Sobre los orígenes del problema de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Antes del problema $3n+1$, Lothar Collatz dejó anotada, el 1 de julio de 1932, una función definida módulo 3 que da lugar a una permutación de los enteros positivos, junto con la pregunta de si la órbita del número 8 es finita o infinita. Esa pregunta sigue abierta. Esta nota reúne y traduce dos documentos de 1980 relacionados con los orígenes de las investigaciones de Collatz: su carta a Michael E. Mays y un fragmento de una carta de Lynn E. Garner. Se analiza en particular la pregunta que Collatz dice haber planteado en sus clases, ¿pertenece $n = 80$ a un ciclo?, que no encaja con la función $3n+1$ a la que la carta la atribuye y sí con el problema de 1932.

1. Introducción

Lothar Collatz (1910–1990) es hoy inseparable del problema $3n+1$. Sin embargo, el origen exacto de ese problema es oscuro: circuló de palabra durante años, recibió muchos nombres (problema de Siracusa, de Kakutani, de Ulam, algoritmo de Hasse) y B. Thwaites llegó a reclamar haberlo originado en 1952 [1].

Lo que sí está documentado es que, siendo estudiante a comienzos de los años treinta, Collatz se interesó por las funciones de la teoría de números y por representarlas como grafos dirigidos, y que en su cuaderno del 1 de julio de 1932 estudió una función módulo 3 distinta del $3n+1$ [1]. Esta nota presenta ese problema de 1932 y dos documentos de 1980, conservados en la Simon Fraser University dentro del material reunido por Jeffrey C. Lagarias, que permiten situar mejor el relato del propio Collatz.

2. El problema de 1932

En su cuaderno del 1 de julio de 1932, Collatz consideró la función

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{3}, & n \equiv 0 \pmod 3, \\ \dfrac{4n-1}{3}, & n \equiv 1 \pmod 3, \\ \dfrac{4n+1}{3}, & n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

que da lugar a una permutación de los enteros positivos [1]:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 9 & 11 & 6 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Collatz planteó el problema de determinar la estructura de ciclos de esta permutación y preguntó, en particular, si la órbita que contiene al 8 es finita o infinita [1]. Se conocen los ciclos

$$(1), \qquad (2,\,3), \qquad (4,\,5,\,7,\,9,\,6), \qquad (44,\,59,\,79,\,105,\,70,\,93,\,62,\,83,\,111,\,74,\,99,\,66),$$

y 8 es el menor entero positivo que no pertenece a ninguno de ellos.

Collatz no publicó sus problemas de iteración, pero los hizo circular en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1950, en Cambridge (Massachusetts). El problema original acabó apareciendo impreso como problema propuesto por M. S. Klamkin en la *SIAM Review* de 1963, con comentarios posteriores de D. Shanks (1965), que incluyen una búsqueda por ordenador, y de A. O. L. Atkin (1966) [1]. Lagarias lo llama *problema original de Collatz*, y en 2019 volvió a proponerlo como problema abierto, señalando que los cálculos llevan la órbita de 8 por encima de 10^{400} sin que se sepa si es infinita [2].

El estudio matemático elemental de esta permutación (biyectividad, inversa, estructura de las órbitas y datos computacionales sobre la órbita de 8) se hace en el escrito *La permutación original de Collatz de 1932*, de esta misma sección.

3. La carta a M. E. Mays (1980)

3.1. El documento

El 17 de septiembre de 1980, Collatz, entonces en el Instituto de Matemática Aplicada de la Universidad de Hamburgo, respondió en alemán a una carta de Michael E. Mays (Universidad de Virginia Occidental) que se interesaba por la función

$$T(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (3n+1)/2, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

La carta, de dos páginas, acompañada de un boceto a mano y de un fragmento de una carta de L. E. Garner, se reproduce en el material de la Simon Fraser University con permiso de Mays [1], junto con una traducción inglesa de M. Meudt y J. Read [3]. La traducción española del Apéndice A se ha hecho directamente del original alemán (Figuras 3 y 4).

3.2. Lo que cuenta Collatz

Collatz recuerda que estudió T *hace casi cincuenta años*, junto con otras funciones aritméticas, a raíz de las clases de Landau y Lettenmeyer en Gotinga (1929) y de Perron en Múnich y Schur en Berlín (1930). Dice que representaba esas funciones como grafos, con una flecha de n a $f(n)$, o escribiendo $f(n)$ debajo de n, que reconocía en ellos árboles, ciclos y bifurcaciones, y que construyó así los grafos de muchas funciones, normalmente para n hasta aproximadamente 100. Añade que él escribía el ejemplo en la forma esencialmente equivalente

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ 3n+1, & n \text{ impar}, \end{cases}$$

con la única diferencia de que, para n impar, su versión pasa por $3n+1$ antes de llegar a $(3n+1)/2$.

