Reducción a una comprobación finita del menor representante sin levantamiento tras dos rachas de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

27 de octubre de 2026

Resumen

En un escrito anterior se demostró que, si $3^{r+t} < 2^{r+s+t+u}$, todos los impares de la clase de una cuaterna (r, s, t, u) de dos rachas consecutivas de la función acelerada de Collatz descienden al final de la segunda racha, salvo quizá el menor, y que este solo puede ser excepcional cuando la clase no requiere levantamiento. Allí se resolvieron los casos en que la primera racha tiene longitud $r = 1, 2, 3$. Aquí se demuestra que, para cada r fijo, la cuestión se reduce a examinar un conjunto finito y explícito de pares de exponentes (s, t), cuyas cotas dependen solo de r. La reducción usa la identidad auxiliar del escrito anterior, la cota de Ellison para $|2^x - 3^y|$ y una fórmula exacta para la rama $t = h = 1$. La comprobación de ese conjunto para $1 \le r \le 100$ no presenta más excepción que $n = 1$. Las cotas crecen linealmente con r, de modo que el método no da un resultado uniforme; se explica dónde está el obstáculo.

1. Introducción

Este escrito continúa [1], cuya notación se conserva. Para un impar n, la cuaterna (r, s, t, u) recoge las longitudes r y t de dos rachas consecutivas de la función acelerada $T(x) = (3x + 1)/2^{\nu_2(3x+1)}$ y sus valoraciones de salida s y u; $d = T^{r+t}(n)$ es el impar con que termina la segunda racha, y se escribe

$$N = r + s + t + u, \qquad R = r + t, \qquad D = 2^N - 3^R, \qquad E = 2^{s+t}(2^u - 1) + 3^t(2^s - 1).$$

El teorema 5.4 de [1] establece que, si $D > 0$, todos los impares de la clase de la cuaterna cumplen $d < n$, salvo quizá el menor, y que este solo puede ser excepcional cuando el levantamiento j_0 es nulo. Los teoremas 6.3, 9.1 y 10.1 del mismo escrito excluyen esa posibilidad cuando $r = 1$, salvo en $n = 1$, y cuando $r = 2$ o $r = 3$. El problema 13.1 pregunta qué ocurre para $r \ge 4$.

Aquí se demuestra que, para cada r, las cuaternas que podrían ser excepcionales tienen los exponentes s y t acotados por cantidades explícitas que solo dependen de r (teorema 3.3). La cuestión queda así reducida, para cada r, a una comprobación finita, que se ha realizado para $1 \le r \le 100$ (sección 4). Las cotas crecen linealmente con r, y la sección 5 explica por qué el argumento no se extiende a todos los r a la vez.

2. Resultados previos

Sea (r,s,t,u) una cuaterna con $j_0=0$. Su menor representante es $n=2^rb-1$, donde b es la única solución impar, con $1\le b<2^{s+t}$, de $3^rb\equiv 1-2^s \pmod{2^{s+t}}$, y el entero h se define por

$$3^rb+2^s-1=2^{s+t}h. \tag{1}$$

Por la proposición 3.3 y el lema 6.1 de [1], h es impar, $1\le h\le 3^r$ y $u=\nu_2(3^th-1)$. Recíprocamente, fijados r, s y t, la congruencia determina b y h; si h es impar, el número $u=\nu_2(3^th-1)\ge 1$ define la única cuaterna (r,s,t,u) con $j_0=0$ asociada a ese par (s,t). Las cuaternas con $j_0=0$ corresponden, por tanto, a los pares (s,t) con h impar.

En ese caso $d=(3^th-1)/2^u$, y la proposición 8.1 de [1] da

$$3^r2^u(n-d)=hD-2^{r+u}(2^s-1)-3^r(2^u-1). \tag{2}$$

Se usará también la cota de Ellison.

Teorema 2.1 (Ellison [2, Teorema 3])**.** *Sea* $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,16,19,27\}$. *Para todo par de enteros positivos* (x,y) *con* $x\notin S$,

$$|2^x-3^y|>2^xe^{-x/10}.$$

3. La reducción

Lema 3.1. *Sea* (r,s,t,u) *una cuaterna con* $D>0$ *y* $j_0=0$. *Si* $d\ge n$, *entonces*

$$hD<2^{N-t}\Big(1+\frac{3^r}{2^{r+s}}\Big).$$

Demostración. Por (2), $d\ge n$ implica

$$hD\le 2^{r+u}(2^s-1)+3^r(2^u-1)<2^{r+s+u}+3^r2^u.$$

Como $N-t=r+s+u$, el segundo miembro es $2^{N-t}(1+3^r/2^{r+s})$. □

Lema 3.2. *Si* (r,s,t,u) *tiene* $j_0=0$, $t=1$ *y* $h=1$, *entonces* $u=1$ *y*

$$2\cdot 3^r(n-d)=2^{r+s+1}+2^{r+1}-4\cdot 3^r.$$

Demostración. Se tiene $u=\nu_2(3-1)=1$, $R=r+1$, $N=r+s+2$ y $D=2^{r+s+2}-3^{r+1}$. Sustituyendo en (2),

$$2\cdot 3^r(n-d)=2^{r+s+2}-3^{r+1}-2^{r+1}(2^s-1)-3^r=2^{r+s+1}+2^{r+1}-4\cdot 3^r.$$ □

