La permutación original de Collatz de 1932: dinámica 3-ádica y ciclos

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

En una entrada de cuaderno fechada el 1 de julio de 1932, Lothar Collatz consideró una función definida módulo 3 que da lugar a una permutación de los enteros positivos, y preguntó si la órbita que contiene al número 8 es finita o infinita. En esta nota se demuestra que la función es una permutación, se da su inversa explícita, se prueba que toda órbita es o bien un ciclo finito o bien una órbita biinfinita que tiende a infinito en ambos sentidos, y se verifican los cuatro ciclos conocidos. Se presentan además el comienzo de la órbita de 8 en ambos sentidos y algunos datos computacionales. Se prueba que la extensión de la función a los enteros 3-ádicos es conjugada del desplazamiento completo sobre tres símbolos (la forma finita de este hecho se debe a Matthews y Watts), y se obtienen resultados sobre cualquier ciclo: una caracterización exacta de los ciclos mediante su sucesión de residuos, de la que se sigue que hay solo un número finito de ciclos de cada periodo; congruencias para su mínimo y su máximo; cotas para la proporción de términos divisibles por 3; una cota explícita del mínimo en función de la distancia de $L \log_2 3$ al entero más próximo, y una relación con las reducidas de $\log_2 3$. Los cuatro ciclos conocidos corresponden a cuatro reducidas consecutivas; el resultado obtenido lo explica para los dos más cortos, pero no para los otros dos. Combinando las cotas con una búsqueda computacional, se prueba que los únicos ciclos de periodo a lo sumo 5000 son los cuatro conocidos, y se explica por qué una verificación de este tipo no puede extenderse como en el problema $3x + 1$. La pregunta de Collatz sobre el 8, y la existencia de otros ciclos, siguen abiertas; esta nota no pretende resolverlas.

Índice

1. Introducción **2**

2. Forma entera de la función **3**

3. La función es una permutación **3**

4. Dicotomía de las órbitas **4**

5. Los ciclos conocidos **4**

6. La órbita de 8 **5**

7. Búsqueda de otros ciclos **5**

8. Restricciones aritméticas sobre los ciclos **6**
8.1. La ecuación de un ciclo 6
8.2. La dinámica 3-ádica 7
8.3. Caracterización de los ciclos enteros 8
8.4. El mínimo y el máximo de un ciclo 9
8.5. La proporción de la rama contractiva 9
8.6. Una cota explícita para el mínimo 10
8.7. Ciclos y reducidas de $\log_2 3$ 11

9. El problema abierto **14**

A. Código **14**

1. Introducción

Antes del problema $3n+1$, Collatz estudió otras funciones aritméticas definidas por casos, representándolas como grafos dirigidos con una flecha de n a $f(n)$. Según recoge Lagarias [1], en su cuaderno del 1 de julio de 1932 consideró la función

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{3}, & n \equiv 0 \pmod 3, \\ \dfrac{4n-1}{3}, & n \equiv 1 \pmod 3, \\ \dfrac{4n+1}{3}, & n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases} \tag{1}$$

planteó el problema de determinar la estructura de ciclos de la permutación que define y preguntó, en particular, si la órbita que contiene al 8 es finita o infinita (en la terminología de Lagarias, si el «ciclo» de la permutación que contiene al 8 es finito o infinito). Noventa y cuatro años después, esa pregunta sigue sin respuesta.

El contexto histórico (las cartas de Collatz y la relación entre este problema y el $3n+1$) se trata en [15]. Aquí nos ocupamos solo de la función.

El problema lo publicó por primera vez Klamkin en 1963 [11], junto con la pregunta de si g tiene solo un número finito de órbitas distintas; Tavares [13] estudia esta última pregunta a través de la densidad de las órbitas.

La permutación pertenece también a la clase de las aplicaciones afines por clases residuales, cuyos grupos de permutaciones estudia Kohl con métodos algorítmicos [5].

Los resultados principales están en la sección 8: la caracterización de los ciclos por su palabra de residuos (Teorema 8.8), apoyada en la conjugación 3-ádica (Proposición 8.2); las restricciones sobre el mínimo, el máximo y la proporción de términos divisibles por 3; la cota explícita del mínimo (Proposición 8.15); la relación con las reducidas de $\log_2 3$ (Teorema 8.17), y la exclusión de los ciclos de periodo a lo sumo 5000 distintos de los conocidos (Corolario 8.18). Las secciones anteriores reúnen los hechos elementales sobre la permutación, sus ciclos conocidos y la órbita de 8.

En todo el escrito, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y g^k denota la k-ésima iterada de g, con $g^0 = \mathrm{id}$ y, una vez probado que g es biyectiva, $g^{-k} = (g^{-1})^k$.

2. Forma entera de la función

Lema 2.1. *La función g toma valores en $\mathbb{N}$ y, para todo entero $k \geq 0$,*

$$g(3k) = 2k \quad (k \geq 1), \qquad g(3k+1) = 4k+1, \qquad g(3k+2) = 4k+3.$$

Demostración. Basta sustituir en (1): $g(3k) = 2{\cdot}3k/3 = 2k$; $g(3k{+}1) = (12k{+}4{-}1)/3 = 4k{+}1$; $g(3k+2) = (12k+8+1)/3 = 4k+3$. Los tres valores son enteros positivos. □

Comentario 2.2. En particular, la iteración de g nunca produce fracciones: los numeradores $4n \mp 1$ son siempre divisibles por 3 en la rama correspondiente. La forma del Lema 2.1 es la que usa Lagarias [1]; no es una modificación de la función original, sino la misma función escrita sin denominadores.

3. La función es una permutación

Teorema 3.1. *La función $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es biyectiva, y su inversa es*

$$g^{-1}(m) = \begin{cases} \dfrac{3m}{2}, & m \equiv 0 \pmod 2, \\ \dfrac{3m+1}{4}, & m \equiv 1 \pmod 4, \\ \dfrac{3m-1}{4}, & m \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Demostración. Por el Lema 2.1, g aplica:

- la clase $\{3k : k \geq 1\}$ biyectivamente sobre los pares $\{2k : k \geq 1\}$;
- la clase $\{3k+1 : k \geq 0\}$ biyectivamente sobre $\{4k+1 : k \geq 0\}$;
- la clase $\{3k+2 : k \geq 0\}$ biyectivamente sobre $\{4k+3 : k \geq 0\}$.

Las tres clases de partida forman una partición de $\mathbb{N}$, y también la forman las tres clases de llegada (pares, impares $\equiv 1$ e impares $\equiv 3 \pmod 4$). Como cada pieza se aplica biyectivamente sobre su imagen, g es biyectiva. La inversa se obtiene despejando k en cada pieza: si $m = 2k$,

$g^{-1}(m) = 3k = 3m/2$; si $m = 4k+1$, $g^{-1}(m) = 3k+1 = (3m+1)/4$; si $m = 4k+3$, $g^{-1}(m) = 3k+2 = (3m-1)/4$. □

Observación 3.2. La clase de n módulo 3 determina la paridad de $g(n)$, y la clase de m módulo 4 determina la rama de g^{-1}. Hacia delante, g multiplica aproximadamente por $2/3$ o por $4/3$; hacia atrás, g^{-1} multiplica aproximadamente por $3/2$ o por $3/4$.

