# Descenso tras dos rachas consecutivas en la dinámica de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

27 de octubre de 2026

**Resumen**

Se estudia la variación entre el primer impar de una racha de la función acelerada de Collatz y el primer impar que sigue a la racha siguiente. Cada par de rachas consecutivas queda descrito por cuatro enteros $(r, s, t, u)$: las longitudes de las dos rachas y las valoraciones 2-ádicas con que terminan. Para cada cuaterna se obtienen una identidad exacta, la clase de congruencia de los impares que la realizan y el menor de ellos. Se demuestra que, si $3^{r+t} < 2^{r+s+t+u}$, todos los impares de la clase descienden, salvo quizá el menor, y que este solo puede ser excepcional cuando la clase no requiere levantamiento. La prueba es elemental cuando $2^{r+s+t+u} \geq 2 \cdot 3^{r+t}$; en el caso restante se apoya en la cota de Ellison para $|2^x - 3^y|$ y en una comprobación finita. Para el menor representante sin levantamiento se demuestra que el entero auxiliar $h$ es impar y no supera $3^r$, y que, cuando la primera racha tiene longitud 1, el descenso se cumple siempre, salvo en $n = 1$. Con los mismos medios se demuestra el descenso de todos los impares de la clase cuando la primera racha tiene longitud 2 o 3. El caso $r \geq 4$ queda abierto.

## 1. Introducción y antecedentes

Para un entero positivo $n$, el vector de paridad de sus primeros $k$ iterados por la aplicación $x \mapsto (3x+1)/2$ si $x$ es impar y $x \mapsto x/2$ si $x$ es par determina $n$ módulo $2^k$, y cada vector de longitud $k$ corresponde a una única clase módulo $2^k$; es el teorema de Terras [6]. Tras esos $k$ pasos se obtiene un valor de la forma $\alpha n + \beta$, con $\alpha = 3^m/2^k$, donde $m$ es el número de pasos impares. Terras llamó tiempo de parada por coeficientes al menor $k$ con $\alpha < 1$ y conjeturó que coincide con el tiempo de parada, es decir, con el menor $k$ en que el iterado es menor que $n$. Garner [4] retomó esta conjetura y aplicó el mismo marco a acotar la longitud de los posibles ciclos no triviales. Lagarias [5, Teorema E] demostró, mediante las cotas de Baker y Fel'dman para formas lineales en logaritmos, que existe una constante efectivamente calculable $k_0$ tal que, si un vector de paridad es admisible (el coeficiente baja de 1 por primera vez en el paso $k$) y tiene longitud $k \geq k_0$, todos los elementos de su clase tienen tiempo de parada $k$, salvo quizá el menor.

En esta nota se considera el caso particular de dos rachas consecutivas de la función acelerada. El término aditivo tiene entonces una forma cerrada, lo que permite trabajar con la sola condición $3^{r+t} < 2^{r+s+t+u}$, sin exigir que el vector sea admisible, y con constantes explícitas: la cota de Ellison [3], ya empleada en [1], y una comprobación finita de dieciséis casos. El enunciado que resulta (teorema 5.4) tiene la misma forma que el de Lagarias: todos los impares de la clase descienden al final de las dos rachas, salvo quizá el menor. La sección 6 estudia ese menor elemento y resuelve el caso en que la primera racha tiene longitud 1. Las secciones 8 a 10 resuelven del mismo modo los casos $r = 2$ y $r = 3$, con comprobaciones finitas que pueden hacerse a mano.

## 2. Dos rachas consecutivas

Para $x$ impar positivo sea $T(x) = (3x+1)/2^{\nu_2(3x+1)}$ la función acelerada de Collatz, y sea $F(x) = (3x+1)/2$.

Todo impar $n$ se escribe de modo único como $n = 2^r a - 1$ con $r = \nu_2(n+1) \geq 1$ y $a$ impar. Se tiene $F^j(n) = 3^j 2^{r-j} a - 1$ para $0 \leq j \leq r$; estos valores son impares para $j < r$, y $F^r(n) = 3^r a - 1$ es par. En términos de $T$, los $r-1$ primeros pasos tienen exponente $\nu_2(3x+1) = 1$, y el $r$-ésimo tiene exponente $1+s$, donde

$$s = \nu_2(3^r a - 1) \geq 1.$$

Se llama *racha de longitud* $r$ a este tramo de $r$ pasos de $T$, y $s$ es su valoración de salida. El impar que la sigue es

$$b_1 = T^r(n) = \frac{3^r a - 1}{2^s} = 2^t c - 1, \qquad t = \nu_2(b_1+1) \geq 1, \quad c \text{ impar},$$

y empieza en él una segunda racha, de longitud $t$, con valoración de salida $u = \nu_2(3^t c - 1) \geq 1$. El impar final es

$$d = T^{r+t}(n) = \frac{3^t c - 1}{2^u}.$$

Se escribe en lo sucesivo

$$N = r+s+t+u, \qquad R = r+t, \qquad K = N - R = s+u,$$

$$D = 2^N - 3^R, \qquad E = 2^{s+t}(2^u - 1) + 3^t(2^s - 1).$$

El número total de divisiones por 2 entre $n$ y $d$ es $N$, y el de multiplicaciones por 3 es $R$.