Para $r=2$ y $r=3$ esta fórmula da $18(n-d)=2^{s+3}-28$ y $54(n-d)=2^{s+4}-92$, que son las identidades que aparecen en los teoremas 9.1 y 10.1 de [1].

Fijado $r\ge 1$, sea $c_r=1+3^r/2^{r+1}$ y defínanse

$$T_F=\max\{t\ge 1:\ 2^{t-1}<c_r\},\qquad T_W=\max\{t\ge 1:\ 2^te^{-(r+t)/5}<c_r\},$$
$$s_1=\min\{s\ge 1:\ 2^{r+s+1}+2^{r+1}>4\cdot 3^r\},\qquad S_0=\min\{s\ge 0:\ 2^{r+s}\ge 3^r\}.$$

Los dos máximos existen: $t=1$ cumple ambas condiciones, porque $c_r\ge 7/4$ y $2e^{-(r+1)/5}<3/2$, y los primeros miembros tienden a infinito, pues $2e^{-1/5}>1$; por la misma razón, el conjunto que define T_W es un intervalo. Además, como $e^{1/5}<\sqrt{2}$, se tiene $2^te^{-(r+t)/5}>2^{(t-r)/2}$, y como $c_r<2^{r+1}$, la condición que define T_W falla para $t\ge 3r+3$; por tanto, $T_W\le 3r+2$.

Teorema 3.3. *Sea $r \geq 1$ y sea (r, s, t, u) una cuaterna con $D > 0$, $j_0 = 0$ y $d \geq n$. Entonces*

$$t \leq T := \max(26,\, T_F,\, T_W), \qquad s \leq S := \max(26,\, r + T_W,\, s_1,\, S_0).$$

Demostración. Se distinguen tres casos, que cubren todas las posibilidades.

Caso 1: $N \leq 27$. Entonces $s, t \leq N - 3 \leq 24$.

Caso 2: $2^N \geq 2 \cdot 3^R$. Entonces $D \geq 2^{N-1}$, y el lema 3.1 da

$$h\, 2^{t-1} < 1 + \frac{3^r}{2^{r+s}} \leq c_r, \tag{3}$$

luego $t \leq T_F$, porque $h \geq 1$. Si $(t, h) \neq (1, 1)$, se tiene $h\, 2^{t-1} \geq 2$, pues h es impar, y (3) exige $3^r > 2^{r+s}$, es decir, $s < S_0$. Si $t = h = 1$, el lema 3.2 y la hipótesis $d \geq n$ dan $2^{r+s+1} + 2^{r+1} \leq 4 \cdot 3^r$, es decir, $s < s_1$.

Caso 3: $N \geq 28$ *y* $2^N < 2 \cdot 3^R$. Como $2^{N-1} < 3^R < 4^R$, se tiene $N \leq 2R$. Como $N \geq 28$, $N \notin S$, y el teorema 2.1 da

$$D > 2^N e^{-N/10} \geq 2^N e^{-R/5}.$$

Con el lema 3.1 y $h \geq 1$, $s \geq 1$, resulta

$$2^t e^{-(r+t)/5} \leq h\, 2^t e^{-R/5} < 1 + \frac{3^r}{2^{r+s}} \leq c_r,$$

luego $t \leq T_W$. Por último, $s = N - R - u \leq R - 1 = r + t - 1 < r + T_W$. □

Corolario 3.4. *Sea $r \geq 1$. Si para cada par (s, t) con $1 \leq t \leq T$ y $1 \leq s \leq S$ tal que el entero h de (1) es impar y $D > 0$, con $u = \nu_2(3^t h - 1)$, se cumple $Db > E$, entonces, para toda cuaterna (r, s, t, u) con $D > 0$, todos los impares de su clase cumplen $d < n$.*

Demostración. Por el teorema 5.4 de [1], basta considerar los menores representantes con $j_0 = 0$, que corresponden a los pares (s, t) con h impar. Por el teorema 3.3, un representante con $d \geq n$ tendría $t \leq T$ y $s \leq S$, y por la proposición 2.1 de [1], $d < n$ equivale a $Db > E$. □