4. Dicotomía de las órbitas

Proposición 4.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se da exactamente uno de estos dos casos:*

(a) existe $p \geq 1$ con $g^p(n) = n$, y la órbita de n es un ciclo finito;

(b) los números $g^k(n)$, $k \in \mathbb{Z}$, son distintos dos a dos, y $g^k(n) \to \infty$ tanto cuando $k \to +\infty$ como cuando $k \to -\infty$.

Demostración. Si $g^a(n) = g^b(n)$ con $a < b$, aplicando g^{-a} (Teorema 3.1) se obtiene $g^{b-a}(n) = n$, que es el caso (a). En caso contrario los $g^k(n)$ son distintos dos a dos. Dada una cota B, solo hay B enteros positivos $\leq B$, y cada uno aparece a lo sumo una vez en la sucesión; por tanto $g^k(n) > B$ salvo para un número finito de valores de k. Esto da (b). □

Corolario 4.2. *Para la órbita de 8, las alternativas planteadas en 1932 (que la órbita «se vuelva cíclica» o que «diverja») son exactamente las dos de la Proposición 4.1: o bien 8 pertenece a un ciclo finito, o bien $g^k(8) \to \infty$ en ambos sentidos. No hay una tercera posibilidad: dos órbitas distintas son disjuntas, de modo que la órbita de 8 no puede caer en uno de los ciclos conocidos.*

5. Los ciclos conocidos

Proposición 5.1. *La función g tiene los cuatro ciclos siguientes:*

$$(1), \qquad (2,\ 3), \qquad (4,\ 5,\ 7,\ 9,\ 6), \qquad (44,\ 59,\ 79,\ 105,\ 70,\ 93,\ 62,\ 83,\ 111,\ 74,\ 99,\ 66).$$

Demostración. Verificación directa con el Lema 2.1. Para el ciclo largo:

n	n mód 3	regla	$g(n)$
44	2	$4k+3$, $k=14$	59
59	2	$4k+3$, $k=19$	79
79	1	$4k+1$, $k=26$	105
105	0	$2k$, $k=35$	70
70	1	$4k+1$, $k=23$	93
93	0	$2k$, $k=31$	62
62	2	$4k+3$, $k=20$	83
83	2	$4k+3$, $k=27$	111
111	0	$2k$, $k=37$	74
74	2	$4k+3$, $k=24$	99
99	0	$2k$, $k=33$	66
66	0	$2k$, $k=22$	44

Los tres ciclos cortos se comprueban igual: $g(1) = 1$; $g(2) = 3$, $g(3) = 2$; $g(4) = 5$, $g(5) = 7$, $g(7) = 9$, $g(9) = 6$, $g(6) = 4$. □

Comentario 5.2. Los ciclos cortos contienen a $1, 2, \ldots, 7$ y a 9, de modo que 8 es el menor entero positivo que no pertenece a ninguno de los ciclos conocidos. Por eso es el primer caso no trivial de la pregunta.

6. La órbita de 8

Hacia delante, los primeros términos son

$$8,\ 11,\ 15,\ 10,\ 13,\ 17,\ 23,\ 31,\ 41,\ 55,\ 73,\ 97,\ 129,\ 86,\ 115,\ 153,\ 102,\ 68,\ 91,\ 121,$$
$$161,\ 215,\ 287,\ 383,\ 511,\ 681,\ 454,\ 605,\ 807,\ 538,\ 717,\ 478,\ 637,\ 849,\ 566,$$
$$755,\ 1007,\ 1343,\ 1791,\ 1194,\ 796,\ 1061,\ \ldots$$

y hacia atrás, aplicando g^{-1},

$$8,\ 12,\ 18,\ 27,\ 20,\ 30,\ 45,\ 34,\ 51,\ 38,\ 57,\ 43,\ 32,\ 48,\ 72,\ 108,\ \ldots$$

La pregunta sobre el 8 equivale a preguntar si ambas semiórbitas vuelven a encontrarse fuera del término inicial 8. En efecto, por la biyectividad de g, una igualdad

$$g^r(8) = g^{-s}(8), \qquad r, s > 0,$$

equivale a $g^{r+s}(8) = 8$.

Observación 6.1 (datos computacionales). Se han calculado 10^6 iteraciones en cada sentido a partir de 8. En ninguna de las dos direcciones vuelve a aparecer el 8. Tras 10^6 pasos, $g^{10^6}(8)$ tiene 24 282 cifras decimales y $g^{-10^6}(8)$ tiene 25 655. A lo largo de la órbita hacia delante, las tres clases módulo 3 aparecen con frecuencias 0,3344, 0,3327 y 0,3329.

Comentario 6.2 (heurístico, no demostración). Las tres ramas de g multiplican asintóticamente por 2/3, 4/3 y 4/3 (las ramas $4k + 1$ y $4k + 3$ no multiplican exactamente por 4/3). Si las clases módulo 3 de los términos se comportaran como independientes y equiprobables, el factor multiplicativo asintótico medio por paso hacia delante sería

$$\left(\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{4}{3}\right)^{1/3} = \left(\tfrac{32}{27}\right)^{1/3} > 1,$$

lo que predice unas $10^6 \cdot \frac{1}{3} \log_{10} \frac{32}{27} \approx 24\,595$ cifras tras 10^6 pasos. Hacia atrás, con las clases módulo 4 equiprobables, el factor medio sería $(3/2)^{1/2}(3/4)^{1/2} = (9/8)^{1/2}$, que predice unas 25 576 cifras. Ambas predicciones concuerdan con los valores de la Observación 6.1. Esto sugiere que la órbita de 8 es infinita, pero no lo demuestra: nada garantiza que la órbita concreta de 8 se comporte como el modelo aleatorio. La Observación 8.7 muestra que este modelo es exactamente la estadística de g extendida a $\mathbb{Z}_3$ con su medida natural.

