Una Tabla de los Números Naturales: Conexiones entre Jerarquía Binaria, Conjetura de Collatz y Distribuciones Logarítmicas

Miguel Cerdá Bennassar
Investigación Original (2014-2015)
Análisis y Documentación Contemporánea

21 de julio de 2025

Resumen

Este documento presenta un análisis de una representación tabular innovadora de los números naturales, desarrollada originalmente para estudiar la conjetura de Collatz. La investigación revela conexiones inesperadas entre la estructura binaria fundamental de los números, la ley de Benford, secuencias clásicas (Mersenne, Jacobsthal), y autómatas celulares. El trabajo, realizado de forma independiente entre 2014-2015, anticipa resultados teóricos posteriores sobre la relación entre sistemas dinámicos discretos y distribuciones logarítmicas emergentes.

1. Introducción

La conjetura de Collatz, también conocida como conjetura 3n+1, ha resistido todos los intentos de demostración rigurosa durante décadas. Recientemente, Lagarias ha mostrado que las iteraciones de Collatz siguen la ley de Benford en la distribución de sus primeros dígitos, proporcionando una nueva perspectiva sobre este problema clásico.

Este documento analiza una investigación independiente realizada entre 2014-2015 que desarrolló una representación tabular de los números naturales para visualizar secuencias de Collatz. Sorprendentemente, esta tabla reveló conexiones con la ley de Benford antes de que se estableciera formalmente la relación teórica, y demostró ser un marco unificador para múltiples áreas de la teoría de números.

2. La Tabla Binaria: Construcción y Estructura

2.1. Definición y Construcción

Principio fundamental: La tabla se construye *ad hoc* para cada ocasión y no sirve usar la misma tabla para casos distintos. La tabla debe construirse dinámicamente en cada caso, ya que el proceso de construcción es tan importante como el resultado final.

2.1.1. Procedimiento de Construcción Dinámica

La construcción se realiza de la siguiente manera:

1. **Preparación**: Se dispone de una cuadrícula en blanco
2. **Regla de colocación**:
   - Se empieza siempre escribiendo el número 1 en la primera celda de la fila superior
   - Para cada número siguiente (2, 3, 4, 5, 6, ...):
     - Si es **impar**: se coloca en la primera fila, en la siguiente posición disponible
     - Si es **par**: se coloca debajo de su mitad
3. **Secuencia de construcción**:
   - Número 1 $\rightarrow$ primera celda, fila superior
   - Número 2 $\rightarrow$ debajo del 1 (ya que $2 = 2\times1$)
   - Número 3 $\rightarrow$ fila superior, después del 1
   - Número 4 $\rightarrow$ debajo del 2 (ya que $4 = 2\times2$)
   - Número 5 $\rightarrow$ fila superior, después del 3
   - Número 6 $\rightarrow$ debajo del 3 (ya que $6 = 2\times3$)
   - Y así sucesivamente...
4. **Criterio de finalización**: La construcción continúa hasta un número máximo $\leq M$ predeterminado. En la fila superior quedarán todos los números impares desde 1 hasta $\leq M$ (o el mayor impar $\leq M$).

2.1.2. Estructura Resultante

La tabla resultante exhibe las siguientes propiedades:

1. **Primera fila**: Todos los números impares en orden: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
2. **Filas subsecuentes**: Los números pares organizados según su estructura binaria
3. **Estructura jerárquica**: La fila k contiene múltiplos de 2^k

Matemáticamente, un número n se ubica en:

- **Fila**: $v_2(n)$ (orden 2-ádico de n)
- **Columna**: $\frac{n}{2^{v_2(n)}}$ (parte impar de n)

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	...																						
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	...																																
8	24	40	56	72	...																																						
16	48	80	...																																								
32	...																																										
64	...																																										
...																																											

Figura 1: Tabla binaria de números naturales hasta 87. La estructura triangular revela claramente el "efecto imán" hacia la primera columna (potencias de 2). Nótese cómo la densidad de números decrece exponencialmente en cada fila, creando la forma característica que subyace a las distribuciones logarítmicas observadas en las secuencias de Collatz.

Como se puede observar en la Figura 1, la estructura de la tabla exhibe una característica forma triangular que refleja la distribución exponencial decreciente de los números según su orden 2-ádico. La Figura 3 muestra con mayor detalle cómo esta estructura genera el efecto imán hacia la primera columna.