4. Comprobación

El programa `verificar_reduccion.py`, que acompaña a esta nota, calcula para cada r las cantidades T_F, s_1 y S_0 con aritmética entera exacta. Para T_W escribe la condición en la forma equivalente $2^{5t} < c_r^5 e^{r+t}$ y sustituye e por la cota racional

$$e < \sum_{k=0}^{20} \frac{1}{k!} + \frac{1}{20! \cdot 20},$$

con aritmética racional exacta; el valor obtenido es, por tanto, mayor o igual que T_W, y el programa comprueba además que no supera $3r + 2$. Recorre después todos los pares (s, t) de la caja del corolario 3.4, calcula b, h y u, y, en cada cuaterna con h impar y $D > 0$, comprueba la identidad de la proposición 2.1 de [1], la identidad (2), el valor de d por simulación directa de T y la desigualdad $Db > E$.

La tabla 1 recoge las cotas y el número de cuaternas examinadas para $r \leq 20$. Para $1 \leq r \leq 100$ la única cuaterna con $Db \leq E$ es $(1, 1, 1, 1)$, que corresponde a $n = 1$. Con el corolario 3.4 se obtiene:

Corolario 4.1. *Sea $1 \le r \le 100$ y sea (r, s, t, u) una cuaterna con $3^{r+t} < 2^{r+s+t+u}$. Todo impar n de su clase cumple $d < n$, salvo $n = 1$.*

Para $r = 1, 2, 3$ esto coincide con los teoremas 6.3, 9.1 y 10.1 de [1], que no dependen del cálculo. Para $4 \le r \le 100$, el corolario depende de la ejecución del programa, que tarda unos quince segundos.

r	T_F	T_W	s_1	S_0	T	S	cuaternas
1	1	1	2	1	26	26	391
2	2	2	2	2	26	26	293
3	2	3	3	2	26	26	259
4	2	4	4	3	26	26	242
5	3	5	4	3	26	26	228
6	3	6	5	4	26	26	218
7	4	7	6	5	26	26	212
8	4	8	6	5	26	26	211
9	5	9	7	6	26	26	195
10	5	10	7	6	26	26	193
11	6	12	8	7	26	26	193
12	7	13	9	8	26	26	184
13	7	14	9	8	26	27	174
14	8	15	10	9	26	29	195
15	8	17	10	9	26	32	236
16	9	18	11	10	26	34	250
17	9	19	11	10	26	36	282
18	10	20	12	11	26	38	289
19	11	21	13	12	26	40	292
20	11	23	13	12	26	43	327

Cuadro 1: Cotas del teorema 3.3 y número de cuaternas con $j_0 = 0$ y $D > 0$ examinadas en la caja $t \le T$, $s \le S$.

5. Límites del método

Las cotas T_F, s_1 y S_0 crecen como $r \log_2(3/2)$, y T_W como

$$r \, \frac{\ln(3/2) + 1/5}{\ln 2 - 1/5} \approx 1{,}23\, r,$$

de modo que el número de pares examinados crece como r^2. El teorema 3.3 da un procedimiento de decisión para cada r, pero no un resultado para todos a la vez.

El obstáculo está en el caso 3 de la demostración, con t pequeño frente a r. Allí D debe ser menor que $2^{N-t} c_r / h$, es decir, 2^N debe estar muy cerca de 3^R, con un error relativo del orden de $2^{-t}(3/2)^r$. La cota de Ellison solo excluye errores relativos menores que $e^{-N/10}$, y eso basta cuando t es grande frente a r, pero no en general. Una cota inferior más fuerte de $|2^x - 3^y|$, del tipo $2^x x^{-c}$, reduciría el caso 3 a $t \lesssim r \log_2(3/2) + c \log_2 R$, pero tampoco lo eliminaría. En esa franja hay que usar el valor concreto de h y la congruencia (1) módulo 3^r, que fija s módulo el orden de 2 módulo 3^r, y no se ve cómo hacerlo de forma uniforme en r.

6. Cuestiones abiertas

Problema 6.1. ¿Es cierto que, para todo $r \geq 101$ y toda cuaterna (r, s, t, u) con $D > 0$ y $j_0 = 0$, se cumple $Db > E$? Por el teorema 3.3, una excepción tendría que estar en la región $3^R < 2^N < 2 \cdot 3^R$ o en la región fuerte con $t \leq T_F$, con las cotas dadas. Cabe preguntar si la congruencia $2^s(2^t h - 1) \equiv -1 \pmod{3^r}$ permite excluir esos casos de forma uniforme.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Descenso tras dos rachas consecutivas en la dinámica de Collatz*, versión 2, Zenodo, 2026. doi:10.5281/zenodo.23701808.

[2] W. J. Ellison, *On a theorem of S. Sivasankaranarayana Pillai*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1970–1971), exposé n.º 10, pp. 1–10. Disponible en http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A10_0.