La referencia a «casi cincuenta años» apunta a comienzos de los años treinta, la misma época que la anotación del 1 de julio de 1932. La fecha de 1937 que suele darse para el $3n+1$ no aparece en estos documentos.

3.3. La pregunta sobre $n = 80$

Collatz cuenta a continuación que, en sus clases y en algunos congresos, presentó «este ejemplo» y lo planteó como problema: *¿pertenece el número $n = 80$ a un ciclo o no?* Con su pequeña calculadora de mesa no encontró ningún ciclo para $n = 80$, y no pudo responder.

En el original mecanografiado se lee «n=8o»: la máquina escribe la cifra 0 como «o» (así aparecen 193o, 5o y 1oo en la misma carta), y la traducción de Meudt y Read lee también $n = 80$ [3].

Tal como está escrita, la pregunta no encaja con la función a la que la carta la atribuye. Para el $3n+1$,

$$80 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1,$$

de modo que 80 alcanza el ciclo trivial en nueve pasos, cálculo que no requiere calculadora alguna. El propio boceto que Collatz adjuntó a la carta (Figura 1) muestra el 80 encima del 40, en la rama que desciende hasta el ciclo $1 \to 4 \to 2$. Lo mismo ocurriría si se leyera $n = 8$.

En cambio, la pregunta tiene pleno sentido para la permutación de 1932: allí la pertenencia de un número a un ciclo es una cuestión genuina, 8 es el caso abierto documentado y también 80 queda fuera de los ciclos conocidos. Lagarias no toma su relato de la pregunta sobre el 8 de esta carta, sino de otra carta de Collatz, dirigida a Garner el 17 de marzo de 1980 [1], y la pregunta impresa por Klamkin en 1963 se refiere también al 8 y a la permutación.

La explicación más plausible es, por tanto, que cincuenta años después Collatz atribuyó al ejemplo $3n+1$ una pregunta que pertenecía a su problema de 1932, y que el 80 en lugar del 8 es un desliz de memoria o de escritura. Es una interpretación nuestra: la carta, por sí sola, no permite decidirlo.

3.4. La posdata sobre Hasse

En la posdata, Collatz añade que H. Hasse llamó a «la cuestión anterior» (*obige Fragestellung*) el «problema de Collatz». Dada la ambigüedad señalada en la sección 3.3, el texto no permite asegurar a cuál de los dos problemas se refería Hasse. Lo documentado es que Hasse se interesó por el $3x+1$ y discutió generalizaciones suyas con muchas personas, de donde procede el nombre *algoritmo de Hasse*, y que propuso el nombre *problema de Siracusa* tras una visita a la Universidad de Syracuse en los años cincuenta [1].

4. El fragmento de L. E. Garner

Collatz adjuntó a su carta una copia del resultado parcial que le había enviado Lynn E. Garner, de la Universidad Brigham Young (Figura 2; traducción en el Apéndice B). Garner cuenta que el «algoritmo $3n+1$» le había interesado durante el último año, que solo recientemente había sabido que el nombre de Collatz estaba asociado al problema, y que había probado que un ciclo que no contenga al 1 debe tener al menos 13 700 términos impares. Garner publicó su trabajo sobre ciclos del algoritmo en 1981 [4].

5. Conclusión

Los documentos permiten establecer lo siguiente:

1. El 1 de julio de 1932, Collatz anotó una función módulo 3 que es una permutación de los enteros positivos, y preguntó si la órbita del 8 es finita o infinita. Ese es el problema original de Collatz, y sigue abierto [1, 2].
2. En 1980, Collatz afirmó haber estudiado el $3n + 1$ casi cincuenta años antes, es decir, en la misma época, mediante la representación de funciones aritméticas como grafos.
3. La pregunta que la carta de 1980 atribuye al $3n + 1$, ¿pertenece $n = 80$ a un ciclo?, es trivial para esa función y solo tiene sentido para la permutación de 1932, lo que sugiere que Collatz mezcló en el recuerdo ambos problemas.
4. El nombre «problema de Collatz» procede, según el propio Collatz, de Hasse, sin que la carta permita precisar a cuál de los dos problemas se aplicó en origen.