**Proposición 2.1** (Identidad de dos rachas)**.** *Se tiene*

$$d = \frac{3^R a + 3^t(2^s - 1) - 2^{s+t}}{2^{s+t+u}}, \qquad 2^{s+t+u}(n-d) = Da - E.$$

*En particular, $d < n$ si y solo si $Da > E$.*

*Demostración.* De $3^r a - 1 = 2^s(2^t c - 1)$ se obtiene $2^{s+t}c = 3^r a + 2^s - 1$. Sustituyendo en $d = (3^t c - 1)/2^u$ resulta la primera fórmula. Multiplicando $n = 2^r a - 1$ por $2^{s+t+u}$ y restando el numerador de $d$ se obtiene $Da - E$. □

El impar $n = 1$ da la cuaterna $(1,1,1,1)$, con $D = E = 7$ y $d = n = 1$.

## 3. La clase de una cuaterna y su menor representante

Fijada una cuaterna $(r,s,t,u)$ de enteros positivos, se buscan los impares $a$ para los que $n = 2^r a - 1$ la realiza. La longitud $r$ es automática, pues $a$ es impar.

**Lema 3.1.** *Para $a$ impar, la congruencia*

$$3^r a \equiv 1 - 2^s \pmod{2^{s+t}}$$

*equivale a que $\nu_2(3^r a - 1) = s$ y $\nu_2(b_1+1) \geq t$.*

*Demostración.* La congruencia dice que $3^r a - 1 = 2^s(2^t c' - 1)$ para algún entero $c'$. Como $t \geq 1$, el factor $2^t c' - 1$ es impar, de modo que la valoración de $3^r a - 1$ es exactamente $s$, y entonces $b_1 + 1 = 2^t c'$. El recíproco es inmediato. □

Como $3^r$ es invertible módulo $2^{s+t}$, la congruencia del lema tiene una única solución $b$ con $1 \leq b < 2^{s+t}$, que es impar porque $1 - 2^s$ lo es. Se define el entero $h \geq 1$ por

$$3^r b + 2^s - 1 = 2^{s+t} h.$$

Los impares positivos que cumplen la congruencia son $a = b + 2^{s+t} j$ con $j \geq 0$, y para ellos $c' = h + 3^r j$.

**Lema 3.2.** *Sea $a = b + 2^{s+t} j$. La cuaterna de $n = 2^r a - 1$ es $(r, s, t, u)$ si y solo si*

$$3^t(h + 3^r j) - 1 \equiv 2^u \pmod{2^{u+1}}.$$

*Demostración.* Si la congruencia se cumple, $3^t c' - 1$ es par, porque $u \geq 1$; luego $c'$ es impar, la longitud de la segunda racha es exactamente $t$, con $c = c'$, y la valoración de $3^t c - 1$ es exactamente $u$. El recíproco es inmediato. □

**Proposición 3.3** (Levantamiento)**.** *Existe un único $j_0 \in \{0, 1, \ldots, 2^{u+1} - 1\}$ con*

$$j_0 \equiv 3^{-r}(3^{-t}(1 + 2^u) - h) \pmod{2^{u+1}},$$

*y los impares $a$ que realizan la cuaterna son exactamente*

$$a = b + 2^{s+t}(j_0 + 2^{u+1} k), \qquad k \geq 0.$$

*El menor es $a_0 = b + 2^{s+t} j_0$. Además $j_0 \equiv 1 - h \pmod 2$, y*

$$j_0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nu_2(3^t h - 1) = u.$$

*Demostración.* Por el lema 3.2, la condición es $3^{t+r} j \equiv 1 + 2^u - 3^t h \pmod{2^{u+1}}$, y 3 es invertible módulo $2^{u+1}$. Reduciendo módulo 2 se obtiene la paridad de $j_0$. La condición $j_0 = 0$ es la del lema 3.2 con $j = 0$. □

*Observación* 3.4. Los impares $n$ que realizan la cuaterna forman una clase módulo $2^{N+1}$. Es la clase que el teorema de Terras asocia al vector de paridad $1^r 0^s 1^t 0^u 1$, de longitud $N + 1$. Si $h$ es par, $j_0$ es impar y, por tanto, $j_0 \geq 1$.