7. Búsqueda de otros ciclos

Proposición 7.1 (verificación computacional)**.** *Todo ciclo de g de longitud a lo sumo* 5000 *cuyo menor elemento sea a lo sumo* 10^5 *es uno de los cuatro de la Proposición 5.1.*

Método. Si un ciclo tiene menor elemento m y longitud ℓ, la órbita de m permanece estrictamente por encima de m durante los pasos $1, \dots, \ell - 1$ y vuelve a m en el paso ℓ. Para cada $m \le 10^5$ se itera g desde m hasta que el valor vuelve a m, baja de m o se alcanzan 5000 pasos. Solo se vuelve a m para $m = 1, 2, 4, 44$, con longitudes $1, 2, 5, 12$. El código figura en el Apéndice A. □

Comentario 7.2. La Proposición 7.1 no excluye por sí sola ciclos con elementos todos grandes; para periodos a lo sumo 5000 lo hace el Corolario 8.18. Entre los enteros que no están en los ciclos conocidos, el menor después del 8 cuya órbita no se ha visto unida a la de 8 es el 14: no aparece en los primeros $2 \cdot 10^4$ pasos de la órbita de 8 en ninguno de los dos sentidos. Su órbita empieza $14, 19, 25, 33, 22, 29, 39, 26, 35, 47, 63, 42, 28, \dots$ y plantea, en principio, una pregunta independiente. Simons [7] da, a partir de sus cálculos, $8, 14, 40, 64, 80, 82, \dots$ como mínimos de trayectorias divergentes distintas. En la formulación del problema que propuso Lagarias en [2], el apartado (b) recoge la conjetura de que la órbita biinfinita de 8 tiene densidad cero en $\mathbb{N}$, es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|S_N|}{N} = 0, \qquad S_N = \{n \in [1, N] : n = g^k(8) \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\},$$

y el apartado (c) señala como problema abierto demostrar que hay infinitos enteros positivos fuera de esa órbita. Tavares [13] demuestra que una órbita tiene densidad cero si y solo si, para algún x de la órbita y algún N, el conjunto de los términos $g^{jN}(x)$, $j \in \mathbb{Z}$, en los que g^N disminuye tiene densidad cero, y recoge la indicación de Venturini [14, p. 303] de que una de sus igualdades podría servir para probar que toda órbita tiene densidad cero. Si todas las órbitas tuvieran densidad cero, g tendría infinitas órbitas distintas. Por nuestra parte, el cálculo anterior no excluye que el 14 pertenezca a la órbita de 8: solo muestra que no aparece en sus primeros $2 \cdot 10^4$ pasos en cada sentido.

8. Restricciones aritméticas sobre los ciclos

En esta sección se obtienen condiciones necesarias que debe cumplir cualquier ciclo de g. Escribimos el Lema 2.1 en la forma

$$3\,g(n) = c(n)\,n + \varepsilon(n), \qquad (c(n), \varepsilon(n)) = \begin{cases} (2, 0), & n \equiv 0 \pmod 3, \\ (4, -1), & n \equiv 1 \pmod 3, \\ (4, +1), & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases} \tag{2}$$

8.1. La ecuación de un ciclo

Proposición 8.1. *Sea $(n_0, n_1, \dots, n_{L-1})$ un ciclo de g, con $g(n_i) = n_{i+1}$ e índices módulo L. Pongamos $c_i = c(n_i)$, $\varepsilon_i = \varepsilon(n_i)$, sea a el número de términos del ciclo divisibles por 3 y sea $K = 2L - a$. Entonces*

$$(3^L - 2^K)\, n_0 = \sum_{i=0}^{L-1} \varepsilon_i\, 3^i \prod_{j=i+1}^{L-1} c_j. \tag{3}$$

Demostración. Por inducción sobre k, a partir de (2), se obtiene

$$3^k n_k = \Big(\prod_{i<k} c_i\Big) n_0 + \sum_{i<k} \varepsilon_i\, 3^i \prod_{i<j<k} c_j,$$

pues $3^{k+1} n_{k+1} = c_k\,(3^k n_k) + \varepsilon_k\, 3^k$. Para $k = L$ se tiene $n_L = n_0$, y $\prod_{i<L} c_i = 2^a 4^{L-a} = 2^K$. □

La fórmula para $3^k n_k$ de la demostración es la que dan Matthews y Watts para las aplicaciones de Collatz generalizadas [12, Lema 1], y que Tavares aplica a esta permutación [13, Lema 8].

Para los cuatro ciclos conocidos, tomando n_0 igual al mínimo, (3) da $(-1)\cdot 1 = -1$, $1\cdot 2 = 2$, $(-13)\cdot 4 = -52$ y $7153\cdot 44 = 314\,732$.

8.2. La dinámica 3-ádica

Las fórmulas del Lema 2.1 definen g sobre el anillo $\mathbb{Z}_3$ de los enteros 3-ádicos, y (2) sigue valiendo allí. Sea σ el desplazamiento sobre las sucesiones de tres símbolos, $\sigma(r_0, r_1, r_2, \dots) = (r_1, r_2, \dots)$, y sea

$$\mathcal{I}\colon \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \{0,1,2\}^{\mathbb{N}_0}, \qquad \mathcal{I}(x) = (x \bmod 3,\ g(x) \bmod 3,\ g^2(x) \bmod 3,\ \dots)$$

la aplicación que asigna a cada x su sucesión de residuos.

Proposición 8.2. *La aplicación $\mathcal{I}$ es un homeomorfismo y cumple $\mathcal{I}\circ g = \sigma\circ\mathcal{I}$. Es decir, g actuando sobre $\mathbb{Z}_3$ es conjugada del desplazamiento completo sobre tres símbolos.*

Demostración. Si $x \equiv i \pmod 3$, entonces $g(x + 3^t u) = g(x) + c\,3^{t-1}u$ con $c \in \{2,4\}$, que es una unidad módulo 3. De ahí se obtiene, por inducción sobre j, que la aplicación

$$x \bmod 3^j \ \longmapsto\ (x \bmod 3,\ g(x) \bmod 3,\ \dots,\ g^{j-1}(x) \bmod 3)$$

está bien definida y es una biyección de $\mathbb{Z}/3^j\mathbb{Z}$ en $\{0,1,2\}^j$: si dos clases dan la misma sucesión, tienen el mismo residuo i, se escriben $x = i + 3t$, $x' = i + 3t'$, y $g(x) - g(x') = c\,(t - t')$ con $g(x) \equiv g(x') \pmod{3^{j-1}}$ por inducción, luego $t \equiv t' \pmod{3^{j-1}}$. Estas biyecciones son compatibles al variar j, así que $\mathcal{I}$ es biyectiva. Es continua, porque sus j primeras coordenadas solo dependen de x mód 3^j, y una biyección continua de un compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo. La igualdad $\mathcal{I}\circ g = \sigma\circ\mathcal{I}$ es inmediata a partir de la definición. □

Comentario 8.3. La biyección módulo 3^j que se usa en la demostración es, en un marco más general, el Corolario 2.2 de Matthews y Watts [12]; Tavares la demuestra para esta permutación [13, Lema 9]. La Proposición 8.2 expresa ese hecho en el lenguaje de la dinámica simbólica.

Comentario 8.4. Sobre $\mathbb{Z}_3$, g es tres a uno, como el desplazamiento: cada una de las tres ramas es sobreyectiva, porque 2 y 4 son unidades de $\mathbb{Z}_3$. Que g sea una permutación de $\mathbb{N}$ (Teorema 3.1) depende de cómo se reparten las imágenes módulo 4, un fenómeno 2-ádico invisible en $\mathbb{Z}_3$. La Proposición 8.2 es el análogo, para esta permutación, de la conjugación de la función $3x+1$ sobre $\mathbb{Z}_2$ con el desplazamiento sobre dos símbolos [1]. Weitzer [6] ha propuesto un marco general, los sistemas p-ádicos, inspirado en el problema $3n+1$, en el que se sitúan descripciones de este tipo.