2.2. Propiedades Estructurales

La tabla exhibe las siguientes características:

1. **Distribución exponencial**: La fila k contiene 2^k números en cualquier rango finito
2. **Números destacados**: Los números de la forma $2^n - 1$ (Mersenne) aparecen en posiciones específicas
3. **Secuencias de Jacobsthal**: La cantidad de números en cada fila sigue $a(n) = a(n-1) + 2a(n-2)$

3. Aplicación a la Conjetura de Collatz

3.1. Visualización de Secuencias

Al trazar las secuencias de Collatz en la tabla (Figura 2), emergen patrones fundamentales:

Algoritmo de Collatz:

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n/2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \tag{1}$$

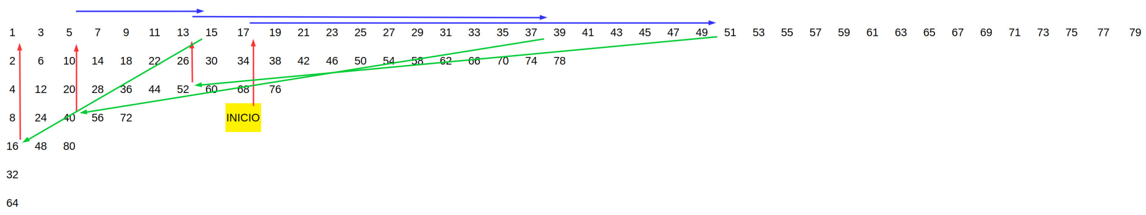

Figura 2: La función de Collatz para los impares 3n+1 se representa en la tabla como dos operaciones separadas, primero el "avance: 3n" y después el "retroceso: +1". Ejemplo: La secuencia empezada con el número 68 llega al impar 17 después de dos divisiones y éste avanza hasta el 51 después de la multiplicación por 3. El 51 retrocede en la tabla hasta el 52 después de sumarle 1. La secuencia completa: 68, 34, 17, 51, 52, 26, 13, 39, 40, 20, 10, 5, 15, 16, 8, 4, 2, 1..

El término "retrocede" lo aplicamos cuando la secuencia se acerca a la columna de los números 2^n y "avanza" cuando se aleja de esa columna. La representación tabular permite visualizar cómo las secuencias se mueven entre las diferentes filas y columnas, revelando la estructura subyacente del problema.

3.2. Análisis del Sesgo Estructural

La investigación reveló un **sesgo fundamental** hacia la convergencia:

3.2.1. Análisis Modular

Los números impares se clasifican en dos categorías:

1. **Forma** $4n + 3$: Requieren exactamente 1 división por 2 después de $3n + 1$
2. **Forma** $4n + 1$: Requieren mínimo 2 divisiones por 2

3.2.2. Distribución de Divisiones

Para números de la forma $4n + 1$:

- $8n + 1$: Exactamente 2 divisiones
- $8n + 5$: 3 o más divisiones
- **Casos extremos**: Algunos requieren n divisiones hasta llegar directamente a 1

3.3. El “Efecto Imán” de la Primera Columna

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	...																						
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	...																																	
8	24	40	56	72	88	...																																						
16	48	80	...																																									
32	...																																											
64	...																																											
...																																												

Figura 3: La tabla revela un **“Efecto Imán”** donde los números pares generados por las iteraciones tienden hacia la primera columna (2^n), independientemente de su magnitud inicial.

Conclusión clave: Aunque existe igual probabilidad de generar números $4n + 1$ o $4n + 3$, el efecto no es simétrico:

- **Ascenso**: 1 división (efecto débil)
- **Descenso**: 2+ divisiones (efecto fuerte)

4. Conexión con la Ley de Benford

4.1. Descubrimiento Empírico

En 2015, se observó que el "perfil"de la tabla se asemejaba al gráfico de la ley de Benford invertido. Esta observación fue hecha por **similitud visual** antes de conocer los trabajos teóricos de Lagarias.

4.2. Distribuciones Observadas

Al analizar secuencias específicas (ejemplo: secuencia iniciada en 66), se encontraron distribuciones:

$$\text{Fila 1: } 100\,\%\text{ (50 números)} \tag{2}$$
$$\text{Fila 2: } 50\,\%\text{ (25 números)} \tag{3}$$
$$\text{Fila 3: } 26\,\%\text{ (13 números)} \tag{4}$$
$$\text{Fila 4: } 12\,\%\text{ (6 números)} \tag{5}$$
$$\text{Fila 5: } 6\,\%\text{ (3 números)} \tag{6}$$
$$\text{Fila 6: } 4\,\%\text{ (2 números)} \tag{7}$$
$$\text{Fila 7: } 2\,\%\text{ (1 número)} \tag{8}$$

4.3. Mecanismo de Emergencia

La conexión entre jerarquía binaria y distribuciones logarítmicas surge porque:

1. **Estructura binaria**: Cada fila contiene exactamente la mitad de elementos que la anterior

2. **Densidad decreciente**: Sigue la progresión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$
3. **Transformación logarítmica**: Esta progresión geométrica corresponde a $\log_2$

5. Conexiones con Otras Secuencias

5.1. Números de Mersenne

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	...
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	...
	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	...																
	4	12	20	28	36	44	52	60	...																								
	8	24	40	56	...																												
	16	48	...																														
	32	...																															
	...																																