## 4. Contracción fuerte

**Teorema 4.1.** *Si $2^N \geq 2 \cdot 3^R$, entonces $D\,2^{s+t} > E$. En consecuencia, todo impar de la clase de $(r, s, t, u)$ distinto de $2^r b - 1$ cumple $d < n$; si $j_0 \geq 1$, todos los impares de la clase cumplen $d < n$.*

*Demostración.* La hipótesis da $D \geq 2^{N-1}$ y $D \geq 3^R$. Luego

$$\frac{E}{D\,2^{s+t}} = \frac{2^u - 1}{D} + \frac{3^t(2^s - 1)}{D\,2^{s+t}} < \frac{2^u}{2^{N-1}} + \frac{3^t 2^s}{3^R 2^{s+t}} = 2^{1-r-s-t} + \frac{1}{3^r 2^t} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{6} < 1.$$

Todo $a$ de la clase distinto de $b$ cumple $a > 2^{s+t}$, y entonces $Da > D\,2^{s+t} > E$; basta aplicar la proposición 2.1. Si $j_0 \geq 1$, el propio $a_0$ es mayor que $2^{s+t}$. □

Esta prueba no usa ningún resultado diofántico.

# 5. El caso general

## 5.1. Reducción a una desigualdad en dos variables

Supóngase solo $D > 0$, es decir, $3^R < 2^N$. Dividiendo por $2^{s+t}$, la desigualdad $D\,2^{s+t} > E$ equivale a

$$D > f(s,t), \qquad f(s,t) = 2^{K-s} - 1 + \Big(\frac{3}{2}\Big)^t (1 - 2^{-s}). \tag{C}$$

**Proposición 5.1.** *Sean $R \geq 2$ y $K \geq 2$ con $D > 0$. Para $1 \leq t \leq R-1$ y $1 \leq s \leq K-1$,*

$$f(s,t) \leq M, \qquad M = 2^{K-1} - 1 + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{3}{2}\Big)^{R-1},$$

*y $M < 2^K$. En consecuencia, si $D \geq 2^K$, entonces $D\,2^{s+t} > E$ para toda cuaterna con esos valores de $R$ y $K$.*

*Demostración.* La función $f$ crece con $t$. Al pasar de $s$ a $s+1$ varía en

$$2^{-s-1}\Big(\Big(\frac{3}{2}\Big)^t - 2^K\Big) < 0,$$

porque $D > 0$ equivale a $2^K > (3/2)^R$, y $(3/2)^R > (3/2)^t$. El máximo se alcanza, por tanto, en $s = 1$, $t = R-1$, y vale $M$. Como $\frac{1}{2}(3/2)^{R-1} = \frac{1}{3}(3/2)^R < \frac{1}{3}2^K$, se tiene $M < 2^{K-1} + \frac{1}{3}2^K < 2^K$. □

## 5.2. La cota de Ellison

**Teorema 5.2** (Ellison [3, Teorema 3])**.** *Sea $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,16,19,27\}$. Para todo par de enteros positivos $(x,y)$ con $x \notin S$,*

$$|2^x - 3^y| > 2^x e^{-x/10}.$$

**Lema 5.3.** *Sean $R \geq 2$ y $3^R < 2^N$. Entonces $D \geq 2^K$. Además, $D \geq 2^{K+1}$, salvo si $(R,N)$ es $(2,4)$, $(3,5)$ o $(5,8)$.*

*Demostración.* Si $2^N \geq 2 \cdot 3^R$, entonces $D \geq 2^{N-1} \geq 2^{N-R+1} = 2^{K+1}$, porque $R \geq 2$.

En otro caso $3^R < 2^N < 2 \cdot 3^R$, es decir, $N = \lceil R \log_2 3 \rceil$. Como $2^{N-1} < 3^R < 4^R$, se tiene $N \leq 2R$. Si $N \geq 28$, el teorema 5.2 con $x = N$, $y = R$ da

$$D > 2^N e^{-N/10} \geq 2^N e^{-R/5} \geq 2^N 2^{1-R} = 2^{K+1},$$

donde la última desigualdad equivale a $R/5 \leq (R-1)\ln 2$, que se cumple porque $R - 1 \geq R/2$ y $\ln 2 > 2/5$. Si $N \leq 27$, entonces $3^R < 2^{27} < 3^{18}$, luego $R \leq 17$, y las dos desigualdades se comprueban directamente en la tabla 1: $D \geq 2^K$ en todos los casos, y $D \geq 2^{K+1}$ en todos salvo $R = 2, 3, 5$. □

| $R$ | $N$ | $D$ | $2^K$ | $R$ | $N$ | $D$ | $2^K$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 4 | 10 | 16 | 6 487 | 64 |
| 3 | 5 | 5 | 4 | 11 | 18 | 84 997 | 128 |
| 4 | 7 | 47 | 8 | 12 | 20 | 517 135 | 256 |
| 5 | 8 | 13 | 8 | 13 | 21 | 502 829 | 256 |
| 6 | 10 | 295 | 16 | 14 | 23 | 3 605 639 | 512 |
| 7 | 12 | 1 909 | 32 | 15 | 24 | 2 428 309 | 512 |
| 8 | 13 | 1 631 | 32 | 16 | 26 | 24 062 143 | 1 024 |
| 9 | 15 | 13 085 | 64 | 17 | 27 | 5 077 565 | 1 024 |

Cuadro 1: Valores de $D = 2^N - 3^R$ y $2^K$ con $N = \lceil R \log_2 3 \rceil$ para $2 \le R \le 17$.