Corolario 8.5. *Para cada $L \geq 1$, la ecuación $g^L(x) = x$ tiene exactamente 3^L soluciones en $\mathbb{Z}_3$, una por cada palabra de longitud L. El número de puntos de periodo exacto L es $P_L = \sum_{d\mid L} \mu(L/d)\,3^d$, y el de órbitas de periodo exacto L es P_L/L.*

Demostración. Por la Proposición 8.2, los puntos fijos de g^L corresponden a los de σ^L, que son las sucesiones periódicas con periodo divisor de L, determinadas por sus L primeros símbolos. La fórmula para P_L se obtiene por inversión de Möbius a partir de $\sum_{d\mid L} P_d = 3^L$. □

Observación 8.6. Los puntos periódicos de g son densos en $\mathbb{Z}_3$, pues bajo la conjugación de la Proposición 8.2 corresponden a las sucesiones periódicas, que son densas en el desplazamiento completo. La escasez conocida de ciclos en $\mathbb{N}$ no procede, por tanto, de una escasez de órbitas periódicas en la extensión 3-ádica, sino de la condición aritmética adicional de que el punto periódico pertenezca a $\mathbb{N}$.

Observación 8.7. Sea μ la medida de Haar normalizada de $\mathbb{Z}_3$. Para cada palabra $(r_0, \dots, r_{j-1})$, el conjunto de los x cuyos j primeros residuos son $r_0, \dots, r_{j-1}$ es una sola clase módulo 3^j, y por tanto tiene medida 3^{-j}. Así, bajo μ, los residuos x mód 3, $g(x)$ mód 3, $g^2(x)$ mód 3, $\dots$ son variables independientes y uniformes en $\{0, 1, 2\}$. El modelo aleatorio del Comentario 6.2 no es, por tanto, una elección arbitraria: es exactamente la estadística de g extendida a $\mathbb{Z}_3$ con su medida natural. Esto no dice nada sobre la órbita de un entero concreto, como el 8: los enteros positivos forman un conjunto de medida nula en $\mathbb{Z}_3$.

8.3. Caracterización de los ciclos enteros

La identidad (3) solo usa la sucesión de residuos de los L primeros términos, y su demostración vale sin cambios en $\mathbb{Z}_3$. Para una palabra $w = (r_0, \dots, r_{L-1}) \in \{0, 1, 2\}^L$ definimos c_i, ε_i por (2) con r_i en lugar de n mód 3, $a = \#\{i : r_i = 0\}$, $K = 2L - a$, y

$$C(w) = \sum_{i=0}^{L-1} \varepsilon_i \, 3^i \prod_{j=i+1}^{L-1} c_j, \qquad n(w) = \frac{C(w)}{3^L - 2^K}.$$

Como $a \le L$, se tiene $K \ge L \ge 1$, de modo que $3^L - 2^K$ es impar menos par y no se anula; además no es divisible por 3.

Teorema 8.8. *Sea $w \in \{0, 1, 2\}^L$. Existe un entero positivo n_0 con $g^L(n_0) = n_0$ cuyos residuos $n_0, g(n_0), \dots, g^{L-1}(n_0)$ módulo 3 forman la palabra w si y solo si $n(w)$ es un entero positivo, y en tal caso $n_0 = n(w)$.*

Demostración. Por la Proposición 8.2, hay un único $x_w \in \mathbb{Z}_3$ con $\mathcal{I}(x_w) = www\cdots$, y cumple $g^L(x_w) = x_w$ porque σ^L fija esa sucesión. La identidad (3) en $\mathbb{Z}_3$ da $(3^L - 2^K)\, x_w = C(w)$, y como $3^L - 2^K$ es una unidad de $\mathbb{Z}_3$, se concluye que $x_w = n(w)$.

Si $n(w)$ es un entero positivo, $n_0 = n(w) = x_w$ cumple $g^L(n_0) = n_0$ y tiene la palabra w. Recíprocamente, si un entero positivo n_0 cumple $g^L(n_0) = n_0$ con palabra w, su sucesión de residuos es $www\cdots$, así que $n_0 = x_w = n(w)$. □

No hace falta, por tanto, comprobar a posteriori que los residuos de $n(w)$ reproduzcan la palabra w: basta con que $n(w)$ sea un entero positivo. Dicho de otro modo, en $\mathbb{Z}_3$ todos los itinerarios periódicos existen (Corolario 8.5); el problema de los ciclos de g es decidir cuáles de esos puntos periódicos 3-ádicos son enteros positivos.

El Teorema 8.8 es la forma que toma para esta permutación un hecho conocido en el problema $3x + 1$: cada sucesión periódica de paridades determina un único punto periódico racional, y hay un ciclo entero con esa sucesión si y solo si ese racional es un entero (Böhm y Sontacchi [9]; Lagarias [10]). La fórmula de composición en que se apoya es la de Matthews y Watts [12].

Observación 8.9. Sea $\rho w = (r_1, \dots, r_{L-1}, r_0)$ la rotación de w, y sean c_0, ε_0 los valores correspondientes a r_0. Entonces

$$3\, C(\rho w) = c_0\, C(w) + \varepsilon_0\, (3^L - 2^K).$$

En efecto, ρw tiene el mismo número de ceros que w, así que el denominador de $n(\rho w)$ es el mismo; y como $\mathcal{I}(g(x_w)) = \sigma(www\cdots) = (\rho w)(\rho w)\cdots$, se tiene $n(\rho w) = g(n(w)) = (c_0\, n(w) + \varepsilon_0)/3$ por (2), igualdad que equivale a la del enunciado. Como $3^L - 2^K$ es primo con 3, se sigue que $3^L - 2^K$ divide a $C(w)$ si y solo si divide a $C(\rho w)$: la condición de integridad del Teorema 8.8 no depende del punto del ciclo elegido como inicio, y la rotación de la palabra actúa sobre los cocientes exactamente como g.

Corolario 8.10. *Para cada $L \geq 1$ hay a lo sumo 3^L enteros positivos n con $g^L(n) = n$. En particular, hay solo un número finito de ciclos cuyo periodo divide a L, y a lo sumo $3^L/L$ ciclos de periodo exacto L.*

Demostración. Todo entero positivo con $g^L(n) = n$ es una de las 3^L soluciones 3-ádicas del Corolario 8.5. Cada ciclo de periodo exacto L aporta L de esos enteros. □

Observación 8.11. Las fórmulas del Lema 2.1 cumplen $g(-n) = -g(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$: el cambio de signo intercambia las clases 1 y 2 módulo 3 y deja fija la clase 0. En términos de palabras, si $\bar{w}$ se obtiene de w intercambiando los símbolos 1 y 2, los c_i no cambian, los ε_i cambian de signo, y por tanto $C(\bar{w}) = -C(w)$ y $n(\bar{w}) = -n(w)$. Cada ciclo de enteros positivos tiene así un ciclo reflejado de enteros negativos. Junto con la Observación 8.9, las dos operaciones naturales sobre las palabras actúan sobre los puntos periódicos como $n(\rho w) = g(n(w))$ y $n(\bar{w}) = -n(w)$.

