Observaciones sobre la inexistencia de números perfectos impares

Miguel Cerdá Bennassar

Agosto 2025

Resumen

Se presenta un análisis estructural de los divisores de números impares. El argumento se basa en la cota natural que limita el mayor divisor propio de un número impar a $n/3$, lo que genera un déficit para muchos casos pequeños. Este enfoque explica por qué los números impares menores que 945 son necesariamente deficientes. Sin embargo, a partir de 945 aparecen los primeros números abundantes impares, lo que muestra las limitaciones del argumento. El trabajo complementa los resultados computacionales y teóricos conocidos, y refuerza la conjetura clásica de que no existen números perfectos impares.

1. Introducción

Un número perfecto es un entero positivo n tal que la suma de sus divisores propios (es decir, todos los divisores positivos distintos de n) es igual a n. El ejemplo más clásico es 6, ya que $1 + 2 + 3 = 6$.

Euclides demostró que todos los números de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, donde $2^p - 1$ es primo, son perfectos pares. Euler estableció más tarde que todos los números perfectos pares tienen exactamente esta forma.

El problema de la existencia de números perfectos *impares* sigue abierto. Se sabe que no existen números perfectos impares menores que 10^{1500} (Ochem y Rao, 2012), y que cualquier número perfecto impar debería cumplir fuertes restricciones aritméticas (Nielsen, 2007).

2. Resultados preliminares

- $\sigma(n)$ denota la suma de los divisores positivos de n.
- Los divisores propios de n son $\sigma(n) - n$.
- n es *deficiente* si $\sigma(n) - n < n$.

- n es *abundante* si $\sigma(n) - n > n$.
- n es *perfecto* si $\sigma(n) - n = n$.

3. Observación estructural

Sea n un número impar mayor que 1, y sea p su menor factor primo. Entonces

$$d_{\text{máx}} = \frac{n}{p} \leq \frac{n}{3}.$$

Es decir, el mayor divisor propio de un impar nunca supera $n/3$, mientras que en los números pares el mayor divisor propio siempre es $n/2$.

Este hecho sugiere un déficit: en los impares hay menos "espacio" para que la suma de divisores alcance el propio número. Por ejemplo:

$$\mathrm{Div}(45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}, \quad 1 + 3 + 5 + 9 + 15 = 33 < 45.$$

$$\mathrm{Div}(49) = \{1, 7, 49\}, \quad 1 + 7 = 8 < 49.$$

En la tabla de divisores de los números del 1 al 50 (Apéndice A) se comprueba que *todos* los impares de ese rango son deficientes.

4. Limitaciones del argumento

El razonamiento anterior no basta para excluir la abundancia de todos los impares. Aunque cada divisor propio sea $\leq n/3$, pueden existir *muchos* divisores, y la suma total puede superar a n.

De hecho, el entero

$$945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

es el *primer número impar abundante*. Sus divisores propios suman 975, lo que excede a 945. Esto demuestra que la condición $d_{\text{máx}} \leq n/3$ por sí sola no garantiza que un impar sea deficiente.

Por tanto:

- Todos los impares menores que 945 son deficientes.
- A partir de 945 aparecen los primeros impares abundantes.
- No se conoce ningún impar perfecto.

5. Discusión

El contraste con los números pares es notable: allí el mayor divisor propio es $n/2$, lo que da más "espacio" para alcanzar la perfección. Esto explica por qué existen números perfectos pares (aunque muy escasos y regulares) y todavía no se ha encontrado ninguno impar.

Así, aunque el enfoque del déficit estructural no resuelve el problema abierto, sí proporciona una explicación intuitiva: la rigidez en la distribución de divisores de los impares los hace candidatos mucho menos probables para la perfección. Si existieran números perfectos impares, serían aún más escasos que los pares.

6. Conclusión

El análisis de las cotas para los divisores propios muestra que los números impares tienen un margen estructural mucho más limitado que los pares. Todos los impares menores que 945 son deficientes, y el primero abundante es 945. Esto confirma que el déficit estructural es real, aunque no universal.

Los números perfectos pares existen y siguen la fórmula de Euclides–Euler. En cambio, ningún impar perfecto se conoce hasta la fecha, y las restricciones estructurales hacen pensar que, de existir, serían mucho más escasos aún que los pares.

Referencias

- Euclides. *Elementos*, Libro IX, Proposición 36. Circa 300 a.C.
- Euler, L. *De numeris perfectis.* Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9, 99–153 (1737).
- Nielsen, P.P. Odd perfect numbers have at least nine distinct prime factors. *Mathematics of Computation* 76, 2109–2126 (2007).
- Ochem, P., Rao, M. Odd perfect numbers are greater than 10^{1500}. *Mathematics of Computation* 81, 1869–1877 (2012).

A. Tabla de divisores (1–50)

La siguiente tabla muestra los divisores de los números del 1 al 50. Puede observarse que todos los impares en este rango son deficientes. El primer impar abundante aparece mucho más adelante, en 945.

1																																																		
1	**2**																																																	
1	2	**3**																																																
1	**2**	3	**4**																																															
1	2	3	4	**5**																																														
1	**2**	**3**	4	5	**6**																																													
1	2	3	4	5	6	**7**																																												
1	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**																																											
1	2	**3**	4	5	6	7	8	**9**																																										
1	**2**	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**																																									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**11**																																								
1	**2**	**3**	**4**	5	**6**	7	8	9	10	11	**12**																																							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**																																						
1	**2**	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	**14**																																					
1	2	**3**	4	**5**	6	7	8	9	10	11	12	13	14	**15**																																				
1	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15	**16**																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	**17**																																		
1	**2**	**3**	4	5	**6**	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15	16	17	**18**																																	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	**19**																																
1	**2**	3	**4**	**5**	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14	15	16	17	18	19	**20**																															
1	2	**3**	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	**21**																														
1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10	**11**	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	**22**																													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	**23**																												
1	**2**	**3**	**4**	5	**6**	7	**8**	9	10	11	**12**	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	**24**																											
1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	**25**																										
1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	**26**																									
1	2	**3**	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	**27**																								
1	**2**	3	**4**	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	**28**																							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	**29**																						
1	**2**	**3**	4	**5**	**6**	7	8	9	**10**	11	12	13	14	**15**	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	**30**																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	**31**																				
1	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15	**16**	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	**32**																			
1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	**11**	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	**33**																		
1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	**17**	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	**34**																	
1	2	3	4	**5**	6	**7**	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	**35**																
1	**2**	**3**	**4**	5	**6**	7	8	**9**	10	11	**12**	13	14	15	16	17	**18**	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	**36**															
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	**37**														
1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	**19**	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	**38**													
1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	**39**												
1	**2**	3	**4**	**5**	6	7	**8**	9	**10**	11	12	13	14	15	16	17	18	19	**20**	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	**40**											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	**41**										
1	**2**	**3**	4	5	**6**	**7**	8	9	10	11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20	**21**	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	**42**									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	**43**								
1	**2**	3	**4**	5	6	7	8	9	10	**11**	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	**22**	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	**44**							
1	2	**3**	4	**5**	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	**15**	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	**45**						
1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	**23**	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	**46**					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	**47**				
1	**2**	**3**	**4**	5	**6**	7	**8**	9	10	11	**12**	13	14	15	**16**	17	18	19	20	21	22	23	**24**	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	**48**			
1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	**49**		
1	**2**	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	**25**	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	**50**	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…