Para $R = 1$ la desigualdad $D \ge 2^K$ no se cumple ($D = 1$, $2^K = 2$), pero ese caso no se presenta, porque $r, t \ge 1$.

### 5.3. Resultado principal

**Teorema 5.4.** *Sea $(r, s, t, u)$ una cuaterna de enteros positivos con $3^{r+t} < 2^{r+s+t+u}$. Todo impar $n$ de su clase distinto de $2^r b - 1$ cumple $d < n$. Si $j_0 \ge 1$, todos los impares de la clase cumplen $d < n$.*

*Demostración.* Se tiene $R \ge 2$ y $K \ge 2$. Por el lema 5.3, $D \ge 2^K$, y por la proposición 5.1, $D\, 2^{s+t} > E$. Se concluye como en el teorema 4.1. □

**Corolario 5.5.** *Si un impar $n$ con cuaterna $(r, s, t, u)$ cumple $3^{r+t} < 2^{r+s+t+u}$ y $d \ge n$, entonces $j_0 = 0$ y $n = 2^r b - 1$ es el menor impar de su clase.*

*Comentario* 5.6. El vector de paridad $1^r 0^s 1^t 0^u 1$ no tiene por qué ser admisible en el sentido de Lagarias: el coeficiente puede bajar de 1 antes del final de la segunda racha. El teorema 5.4 se refiere a la comparación de $n$ con $d$, no al tiempo de parada.

## 6. La familia sin levantamiento

Queda el caso $j_0 = 0$, en el que el menor impar de la clase es $n = 2^r b - 1$, con $a = b$ y $c = h$:

$$3^r b + 2^s - 1 = 2^{s+t} h, \qquad \nu_2(3^t h - 1) = u.$$

**Lema 6.1.** *Se tiene $1 \le h \le 3^r$. Si $j_0 = 0$, $h$ es impar.*

*Demostración.* Como $b < 2^{s+t}$, se tiene $2^{s+t} h < 3^r 2^{s+t} + 2^s$, es decir, $h < 3^r + 2^{-t}$, y por tanto $h \le 3^r$. La paridad se sigue de $j_0 \equiv 1 - h \pmod 2$. □

Así, para cada longitud $r$ de la primera racha, el entero $h$ del menor representante sin levantamiento solo puede tomar los valores impares $1, 3, \ldots, 3^r$.

**Proposición 6.2.** *Si $D > 0$, $j_0 = 0$ y $Db \le E$, entonces*

$$b < 2^t + \frac{3^t}{2^u}.$$

*Demostración.* Por el lema 5.3, $D \geq 2^K = 2^{s+u}$, luego

$$b \leq \frac{E}{D} \leq \frac{E}{2^{s+u}} = 2^t(1-2^{-u}) + \frac{3^t}{2^u}(1-2^{-s}) < 2^t + \frac{3^t}{2^u}. \qquad \square$$

**Teorema 6.3.** *Sea $(1,s,t,u)$ una cuaterna con $D>0$ y $j_0=0$, distinta de $(1,1,1,1)$. Entonces el impar $n=2b-1$ cumple $d<n$.*

*Demostración.* Por el lema 6.1, $h=1$ o $h=3$. Se tiene $R=t+1$ y $K=s+u$.

*Caso $h=3$.* La relación $3b+2^s-1=3\cdot 2^{s+t}$ exige que 3 divida a $2^s-1$, es decir, que $s$ sea par, y da

$$b = 2^{s+t} - \frac{2^s-1}{3}, \qquad n = 2b-1 = 2^{s+t+1} - \frac{2^{s+1}+1}{3}, \qquad d = \frac{3^{t+1}-1}{2^u}.$$

Multiplicando por $3\cdot 2^u$ se obtiene

$$3\cdot 2^u(n-d) = 3D - (2^{s+1}+1)2^u + 3.$$

Por el lema 5.3, $D \geq 2^{s+u}$, de modo que

$$3\cdot 2^u(n-d) \geq 3\cdot 2^{s+u} - 2^{s+u+1} - 2^u + 3 = (2^s-1)2^u + 3 > 0.$$

*Caso $h=1$.* La relación $3b = 2^s(2^t-1)+1$ exige que $2^s(2^t-1) \equiv 2 \pmod 3$, lo que obliga a que $t$ y $s$ sean impares. Como $t$ es impar, $3^t \equiv 3 \pmod 4$, y la condición $\nu_2(3^t-1)=u$ da $u=1$. Entonces $N=s+t+2$, $K=s+1$ y

$$n = \frac{2^{s+t+1} - 2^{s+1} - 1}{3}, \qquad d = \frac{3^t-1}{2}, \qquad 6(n-d) = D - 2^{s+2} + 1.$$

Como $R=t+1$ es par, $(R,N)$ no es $(3,5)$ ni $(5,8)$; y $(R,N)=(2,4)$ corresponde a $s=t=1$, es decir, a la cuaterna excluida $(1,1,1,1)$. En los demás casos el lema 5.3 da $D \geq 2^{K+1} = 2^{s+2}$, luego $6(n-d) \geq 1$. $\square$

Con el teorema 5.4, el teorema 6.3 da el resultado completo para las cuaternas con primera racha de longitud 1: si $D>0$, todos los impares de la clase de $(1,s,t,u)$ cumplen $d<n$, salvo $n=1$.