8.4. El mínimo y el máximo de un ciclo

Proposición 8.12. *Sea un ciclo de g de longitud $L \geq 2$, con mínimo m y máximo M. Entonces*

$$m \equiv 2 \text{ o } 4 \pmod 6, \qquad M \equiv 3 \pmod 6.$$

Demostración. Para $n \geq 2$ se tiene $g(n) < n$ si y solo si $n \equiv 0 \pmod 3$, pues $(4n-1)/3 > n$ para $n > 1$ y $(4n+1)/3 > n$ siempre. Como 1 es un punto fijo, ningún término de un ciclo de longitud $L \geq 2$ vale 1.

El predecesor p de m en el ciclo es distinto de m y cumple $g(p) = m < p$; luego $p = 3k$ y $m = 2k$ es par. Además $g(m) > m$, así que $m \not\equiv 0 \pmod 3$. Por tanto $m \equiv 2$ o $4 \pmod 6$.

Como $g(M) < M$, se tiene $M \equiv 0 \pmod 3$. Su predecesor q cumple $g(q) = M > q$, luego $q \not\equiv 0 \pmod 3$ y $M = g(q)$ es de la forma $4k+1$ o $4k+3$, es decir, impar. Por tanto $M \equiv 3 \pmod 6$. □

Los ciclos conocidos lo cumplen: sus mínimos $2, 4, 44$ son $\equiv 2, 4, 2 \pmod 6$, y sus máximos $3, 9, 111$ son $\equiv 3 \pmod 6$.

8.5. La proporción de la rama contractiva

Proposición 8.13. *Sea un ciclo de g de longitud L y mínimo m, y sea a el número de sus términos divisibles por 3. Con*

$$A_\pm = \frac{4m \pm 1}{3m}, \qquad \Phi(A) = \frac{\ln A}{\ln A - \ln(2/3)},$$

se tiene

$$\Phi(A_-) \le \frac{a}{L} \le \Phi(A_+). \tag{4}$$

Cuando $m \to \infty$, ambos extremos tienden a $\dfrac{\ln(4/3)}{\ln 2} = 2 - \log_2 3 = 0{,}41503\ldots$

Demostración. Alrededor del ciclo se tiene la identidad exacta $\prod_{i=0}^{L-1} g(n_i)/n_i = \prod_i n_{i+1}/n_i = 1$. Para $n \ge m$, el cociente $g(n)/n$ vale $2/3$ si $3 \mid n$, y está comprendido entre A_- y A_+ en los demás casos, pues es $4/3 \mp 1/(3n)$. Por tanto

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^a A_-^{L-a} \le 1 \le \left(\tfrac{2}{3}\right)^a A_+^{L-a}. \tag{5}$$

Tomando logaritmos en la primera desigualdad, $L \ln A_- \le a(\ln A_- - \ln \frac{2}{3})$, y como $A_- > 2/3$ se obtiene $a/L \ge \Phi(A_-)$. La segunda da igualmente $a/L \le \Phi(A_+)$. El límite se sigue de $A_\pm \to 4/3$. □

Comentario 8.14. Para los ciclos conocidos, a/L vale 0, 1/2, 2/5 y $5/12 = 0{,}4166\ldots$; para el último, (4) con $m = 44$ da el intervalo [0,4102; 0,4198]. En cambio, a lo largo de la órbita de 8 la clase 0 aparece con frecuencia 0,3344 (Observación 6.1), próxima a 1/3. Cerrar un ciclo de mínimo grande exige una sobrerrepresentación de la rama contractiva, hasta una frecuencia próxima a 0,415, que la órbita de 8 no muestra en los pasos calculados. Esto no demuestra nada sobre la órbita de 8, pero separa el régimen observado del régimen necesario para el cierre.

8.6. Una cota explícita para el mínimo

Escribimos $\|\xi\|$ para la distancia de un número real ξ al entero más próximo.

Proposición 8.15. *Sea un ciclo de g de periodo L y mínimo m, con a términos divisibles por 3, y sean $K = 2L - a$, $q = L - a$ y $\Delta = K \ln 2 - L \ln 3$. Entonces $q \ge 1$, $\Delta \ne 0$ y*

$$m \le M(L,a) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\left(1 - e^{-\Delta/q}\right)}, & \Delta > 0, \\[2ex] \dfrac{1}{4\left(e^{|\Delta|/q} - 1\right)}, & \Delta < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Además $M(L,a) \le \dfrac{q}{4|\Delta|} + \dfrac{1}{4}$, y en consecuencia

$$m \le \frac{L}{4 \ln 2 \, \|L \log_2 3\|} + \frac{1}{4}. \tag{7}$$

Demostración. Si todos los términos del ciclo fueran divisibles por 3, cada paso multiplicaría por $2/3$ y el ciclo no podría cerrarse; luego $q \ge 1$. Como $2^K \ne 3^L$, se tiene $\Delta \ne 0$. Con $x = 1/(4m)$ se tiene $A_\pm = \frac{4}{3}(1 \pm x)$ y $(2/3)^a (4/3)^q = 2^K/3^L = e^\Delta$, de modo que (5) se escribe

$$(1+x)^{-q} \le e^{\Delta} \le (1-x)^{-q}.$$

Si $\Delta > 0$, la desigualdad de la derecha da $1 - x \le e^{-\Delta/q}$, es decir, $x \ge 1 - e^{-\Delta/q}$; si $\Delta < 0$, la de la izquierda da $1 + x \ge e^{|\Delta|/q}$, es decir, $x \ge e^{|\Delta|/q} - 1$. Esto es (6).

Con $t = |\Delta|/q$ se tiene $1 - e^{-t} \ge t/(1+t)$ y $e^t - 1 \ge t$, ambas equivalentes a $e^t \ge 1 + t$; en los dos casos $M(L,a) \le (1+t)/(4t) = q/(4|\Delta|) + 1/4$. Por último, $|\Delta| = \ln 2 \, |K - L \log_2 3| \ge \ln 2 \, \|L \log_2 3\|$ y $q \le L$. □

Comentario 8.16. La cota es exacta para el ciclo $(2,3)$: con $(L,a)=(2,1)$ se tiene $\Delta=\ln(8/9)$ y $M(2,1)=2=m$. Para el ciclo de longitud 12, $M(12,5)\approx 129{,}0$, frente a $m=44$. Para $(L,a)=(41,17)$, que corresponde a la reducida $65/41$, se obtiene $M(41,17)\approx 523{,}6$: un ciclo de periodo 41 tendría mínimo a lo sumo 523, y la Proposición 7.1 lo excluye. La reducida $65/41$ aproxima bien a $\log_2 3$, pero no lo bastante para permitir un ciclo de mínimo grande.