Figura 4: Los números $M_n = 2^n - 1$ aparecen en posiciones específicas de la tabla, revelando su estructura binaria natural.

Los números de Mersenne, como se muestra en la Figura 4, exhiben un patrón característico en la tabla binaria.

5.2. Números de Jacobsthal

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	...
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	...
	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	...																						
	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	...																																
	8	24	40	56	72	...																																						
	16	48	80	...																																								
	32	...																																										
	64	...																																										
	...																																												

Figura 5: La secuencia de Jacobsthal $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ describe exactamente la cantidad de números en cada fila de la tabla.

La relación con los números de Jacobsthal, ilustrada en la Figura 5, demuestra cómo la estructura de la tabla está intrínsecamente conectada con secuencias clásicas de la teoría de números.

5.3. Autómatas Celulares

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	...																									
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	...																																					
8	24	40	56	72	88	...																																											
16	48	80	...																																														
32	96	...																																															
64	...																																																
...																																																	

Figura 6: La tabla muestra conexiones con autómatas celulares, específicamente con la Regla 643, sugiriendo que la estructura binaria subyacente es fundamental para múltiples sistemas dinámicos.

Como se observa en la Figura 6, existe una sorprendente conexión entre la tabla binaria y los autómatas celulares.

6. Análisis Teórico

6.1. Jerarquía Binaria como Marco Unificador

La tabla funciona como un **marco unificador** que revela:

1. **Estructura logarítmica latente** en los números naturales
2. **Conexiones entre sistemas dinámicos** aparentemente no relacionados
3. **Emergencia de distribuciones universales** a partir de reglas simples

6.2. Construcción Dinámica vs. Representación Estática

Un aspecto crucial es que la tabla debe **construirse dinámicamente**:

- **Proceso generativo**: Los patrones emergen durante la construcción
- **Información temporal**: La secuencia de aparición es más importante que el estado final
- **Auto-organización**: La estructura se çonstruye a sí misma"siguiendo reglas simples

7. Implicaciones y Conexiones Contemporáneas

7.1. Anticipación de Resultados Teóricos

Esta investigación, realizada entre 2014-2015, anticipó varios resultados que posteriormente se formalizarían:

1. **Conexión Collatz-Benford**: Lagarias formalizó matemáticamente en estudios posteriores

2. **Distribuciones emergentes**: La relación entre sistemas dinámicos y leyes estadísticas
3. **Estructura binaria fundamental**: Su papel en la organización de patrones numéricos

7.2. Valor Metodológico

El enfoque desarrollado demuestra:

- **Poder de la visualización**: Las representaciones correctas revelan estructura oculta
- **Matemática exploratoria**: Cómo herramientas específicas pueden iluminar áreas amplias
- **Intuición geométrica**: Su capacidad para anticipar resultados analíticos complejos

8. Conclusiones

8.1. Esta investigación estableció:

1. **Marco unificador**: Una herramienta que conecta múltiples áreas de matemáticas
2. **Mecanismo de Collatz**: Explicación visual del sesgo hacia la convergencia
3. **Emergencia de Benford**: Conexión entre estructura binaria y distribuciones logarítmicas
4. **Metodología innovadora**: Construcción dinámica como herramienta de análisis

8.2. Contribuciones Teóricas

El trabajo contribuye a la comprensión de:

- **Sistemas dinámicos discretos** y su relación con distribuciones estadísticas
- **Estructura binaria fundamental** de los números naturales
- **Conexiones emergentes** entre áreas aparentemente no relacionadas
- **Visualización matemática** como herramienta de descubrimiento

8.3. Relevancia Contemporánea

Los resultados complementan investigaciones actuales sobre:

1. **Análisis ergódico** de la conjetura de Collatz
2. **Distribuciones universales** en sistemas dinámicos
3. **Teoría de la información** aplicada a secuencias numéricas
4. **Autómatas celulares** y sistemas auto-organizativos

9. Perspectivas Futuras

9.1. Líneas de Investigación

Este trabajo sugiere varias direcciones para investigación futura:

1. **Formalización rigurosa**: Desarrollo de marcos teóricos para las observaciones empíricas
2. **Generalización**: Aplicación a otros sistemas dinámicos discretos
3. **Conexiones algorítmicas**: Uso de la tabla para algoritmos de análisis numérico
4. **Aplicaciones computacionales**: Herramientas de visualización para investigación matemática

9.2. Preguntas Abiertas

- ¿Pueden otras conjeturas famosas visualizarse de manera similar?
- ¿Qué otras secuencias fundamentales siguen patrones logarítmicos en esta estructura?
- ¿Existe una teoría general para la emergencia de distribuciones universales?