Los casos $r=2$ y $r=3$ se resuelven en las secciones 9 y 10; para $r \geq 4$ la cuestión queda abierta. Entre las 95 382 cuaternas con $D>0$ y $N \leq 44$ hay 2 851 con $j_0=0$; de ellas, solo 38 cumplen la desigualdad de la proposición 6.2, y todas satisfacen $Db > E$ salvo $(1,1,1,1)$. La simulación directa de todos los impares $n \leq 400\,000$ da el mismo resultado: el único impar con $D>0$ y $d \geq n$ es $n=1$.

## 7. Un ejemplo

Para $(r,s,t,u)=(1,1,4,2)$ se tiene $R=5$, $N=8$, de modo que $3^5 < 2^8 < 2\cdot 3^5$ y la cuaterna no está en la región de contracción fuerte. La congruencia del lema 3.1 da $b=21$ y $h=2$; la de la proposición 3.3 da $j_0=1$, y $a_0=53$. Los impares extremos son $n=105$, $b_1=79$ y $d=101$. Además $D=13 \geq 2^K=8$, $E=177$ y $Da_0 - E = 512 = 2^7(n-d)$.

## 8. Identidad auxiliar y restricción de las excepciones

**Proposición 8.1.** *Para un menor representante sin levantamiento, $j_0 = 0$, se tiene*

$$3^r 2^u (n - d) = hD - 2^{r+u}(2^s - 1) - 3^r(2^u - 1). \tag{1}$$

*Demostración.* De $3^r b = 2^s(2^t h - 1) + 1$ se deduce

$$3^r 2^u n = 2^u\big(2^r(2^{s+t}h - 2^s + 1) - 3^r\big), \qquad 3^r 2^u d = 3^r(3^t h - 1).$$

La resta da (1). □

**Lema 8.2.** *Si $D > 0$, $j_0 = 0$ y $d \geq n$, entonces*

$$h < 2^r + \frac{3^r}{2^s}.$$

*Si además $D \geq 2^{s+u+1}$, se tiene la restricción reforzada*

$$h < 2^{r-1} + \frac{3^r}{2^{s+1}}. \tag{2}$$

*Demostración.* Por (1) y $d \geq n$,

$$hD \leq 2^{r+u}(2^s - 1) + 3^r(2^u - 1) < 2^u(2^{r+s} + 3^r).$$

Basta dividir por $2^{s+u}$, cota de $D$ que da el lema 5.3, o por $2^{s+u+1}$ en el segundo caso. □

**Lema 8.3.** *Sea $r \geq 2$. Toda cuaterna $(r, s, t, u)$ con $D > 0$ y $j_0 = 0$ satisface $D \geq 2^{s+u+1}$.*

*Demostración.* Por el lema 5.3, solo es necesario examinar $(R, N) = (2, 4), (3, 5), (5, 8)$. Como $R = r + t \geq r + 1$, el primero no se presenta, y si $r \geq 5$ no se presenta ninguno. Para $r = 2$, los casos restantes exigen $(t, s, u) = (1, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$: la congruencia de integridad módulo 9 selecciona respectivamente $h = 7, 4, 6$ en $1 \leq h \leq 9$; el primero tiene $\nu_2(3h - 1) = 2 \neq 1$ y los otros dos son pares. Para $r = 3$ solo queda $(R, N) = (5, 8)$, es decir, $t = 2$ y $s + u = 3$. Si $(s, u) = (1, 2)$, la congruencia módulo 27 da $h = 17$, pero $\nu_2(9h - 1) = 3$; si $(s, u) = (2, 1)$, da $h = 12$, que es par. Para $r = 4$ solo queda también $(R, N) = (5, 8)$, con $t = 1$ y $s + u = 3$. Si $(s, u) = (1, 2)$, la congruencia módulo 81 da $h = 61$, pero $\nu_2(3h - 1) = 1$; si $(s, u) = (2, 1)$, da $h = 51$, pero $\nu_2(3h - 1) = 3$. En consecuencia, no aparece ninguna de las excepciones del lema 5.3. □

## 9. Descenso completo para la primera racha de longitud dos

**Teorema 9.1.** *Sea $(2, s, t, u)$ una cuaterna de enteros positivos con $3^{t+2} < 2^{s+t+u+2}$. Todo impar $n$ de su clase cumple $d < n$.*

*Demostración.* Por el teorema 5.4, basta estudiar $j_0 = 0$ y su menor representante. El lema 6.1 da $h \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Si $d \geq n$, los lemas 8.3 y 8.2 obligan a $h < 2 + 9/2^{s+1} \leq 17/4$; así, $h = 1$ o $h = 3$.