La cota (7) hace visible el papel de la aproximación diofántica: un ciclo de periodo L con mínimo grande exige que $L\log_2 3$ esté muy cerca de un entero, con $\|L\log_2 3\|$ a lo sumo del orden de L/m. Las reducidas y fracciones intermedias de $\log_2 3$, que dan aproximaciones racionales especialmente buenas, aparecen así de forma natural. Atkin (1966) obtuvo para esta permutación una cota del mínimo de un ciclo de este tipo, en función del periodo y del número de términos no divisibles por 3; Tremblay [8] reproduce su demostración y tabula los periodos para los que esa cota es mayor, entre ellos 41, 53, 94, 306, 665, 971, 1636 y 14 936. Cotas análogas se conocen para el problema $3x+1$ y sus variantes [3].

Esta cota complementa la caracterización 3-ádica: el Corolario 8.10 acota el número de ciclos de cada periodo, y (7) acota la región donde pueden estar, pues $\|L\log_2 3\|>0$ por la irracionalidad de $\log_2 3$.

8.7. Ciclos y reducidas de $\log_2 3$

Teorema 8.17. *Sea un ciclo de g de longitud L y mínimo m, y sea $K=2L-a$ como en la Proposición 8.1. Entonces*

$$\Big|\log_2 3-\frac{K}{L}\Big|\le\frac{L-a}{L}\Big(-\log_2\Big(1-\frac{1}{4m}\Big)\Big)\le\frac{L-a}{L}\cdot\frac{1}{(4m-1)\ln 2}\le\frac{1}{(4m-1)\ln 2}. \tag{8}$$

Si

$$-\ln\Big(1-\frac{1}{4m}\Big)<\frac{\ln 2}{2L(L-a)}, \tag{9}$$

la fracción K/L, una vez reducida, es una reducida del desarrollo en fracción continua de $\log_2 3$. Esto ocurre en particular si $L\le\sqrt{m}$.

Demostración. Sea $x=1/(4m)$, de modo que $A_\pm=\frac{4}{3}(1\pm x)$. Como $(2/3)^a(4/3)^{L-a}=2^K/3^L$, las desigualdades (5) se escriben

$$(1+x)^{-(L-a)}\le\frac{2^K}{3^L}\le(1-x)^{-(L-a)}.$$

Tomando logaritmos en base 2 y usando $\log_2(1+x)\le-\log_2(1-x)$,

$$|K-L\log_2 3|\le(L-a)(-\log_2(1-x))\le(L-a)\,\frac{x}{(1-x)\ln 2},$$

donde la última desigualdad usa $-\ln(1-x)\le x/(1-x)$. Dividiendo por L se obtiene (8), pues $x/(1-x)=1/(4m-1)$ y $L-a\le L$.

La condición (9) equivale a que el término central de (8) sea menor que $1/(2L^2)$. Si $L\le\sqrt{m}$, entonces $1/(2L^2)\ge 1/(2m)$, y para todo $m\ge 1$ se cumple $1/((4m-1)\ln 2)<1/(2m)$, ya que equivale a $(2\ln 2-1)\cdot 2m>\ln 2$, cierto para $m\ge 1$. En ambos casos $|\log_2 3-K/L|<1/(2L^2)$. Escribamos $K/L=p/q$ en forma irreducible, con $q\le L$. Entonces

$$\Big|\log_2 3-\frac{p}{q}\Big|<\frac{1}{2L^2}\le\frac{1}{2q^2},$$

y por el teorema de Legendre, según el cual toda fracción irreducible p/q con $|\xi - p/q| < 1/(2q^2)$, para ξ irracional, es una reducida de ξ, la fracción p/q es una reducida de $\log_2 3$. □

Corolario 8.18 (demostración asistida por ordenador)**.** *Los únicos ciclos de g de periodo a lo sumo* 5000 *son los cuatro de la Proposición 5.1.*

Demostración. Sea un ciclo de periodo $L \le 5000$, mínimo m y con a términos divisibles por 3. Si $m \le 10^5$, basta la Proposición 7.1. Supongamos $m > 10^5$. Multiplicando (5) por $3^L m^{L-a}$, se obtienen las desigualdades entre enteros

$$2^a(4m-1)^{L-a} \;\le\; 3^L m^{L-a} \;\le\; 2^a(4m+1)^{L-a}, \tag{10}$$

que pueden comprobarse con aritmética exacta, sin logaritmos ni redondeos. Para L y a fijos, el cociente entre el primer miembro y el central es $(2/3)^a A_-^{L-a}$, que crece con m, y el cociente entre el último y el central es $(2/3)^a A_+^{L-a}$, que decrece con m; así que si (10) falla para $m = 100\,001$, falla para todo $m \ge 100\,001$. Además, ambos cocientes decrecen con a, porque $2/3 < A_- < A_+$, de modo que los a que cumplen (10) forman un intervalo de enteros que se localiza por bisección. La comprobación exacta para $1 \le L \le 1000$ y $m = 100\,001$ deja solo $(L,a) = (665, 276)$ y $(L,a) = (971, 403)$. Por la misma monotonía, (10) se cumple para $(665, 276)$ exactamente hasta $m = 2\,227\,739$ y para $(971, 403)$ exactamente hasta $m = 145\,107$. Estos límites son la parte entera de $M(665, 276) \approx 2\,227\,739{,}68$ y de $M(971, 403) \approx 145\,107{,}60$ en la Proposición 8.15; ya la cota uniforme (7) supera 10^5, para $L \le 1000$, solo cuando $L = 665$ o $L = 971$. La verificación exacta mediante (10) es la que sustenta la demostración. Queda comprobar los mínimos $100\,001 \le m \le 2\,227\,739$ con $L = 665$ y $100\,001 \le m \le 145\,107$ con $L = 971$, que por la Proposición 8.12 cumplen $m \equiv 2$ o $4 \pmod 6$. Para cada uno de ellos, la órbita de m baja de m o no vuelve a m en L pasos, de modo que ninguno es el mínimo de un ciclo. El mismo procedimiento para $1001 \le L \le 5000$ deja 51 pares (L,a), cuyas cotas exactas del mínimo van de 100 593 a 2 227 739; el máximo lo alcanzan los múltiplos de 665 con $K/L = 1054/665$. Para cada par se recorren los mínimos $100\,001 \le m \le$ cota con $m \equiv 2$ o $4 \pmod 6$, abortando la iteración en cuanto la órbita baja de m, se alcanzan L pasos, se superan a términos divisibles por 3 o se superan $L - a$ términos que no lo son; estas dos últimas condiciones no pueden darse antes del cierre en un ciclo con parámetros (L,a). Ningún m resulta ser el mínimo de un ciclo. La función de búsqueda del apéndice acepta cualquier retorno a m, sin exigir que ocurra exactamente en el paso L con exactamente a términos divisibles por 3; un retorno con otros parámetros sería igualmente un ciclo nuevo con mínimo mayor que 10^5, de modo que esta comprobación es más exigente que la necesaria y no puede pasar por alto ningún ciclo. El código figura en el Apéndice A. La búsqueda se ha repetido con un programa independiente, que obtiene los pares (L,a) a partir de la cota (6) confirmada con (10) y descarta los candidatos mediante una cota de magnitud (aun con todos los pasos contractivos restantes, el valor no podría volver a m) en lugar de por composición; ha dado los mismos 53 pares y ningún retorno a m. □

