1$.

7. Conclusión

La tabla de colas de la Figura 1 tiene una estructura completamente explícita. La longitud de cola r aparece con densidad $1/2^r$; las columnas se agrupan en bloques idénticos, con el perfil de la sucesión regla, entre columnas de cola más larga (Proposición 4.1), y las uves de la figura señalan esos bloques para $R = 4$. De ello se sigue que la longitud media de cola es 2, por encima del umbral $\log_2 3$ de la heurística de descenso.

Estos hechos describen la tabla, no las órbitas. Cada racha de colas unitarias es finita, pero cualquier sucesión finita de colas la realizan enteros positivos, con densidad que decrece exponencialmente con la suma de las colas. La tabla cuantifica así la escasez de los comportamientos expansivos, sin excluirlos.

Los valores repetidos de la tabla agrupan los impares en familias 4-ádicas $\mathcal{F}_A$, generadas por $x \mapsto 4x + 1$. El mapa inducido sobre los nodos de cierre es conjugado de la aplicación de Siracusa, $\mathcal{F}_2$ es la única familia con autoenlace, y la atracción de todas las familias hacia $\mathcal{F}_2$ es equivalente a la conjetura de Collatz.

A. Verificación computacional en el rango $A \leq 10^6$

Se iteró el mapa reducido Φ sobre todos los nodos

$$\mathcal{A}_{10^6} = \{A \leq 10^6 : A \equiv 2, 10 \pmod{12}\}, \qquad |\mathcal{A}_{10^6}| = 166\,667,$$

hasta alcanzar $A = 2$ o repetir un nodo distinto de 2. En todos los casos se alcanzó $A = 2$, sin ciclos alternativos. Sea $\tau(A)$ el menor t con $\Phi^t(A) = 2$; por la Proposición 6.7, $\tau(A)$ es el número de pasos de Siracusa que necesita $A/2$ para llegar a 1. Se obtuvo:

$$\max \tau = 166 \ \ (\text{en } A = 820\,022), \qquad \mathbb{E}[\tau] = 43{,}63,$$

con percentiles $P_{50} = 41$, $P_{75} = 58$, $P_{90} = 72$, $P_{95} = 81$ y $P_{99} = 101$; el 98,95 % de los nodos alcanza $A = 2$ en a lo sumo 100 iteraciones.

Por la Proposición 6.9, este cálculo equivale a verificar la conjetura de Collatz para los impares $q = A/2 \leq 5 \cdot 10^5$ no múltiplos de 3, un rango muy inferior al ya verificado [5]. Su interés es descriptivo: muestra la distribución de las longitudes de tránsito en el grafo de familias.

B. Conexión con las aplicaciones (d, g, h) de Kontorovich y Sinai

Kontorovich y Sinai [2] estudian una clase de aplicaciones tipo Collatz, las aplicaciones (d, g, h), que multiplican por g, suman una corrección periódica módulo d que hace el resultado divisible por d, y dividen por la mayor potencia posible de d. La aplicación de Siracusa corresponde a $d = 2$, $g = 3$ y corrección $+1$. Su teorema de estructura describe, para cada sucesión finita de exponentes, el conjunto de puntos iniciales que la realizan; en el caso de Siracusa es la Proposición 5.2. A partir de él demuestran que, en un sentido estadístico preciso, el logaritmo de las trayectorias se comporta como un paseo aleatorio con deriva

$$\mu = \log g - \frac{d}{d-1} \log d,$$

que para $(d, g) = (2, 3)$ vale $\log 3 - 2 \log 2 = \log \frac{3}{4}$. El factor $d/(d-1) = 2$ es exactamente la longitud media de cola de la Proposición 4.3, y la deriva coincide con el cambio logarítmico medio de la Observación 4.4. La tabla de colas es, en este sentido, la versión determinista y visible de la distribución de exponentes que subyace a ese resultado.

Referencias

[1] C. J. Everett, *Iteration of the number-theoretic function* $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+2$, Advances in Mathematics **25** (1977), 42–45.

[2] A. V. Kontorovich y Ya. G. Sinai, *Structure theorem for* (d, g, h)*-maps*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (N.S.) **33** (2002), 213–224. https://arxiv.org/abs/math/0601622

[3] J. C. Lagarias, *The* $3x + 1$ *problem and its generalizations*, American Mathematical Monthly **92** (1985), 3–23.

[4] J. C. Lagarias y A. Weiss, *The* $3x+1$ *problem: two stochastic models*, Annals of Applied Probability **2** (1992), 229–261.

[5] T. Oliveira e Silva, *Empirical verification of the* $3x + 1$ *and related conjectures*, en J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x + 1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010, 189–207.

[6] T. Tao, *Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values*, Forum of Mathematics, Pi **10** (2022), e12.

[7] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arithmetica **30** (1976), 241–252.