*Caso $h = 3$.* La integridad de $b = [2^s(3 \cdot 2^t - 1) + 1]/9$ exige

$$s \equiv 2 \pmod 6 \quad (t \text{ par}), \qquad s \equiv 4 \pmod 6 \quad (t \text{ impar}).$$

La desigualdad necesaria $3 < 2+9/2^{s+1}$ fuerza $s \le 2$. Luego $s = 2$, $t$ es par y $u = \nu_2(3^{t+1}-1) = 1$. La condición $D > 0$ equivale a $(3/2)^t < 32/9$, que obliga a $t = 2$. Se obtiene $b = 5$, $n = 19$ y $d = 13$, contradicción.

*Caso* $h = 1$. La congruencia $2^s(2^t - 1) \equiv -1 \pmod 9$ obliga a que $s, t$ sean impares; por tanto, $u = 1$. De (1) resulta

$$18(n - d) = D - 2^{s+3} - 1. \tag{3}$$

Para $t = 1$, la congruencia da $s \equiv 3 \pmod 6$, y el miembro derecho es $2^{s+3} - 28 > 0$. Sea $t \ge 3$. Si $2^N \ge 2 \cdot 3^R$, $D \ge 2^{N-1} = 2^{s+t+2} \ge 2^{s+5} > 2^{s+3} + 1$. En la región restante $3^R < 2^N < 2 \cdot 3^R$ se tiene $N \le 2R$. Para $N \ge 28$, Ellison da

$$D > 2^N e^{-N/10} \ge 2^{s+3}\, 2^t e^{-(t+2)/5} > 2^{s+4} > 2^{s+3} + 1,$$

pues $2^t e^{-(t+2)/5} > 2$ para todo $t \ge 3$. Finalmente, si $N < 28$, la congruencia módulo 9, $D > 0$ y la imparidad solo dejan en esta región el par $(t, s) = (11, 7)$. En él $D = 502\,829$ y $D - 2^{s+3} - 1 = 501\,804 > 0$. La comprobación finita se reproduce en el programa adjunto. Ambos casos llevan a $d < n$ y terminan la prueba. □

## 10. Descenso completo para la primera racha de longitud tres

**Teorema 10.1.** *Sea* $(3, s, t, u)$ *una cuaterna de enteros positivos con* $3^{t+3} < 2^{s+t+u+3}$. *Todo impar* $n$ *de su clase cumple* $d < n$.

*Demostración.* Por el teorema 5.4 basta el menor representante con $j_0 = 0$. En tal caso $h$ es impar, $1 \le h \le 27$, y

$$2^s(2^t h - 1) \equiv -1 \pmod{27}, \qquad \nu_2(3^t h - 1) = u. \tag{4}$$

Si $d \ge n$, los lemas 8.2 y 8.3 dan

$$h < 4 + \frac{27}{2^{s+1}}. \tag{5}$$

*Caso* $s \le 3$. Puesto que 2 tiene orden 18 módulo 27, la congruencia (4), junto con (5), deja exactamente las siguientes posibilidades:

| $s$ | $h$ | $t \pmod{18}$ |
|---|---|---|
| 1 | $1, 5, 7$ | $17, 12, 1$ respectivamente |
| 2 | 3 | $4, 10, 16$ |
| 3 | $1, 5$ | $13, 8$ respectivamente |

En cada una de estas clases $t$ tiene paridad fija y $h \cdot 3^t - 1$ es congruente módulo 8 con 2 o con 4, de modo que $u$ vale 1 o 2 y no depende de $t$. Como $D > 0$ equivale a $(3/2)^t < 2^{s+u+3}/27$, cuyo primer miembro crece con $t$, basta examinar el menor $t$ de cada clase. La condición $D > 0$ excluye así todas las clases salvo $(s, t, u, h) = (1, 1, 2, 7)$, cuyo menor representante es $n = 7$, con $d = 5 < n$.

*Caso* $s \ge 4$. La desigualdad (5) obliga a $h = 1$ o $h = 3$.

Si $h = 1$, la congruencia (4) obliga a que $s, t$ sean impares, por lo que $u = 1$. La identidad (1) se convierte en

$$54(n - d) = D - 2^{s+4} - 11. \tag{6}$$

Para $t = 1$, la congruencia exige $s \equiv 9 \pmod{18}$, de modo que $54(n-d) = 2^{s+4} - 92 > 0$. Si $t \geq 3$ y $2^N \geq 2 \cdot 3^R$, se tiene $D \geq 2^{N-1} = 2^{s+t+3} \geq 2^{s+6} > 2^{s+4} + 11$. En la región restante, $N \leq 2R$, y para $N \geq 28$ Ellison proporciona

$$D > 2^N e^{-N/10} \geq 2^{s+4}\, 2^t e^{-(t+3)/5} > 2^{s+5} > 2^{s+4} + 11,$$

porque $2^t e^{-(t+3)/5} > 2$ para $t \geq 3$.