Comentario 8.19. En el superviviente $(665, 276)$ se tiene $K/L = 1054/665$, una reducida de $\log_2 3$; en el otro, $K/L = 1539/971$, que no es una reducida sino una fracción intermedia, la mediante de $485/306$ y $1054/665$. El tamiz de la Proposición 8.13 es aquí más fino que la condición de Legendre del Teorema 8.17. Entre 1001 y 5000 sobrevive también $(L,a) = (1024, 425)$, con $K/L = 1623/1024$, que no es reducida ni fracción intermedia: la banda que deja el tamiz admite fracciones de otros tipos. Las reducidas de $\log_2 3 = [1; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, \dots]$ son

$$\tfrac{1}{1},\ \tfrac{2}{1},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{8}{5},\ \tfrac{19}{12},\ \tfrac{65}{41},\ \tfrac{84}{53},\ \tfrac{485}{306},\ \tfrac{1054}{665},\ \tfrac{24727}{15601},\ \dots$$

Observación 8.20. Los cuatro ciclos conocidos corresponden a cuatro reducidas consecutivas de $\log_2 3$:

ciclo	L	a	K/L
(1)	1	0	$2/1$
$(2,3)$	2	1	$3/2$
$(4,5,7,9,6)$	5	2	$8/5$
longitud 12 (mínimo 44)	12	5	$19/12$

El punto fijo y el ciclo $(2,3)$ cumplen la condición (9) del Teorema 8.17, así que para ellos la correspondencia es forzosa; los ciclos de longitudes 5 y 12 no la cumplen, y para ellos la coincidencia es un hecho observado y no una consecuencia del teorema.

La relación entre las longitudes $1, 2, 5, 12$ y el desarrollo en fracción continua de $\log_2 3$ ya fue observada por Shanks en 1965, según recoge la bibliografía anotada de Lagarias [3]. Atkin (1966) matizó esa heurística con un ejemplo: la permutación emparentada $f(3n) = 4n + 3$, $f(3n+1) = 2n$, $f(3n+2) = 4n+1$ tiene un ciclo de periodo 94, con menor término 140, y 94 no es denominador de ninguna reducida de $\log_2 3$ [3]. Lo hemos comprobado: en ese ciclo $K/L = 149/94$, con $|\log_2 3 - 149/94| \approx 1{,}4 \cdot 10^{-4}$, mayor que $1/(2 \cdot 94^2)$, y la condición análoga a (9) no se cumple porque el mínimo es pequeño frente a la longitud. El ejemplo es, por tanto, compatible con el Teorema 8.17 y muestra que la correspondencia observada no es automática.

Comentario 8.21. Según la misma bibliografía [3], Atkin describió un método que determina en principio todos los ciclos de un periodo dado y comprobó por ordenador que, aparte de los ciclos de periodos $1, 2, 5$ y 12, no hay otros ciclos de periodo menor que 200. El Corolario 8.18 trata los periodos hasta 5000; en particular, no hay ningún ciclo de periodo 41, que correspondería a la reducida $65/41$. Simons [7] clasifica los ciclos de esta permutación por su número m de mínimos locales y los estudia con formas lineales en logaritmos: para $m \le 2$ no hay más ciclos que (1), $(2,3)$ y $(4,5,7,9,6)$; para $m = 3, 4, 5$ excluye los ciclos con elementos menores que 10^6 y deja abiertos, para elementos mayores, entre otros, los casos con periodo y número de términos divisibles por 3 iguales a $(665, 276)$, $(1330, 552)$, $(1636, 679)$ y $(1995, 828)$. Esos cuatro casos están entre los que excluye el Corolario 8.18. La bibliografía da 144 como menor elemento del ciclo de periodo 12; es una errata por 44, ya señalada en la OEIS [4]: la órbita de 144 empieza $144, 96, 64, 85, 113, \ldots$, y por la Proposición 7.1 el 144 no pertenece a ningún ciclo de longitud a lo sumo 5000. Según la misma bibliografía, Keller [16] demostró en 1999 que, para cada L, ciertas permutaciones periódicamente lineales, una de las cuales es conjugada de g, tienen solo un número finito de ciclos de periodo L; el Corolario 8.10 obtiene esa finitud para g con una demostración distinta. Keller conjeturó además que, para periodos grandes, los periodos de los ciclos son denominadores de reducidas.

Comentario 8.22 (alcance de la verificación). En el problema $3x + 1$, la búsqueda de ciclos se apoya en la comprobación de que todo entero hasta una cota muy grande llega a 1: un entero que llega a 1 no puede ser el mínimo de un ciclo nuevo, y esa comprobación, combinada con cotas del tipo (7), excluye ciclos de longitudes muy grandes [3]. Para g no hay nada equivalente. El mínimo de una órbita biinfinita, como 8 o 14, nunca vuelve a bajar de sí mismo, de modo que ningún cálculo finito puede certificar que no es el mínimo de un ciclo de periodo arbitrariamente grande; esa es precisamente la pregunta de Collatz sobre el 8. En la búsqueda del Corolario 8.18, la iteración desde un mínimo de este tipo nunca se detiene por bajar de él, y el coste de la verificación crece con el periodo sin que la cota pueda ampliarse de forma comparable a la del problema $3x + 1$. Tavares [13] hace una observación del mismo tipo: a diferencia del problema $3x + 1$, donde los ordenadores verifican la conjetura para una cantidad enorme de valores, no está claro cómo podría ayudar el ordenador a elegir una respuesta a la pregunta de si g tiene solo un número finito de órbitas. El interés del Corolario 8.18 está en los casos concretos que excluye, entre ellos los que Simons dejó abiertos, más que en la magnitud de la cota.

9. El problema abierto

Problema 9.1 (Collatz, 1932)**.**

1. ¿Pertenece 8 a un ciclo finito de g? Equivalentemente, por la Proposición 4.1, ¿es acotada la semiórbita positiva $\{g^k(8) : k \geq 0\}$?
2. ¿Tiene g otros ciclos además de los cuatro de la Proposición 5.1?

Lo demostrado en esta nota es que g es una permutación con inversa explícita, que sus órbitas obedecen a la dicotomía de la Proposición 4.1 y que los cuatro ciclos citados existen, así como la caracterización de los ciclos por sus palabras de residuos (Teorema 8.8) y las restricciones de la sección 8 sobre cualquier ciclo. Los datos de la Observación 6.1 y la Proposición 7.1 son verificaciones computacionales. El Corolario 8.18, según el cual los únicos ciclos de periodo a lo sumo 5000 son los cuatro conocidos, es una demostración asistida por ordenador: las restricciones de la sección 8 reducen el problema a un conjunto finito explícito de candidatos, que se comprueba exhaustivamente con aritmética entera exacta. Lo heurístico es el Comentario 6.2, que apunta a que la órbita de 8 es infinita. La correspondencia de los ciclos de longitudes 5 y 12 con reducidas de $\log_2 3$ (Observación 8.20) es, por ahora, un hecho observado, ya señalado por Shanks en 1965. Las dos preguntas siguen abiertas.