Agradecimientos

Los documentos reproducidos en esta nota proceden del material de la Simon Fraser University asociado al trabajo de Jeffrey C. Lagarias sobre el problema $3x + 1$ y sus generalizaciones. Agradezco a la institución, a J. C. Lagarias, a M. E. Mays, que permitió su difusión, y a M. Meudt y J. Read, autores de la traducción inglesa de la carta, la conservación y difusión de este material.

A. Traducción de la carta de L. Collatz a M. E. Mays

Universidad de Hamburgo, Instituto de Matemática Aplicada. Prof. Dr. L. Collatz.

Al Prof. Michael E. Mays, Department of Mathematics, College of Arts and Sciences, Morgantown, West Virginia 26506, EE. UU.

17 de septiembre de 1980

Estimado profesor Mays:

Muchas gracias por su carta y por su interés en la función

$$Tn = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (3n+1)/2, & n \text{ impar}, \end{cases}$$

que estudié con detalle hace casi cincuenta años, junto con otras diversas funciones de la teoría de números. En 1929 asistí a las clases de E. Landau y a las lecciones de teoría de números de Lettenmeyer, ambos en Gotinga, y en 1930 a las clases de O. Perron en Múnich y de Isai Schur en Berlín[1], y me pareció interesante representar los grafos de funciones aritméticas $f(n)$ dibujando una flecha de n a $f(n)$ o, más sencillamente, escribiendo $f(n)$ debajo de n. Se podían reconocer entonces diversos conceptos conocidos en la teoría de grafos dirigidos (*digraphs*), como árboles (*trees*), números de conexión, ciclos (*cycles*), bifurcaciones (*bifurcation*), etc. No sé quién estudió primero estas relaciones con la teoría de grafos; en todo caso, yo no había conocido este tipo de representación de las funciones aritméticas ni en clases ni en publicaciones. Me divertía observar los distintos fenómenos,

[1] Así escribe Collatz el nombre de Issai Schur.

y por entonces construí los grafos de muchísimas funciones aritméticas, normalmente para valores de n hasta aproximadamente 100. Así estudié también el ejemplo mencionado arriba, que yo había escrito en la forma esencialmente equivalente

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ 3n+1, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

La diferencia no esencial está en n impar: en su caso, $n \to (3n+1)/2$; en el mío, $n \to 3n+1 \to (3n+1)/2$.

Cuando más tarde di yo mismo clases de teoría de números, presenté este ejemplo, lo mencioné también en varias ocasiones en congresos y lo planteé como problema: ¿pertenece el número $n = 80$[2] a un ciclo o no? Por entonces yo solo disponía de una pequeña calculadora de mesa y, hasta donde pude calcular con ella, para $n = 80$ no resultaba ningún ciclo, y no pude responder a la pregunta. Desde entonces he hablado sobre esta cuestión con varios especialistas en teoría de números, pero, que yo sepa, todavía no ha sido respondida. Se han obtenido resultados parciales. Así, el profesor Garner (dirección adjunta) me escribió un resultado parcial, cuya copia le adjunto. Le adjunto además, en copia, un pequeño fragmento de mis dígrafos dibujados. Si tiene noticia de una solución, le agradecería mucho que me lo comunicara.

Disculpe que le escriba esta carta en alemán; espero que encuentre a alguien que se la pueda traducir.

Con un cordial saludo, muy atentamente,

[Firma]

P. D.: Si no es demasiado inmodesto, quizá pueda mencionar que el profesor H. Hasse llamó a la cuestión anterior «el problema de Collatz».

B. Traducción del fragmento de L. E. Garner

Durante el último año me ha interesado el «algoritmo $3n+1$», en el que, a partir de cualquier entero positivo n, se obtiene un nuevo entero, $n/2$ (n par) o $3n+1$ (n impar). Solo recientemente he sabido que su nombre está asociado a este problema.

El único resultado tangible que he podido obtener hasta ahora es que, si hay ciclos que no contienen al 1, deben ser largos: debe haber un mínimo de 13 700 términos impares.

Lynn E. Garner, Department of Mathematics, Brigham Young University, Provo, Utah 84602.

[2] En el original, «n=8o»; véase la sección 3.3.