Si $h = 3$, la congruencia (4) implica que $s$ es par. La identidad (1) toma la forma

$$27 \cdot 2^u (n-d) = 3D - 2^{u+3}(2^s - 1) - 27(2^u - 1). \tag{7}$$

Basta probar la condición suficiente $3D > 2^u(8 \cdot 2^s + 27)$. En la región fuerte,

$$\frac{3D}{2^{s+u}} \geq 3 \cdot 2^{t+2} \geq 24 > 8 + \frac{27}{2^s}.$$

En la restante, para $N \geq 28$, la cota de Ellison y $N \leq 2R$ dan

$$\frac{3D}{2^{s+u}} > 3 \cdot 2^{t+3} e^{-(t+3)/5} \geq 48 e^{-4/5} > 8 + \frac{27}{16} \geq 8 + \frac{27}{2^s}.$$

Así, también aquí $n > d$, sin necesidad de acotar $u$.

Quedan los casos con $s \geq 4$ y $N < 28$. La enumeración exacta de (4), imponiendo $1 \leq b < 2^{s+t}$, $D > 0$ y la valoración de $u$, da cuatro casos para $h = 1$ y ocho para $h = 3$, que recoge la tabla 2.

| $h$ | $s$ | $t$ | $u$ | $N$ | $n$ | $d$ | región |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 5 | 1 | 16 | 1 175 | 121 | fuerte |
| 1 | 9 | 1 | 1 | 14 | 151 | 1 | fuerte |
| 1 | 11 | 3 | 1 | 18 | 4 247 | 13 | fuerte |
| 1 | 15 | 7 | 1 | 26 | 1 233 047 | 1 093 | fuerte |
| 3 | 4 | 1 | 3 | 11 | 23 | 1 | fuerte |
| 3 | 4 | 7 | 5 | 19 | 1 815 | 205 | fuerte |
| 3 | 8 | 6 | 1 | 18 | 14 487 | 1 093 | fuerte |
| 3 | 8 | 12 | 1 | 24 | 931 991 | 797 161 | restante |
| 3 | 10 | 5 | 3 | 21 | 28 823 | 91 | fuerte |
| 3 | 14 | 2 | 1 | 20 | 53 399 | 13 | fuerte |
| 3 | 14 | 8 | 1 | 26 | 3 723 415 | 9 841 | fuerte |
| 3 | 16 | 3 | 4 | 26 | 446 615 | 5 | fuerte |

Cuadro 2: Menores representantes con $r = 3$, $j_0 = 0$, $D > 0$, $s \geq 4$, $h \in \{1, 3\}$ y $N < 28$.

En todos ellos $d < n$. Solo $(h, s, t, u) = (3, 8, 12, 1)$ pertenece a la región restante; los once demás están en la región fuerte y quedan cubiertos por los argumentos anteriores. Cada fila puede comprobarse por sustitución directa en $b = [2^s(2^t h - 1) + 1]/27$, $n = 8b - 1$ y $d = (3^t h - 1)/2^u$, y el programa `verificar_extension.py` las enumera con aritmética entera. Se concluye $d < n$ en todas las posibilidades. □

## 11. Verificación computacional

Acompañan a esta nota dos programas que usan aritmética entera exacta. El programa `verificar_dos_rachas.py` comprueba:

1. las desigualdades del lema 5.3 para $2 \le R \le 17$ y, como dato adicional, para $2 \le R \le 20\,000$;

2. la identidad de la proposición 2.1 y la equivalencia $d < n \iff Da > E$, simulando la función acelerada para todos los impares $n \le 400\,000$;

3. para todas las cuaternas con $N \le 44$, las propiedades de $b$, $h$ y $j_0$, la cota $h \le 3^r$, la cuaterna del menor representante y de su siguiente por simulación, la minimalidad de $a_0$ por fuerza bruta para $N \le 16$ y la desigualdad $D\,2^{s+t} > E$ cuando $D > 0$;

4. para las cuaternas $(1, s, t, u)$ con $D > 0$, $j_0 = 0$ y $N \le 160$, los valores de $h$, las paridades de $s$ y $t$, las identidades de la demostración del teorema 6.3 y el descenso;

5. los datos de la familia $j_0 = 0$ y el ejemplo de la sección 7.

El programa `verificar_extension.py` enumera, para $r = 2$ y $r = 3$, todos los menores representantes con $j_0 = 0$, $D > 0$ y $N < 28$, que son 101 y 82 respectivamente, y comprueba en cada uno la identidad de la proposición 2.1 y el descenso. Comprueba también que ninguna de las excepciones del lema 5.3 da una cuaterna con $j_0 = 0$ (lema 8.3), el caso $(t, s) = (11, 7)$ de la demostración del teorema 9.1 y, en la del teorema 10.1, los casos con $s \le 3$ y $N < 28$ y los doce casos con $s \ge 4$ y $N < 28$.