A. Código

```
def g(n):
    q, r = divmod(n, 3)
    return (2*q, 4*q + 1, 4*q + 3)[r]

def ginv(m):
    if m % 2 == 0:
        return 3*m // 2
    return (3*m + 1)//4 if m % 4 == 1 else (3*m - 1)//4

# comprobación de la inversa
assert all(ginv(g(n)) == n and g(ginv(n)) == n for n in range(1, 10**6))

# búsqueda de ciclos: mínimo m <= 10^5, longitud <= 5000
ciclos = []
for m in range(1, 10**5 + 1):
    x, k = g(m), 1
    while x > m and k < 5000:
        x, k = g(x), k + 1
    if x == m:
        ciclos.append((m, k))
print(ciclos)   # [(1, 1), (2, 2), (4, 5), (44, 12)]

# órbita de 8: 10^6 pasos en cada sentido
import sys; sys.set_int_max_str_digits(0)
x = y = 8
for _ in range(10**6):
```

```
    x, y = g(x), ginv(y)
print(len(str(x)), len(str(y)))   # 24282 25655

# Corolario: tamiz exacto (enteros) para L <= 5000, m > 10^5
def c1(L, a, m): return 2**a * (4*m - 1)**(L - a) <= 3**L * m**(L - a)
def c2(L, a, m): return 3**L * m**(L - a) <= 2**a * (4*m + 1)**(L - a)
def admisibles(L, m):      # c1 vale si a >= a1; c2 si a <= a2
    lo, hi = 0, L + 1
    while lo < hi:
        mid = (lo + hi) // 2
        lo, hi = (lo, mid) if c1(L, mid, m) else (mid + 1, hi)
    a1, lo, hi = lo, -1, L
    while lo < hi:
        mid = (lo + hi + 1) // 2
        lo, hi = (mid, hi) if c2(L, mid, m) else (lo, mid - 1)
    return list(range(a1, lo + 1))
m0 = 100001
def cota(L, a):            # mayor m que cumple c1 y c2
    lo, hi = m0, 10**9
    while hi - lo > 1:
        mid = (lo + hi) // 2
        ok = c1(L, a, mid) and c2(L, a, mid)
        lo, hi = (mid, hi) if ok else (lo, mid)
    return lo
pares = [(L, a, cota(L, a)) for L in range(1, 5001)
         for a in admisibles(L, m0)]
print(len(pares), sum(L <= 1000 for L, a, mm in pares))
# 53 2  -> 2 pares con L <= 1000 y 51 con 1001 <= L <= 5000
print(pares[:2])  # [(665, 276, 2227739), (971, 403, 145107)]
cotas = [mm for L, a, mm in pares if L > 1000]
print(min(cotas), max(cotas))   # 100593 2227739

def es_minimo_de_ciclo(m, L, a):  # con poda por composición
    x, k, z = m, 0, 0
    while True:
        if x % 3 == 0:
            z += 1
            if z > a: return False
        x, k = g(x), k + 1
        if x <= m: return x == m
        if k - z > L - a or k >= L: return False
for L, a, mmax in pares:          # unos 40 minutos en total
    assert not any(m % 6 in (2, 4) and es_minimo_de_ciclo(m, L, a)
                   for m in range(m0, mmax + 1))
print('ningún ciclo nuevo de periodo <= 5000')
```

Nota sobre el uso de herramientas de inteligencia artificial

En la preparación de este escrito se han utilizado herramientas de inteligencia artificial como asistencia en la redacción, la estructuración y la presentación del texto. La autoría, el contenido matemático y la dirección conceptual del trabajo son del autor, que ha revisado todo el contenido y es responsable de él; las herramientas de inteligencia artificial han actuado como apoyo editorial y de formalización, no como fuente de las ideas ni de los resultados. Los cálculos en que se apoyan la Proposición 7.1, la Observación 6.1 y el Corolario 8.18 pueden reproducirse con el código del Apéndice A.

Referencias

[1] J. C. Lagarias, *The* $3x+1$ *problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23. Versión web anotada: https://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/node1-an.shtml

[2] S. R. Garcia y S. J. Miller, *100 Years of Math Milestones: The Pi Mu Epsilon Centennial Collection*, American Mathematical Society, 2019; entrada «1932. The $3x+1$ Problem», Centennial Problem 1932, propuesto por J. C. Lagarias.

[3] J. C. Lagarias, *The* $3x+1$ *problem: an annotated bibliography (1963–1999)*, arXiv:math/0309224; entradas sobre Klamkin (1963), Shanks (1965) y A. O. L. Atkin, *Comment on Problem 63-13**, SIAM Review **8** (1966), 234–236.

[4] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, sucesión A185590, https://oeis.org/A185590.

[5] S. Kohl, *Algorithms for a class of infinite permutation groups*, J. Symbolic Comput. **43** (2008), 545–581.

[6] M. Weitzer, *An introduction to p-adic systems: A new kind of number systems inspired by the Collatz* $3n+1$ *conjecture*, arXiv:1911.09624, 2019.

[7] J. L. Simons, *Cycles and divergent trajectories for a class of permutation sequences*, arXiv:2205.10582, 2022.

[8] R. Tremblay, *Generalized* $3x+1$ *mappings: searching for cycles*, arXiv:1907.13302, 2019.

[9] C. Böhm y G. Sontacchi, *On the existence of cycles of given length in integer sequences like* $x_{n+1} = x_n/2$ *if* x_n *even, and* $x_{n+1} = 3x_n+1$ *otherwise*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **64** (1978), 260–264.

[10] J. C. Lagarias, *The set of rational cycles for the* $3x+1$ *problem*, Acta Arith. **56** (1990), 33–53.

[11] M. S. Klamkin, *Problem 63-13**, SIAM Rev. **5** (1963), 275–276.

[12] K. R. Matthews y A. M. Watts, *A generalization of Hasse's generalization of the Syracuse algorithm*, Acta Arith. **43** (1984), 167–175.

[13] M. Tavares, *A remark about the density of the orbits of the Collatz permutation*, Discrete Math. **313** (2013), 2139–2145.

[14] G. Venturini, *On a generalization of the* $3x+1$ *problem*, Adv. in Appl. Math. **19** (1997), 295–305.

[15] M. Cerdá Bennassar, *Sobre los orígenes del problema de Collatz*, 2026, https://www.collatz.es/articulos/seccion1_0/Sobre_los_origenes_del_problema_de_Collatz.pdf.

[16] T. P. Keller, *Finite cycles of certain periodically linear permutations*, Missouri J. Math. Sci. **11** (1999), 152–157.