Las demostraciones dependen del cálculo en los puntos siguientes: los dieciséis valores de la tabla 1, los casos excepcionales del lema 8.3, el caso $(t, s) = (11, 7)$ del teorema 9.1 y los casos finitos del teorema 10.1. Todos pueden comprobarse a mano. Las demás comprobaciones solo sirven de control de las fórmulas y de los enunciados.

Como comprobación informativa, que no sustituye a la demostración de Ellison, el programa `verificar_dos_rachas.py` calcula también los $x \le 200$ para los que $|2^x - 3^y| \le 2^x e^{-x/10}$ con algún $y \ge 1$; resultan ser los elementos de $S$ salvo el 9. Los valores de la tabla 1 para $R = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ y 17 coinciden con los que da Ellison en su observación (a).

## 12. Conclusiones

Para cada par de rachas consecutivas de la función acelerada, descrito por la cuaterna $(r, s, t, u)$, la proposición 2.1 reduce la comparación entre el impar inicial $n$ y el impar final $d$ a la desigualdad $Da > E$, y la sección 3 determina la clase de los impares que realizan la cuaterna y su menor representante. Con estos dos elementos, el teorema 5.4 establece que, si $3^{r+t} < 2^{r+s+t+u}$, todos los impares de la clase cumplen $d < n$, salvo quizá el menor, y el corolario 5.5 precisa que este solo puede ser excepcional cuando $j_0 = 0$. La demostración es elemental en la región $2^N \ge 2 \cdot 3^R$ y, fuera de ella, solo requiere la cota de Ellison y la comprobación de los dieciséis valores de la tabla 1.

Para el menor representante sin levantamiento, el entero $h$ es impar y no supera $3^r$ (lema 6.1). Los teoremas 6.3, 9.1 y 10.1 muestran que, si $D > 0$ y la primera racha tiene longitud 1, 2 o 3, todos los impares de la clase descienden al final de la segunda racha, con la única excepción de $n = 1$. Las demostraciones de los dos últimos se apoyan en la identidad de la proposición 8.1, en la cota del lema 8.2, en la congruencia que fija $s$ módulo el orden de 2 módulo $3^r$ y en la cota de Ellison. Para $r \ge 4$ no se da aquí una demostración. En [2] se demuestra que, para cada $r$ fijo, la cuestión se reduce a una comprobación finita con cotas explícitas, y que esa comprobación no presenta ninguna excepción para $4 \le r \le 100$; queda abierto un tratamiento

uniforme en $r$. La sección siguiente recoge este problema y la posible extensión del método a más de dos rachas.

## 13. Cuestiones abiertas

**Problema 13.1.** Sea $r \geq 4$. ¿Es cierto que, para toda cuaterna $(r, s, t, u)$ con $D > 0$ y $j_0 = 0$, se cumple $Db > E$? Por los lemas 8.2 y 8.3, una excepción exige $h < 2^{r-1} + 3^r/2^{s+1}$, y el entero $h$ solo toma un número finito de valores impares. Esta restricción no reduce por sí sola el problema a una comprobación finita, porque para cada par $(r, h)$ quedan infinitas posibilidades para los exponentes $s$, $t$ y $u$. Con ayuda de la cota de Ellison, en [2] se demuestra que cada valor de $r$ se reduce a una comprobación finita, y esta se realiza para $r \leq 100$. Cabe preguntar si la cuestión admite un tratamiento uniforme en $r$.

**Problema 13.2.** La identidad de la proposición 2.1 se extiende a $m$ rachas consecutivas. Cabe preguntar si la condición $3^R < 2^N$, con $R$ la suma de las longitudes y $N$ el total de divisiones, basta también entonces para el descenso de todos los impares de la clase salvo el menor, y si la cota de Ellison sigue siendo suficiente para controlar el término aditivo.

## Referencias


[1] M. Cerdá Bennassar, *Una demostración del Lema Clave mediante la cota de Ellison*, Zenodo, 2026. doi:10.5281/zenodo.23530637.

[2] M. Cerdá Bennassar, *Reducción a una comprobación finita del menor representante sin levantamiento tras dos rachas de Collatz*, Zenodo, 2026. doi:10.5281/zenodo.23701864.

[3] W. J. Ellison, *On a theorem of S. Sivasankaranarayana Pillai*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1970–1971), exposé n.º 10, pp. 1–10. Disponible en `http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A10_0`.

[4] L. E. Garner, *On the Collatz* $3n + 1$ *algorithm*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), 19–22. doi:10.1090/S0002-9939-1981-0603593-2.

[5] J. C. Lagarias, *The* $3x+1$ *problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.

[6] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. **30** (1976), 241–252. doi:10.4064/aa-30-3-241-252.