C. Documentos

Boceto a mano de Collatz

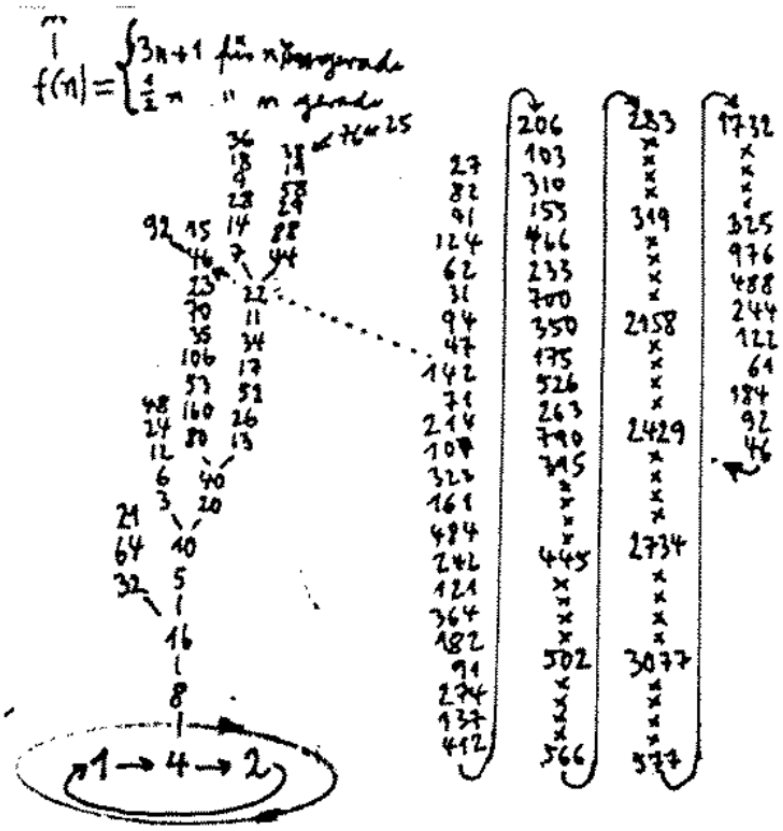
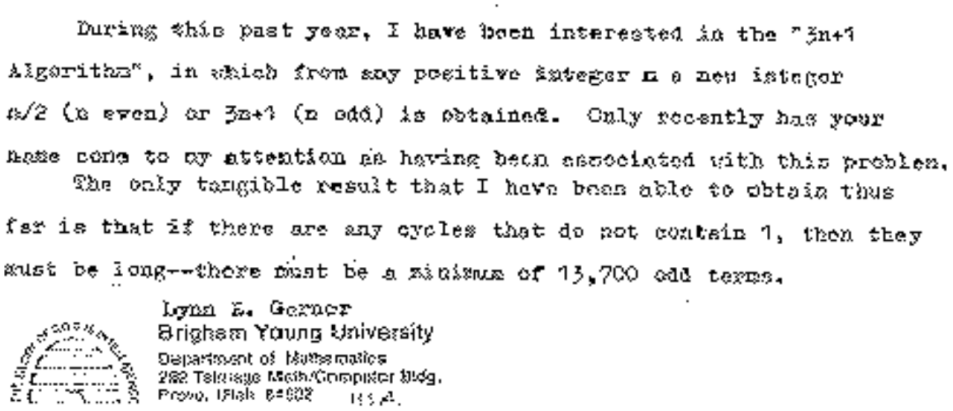


Figura 1: Fragmento de los dígrafos del $3n+1$ dibujados a mano por Collatz, adjunto a su carta a Mays. A la izquierda, la rama $160 \to 80 \to 40 \to 20 \to \cdots$ desciende hasta el ciclo $1 \to 4 \to 2$; en la columna central aparece la trayectoria de 27.

Letter written by Garner to Collatz



During this past year, I have been interested in the "3n+1 Algorithm", in which from any positive integer n a new integer n/2 (n even) or 3n+1 (n odd) is obtained. Only recently has your name come to my attention as having been associated with this problem.

The only tangible result that I have been able to obtain thus far is that if there are any cycles that do not contain 1, then they must be long--there must be a minimum of 13,700 odd terms.

Lynn E. Garner
Brigham Young University
Department of Mathematics
282 Talmage Math/Computer Bldg.
Provo, Utah 84602 U.S.A.

Figura 2: Fragmento de la carta de L. E. Garner a L. Collatz.

UNIVERSITÄT HAMBURG

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Prof. Dr. L. Collatz

Bundesstr. 55

Herrn
Prof. Michael E. Mays
Department of Mathematics
College of Arts and Sciences
Morgantown, West Virginia
26506
USA

Datum und Zeichen Ihres Schreibens | Aktenzeichen (bei Antwort bitte angeben) | Datum
Co/Sch | 17. September 1980

Betreff
Dear Professor Mays!

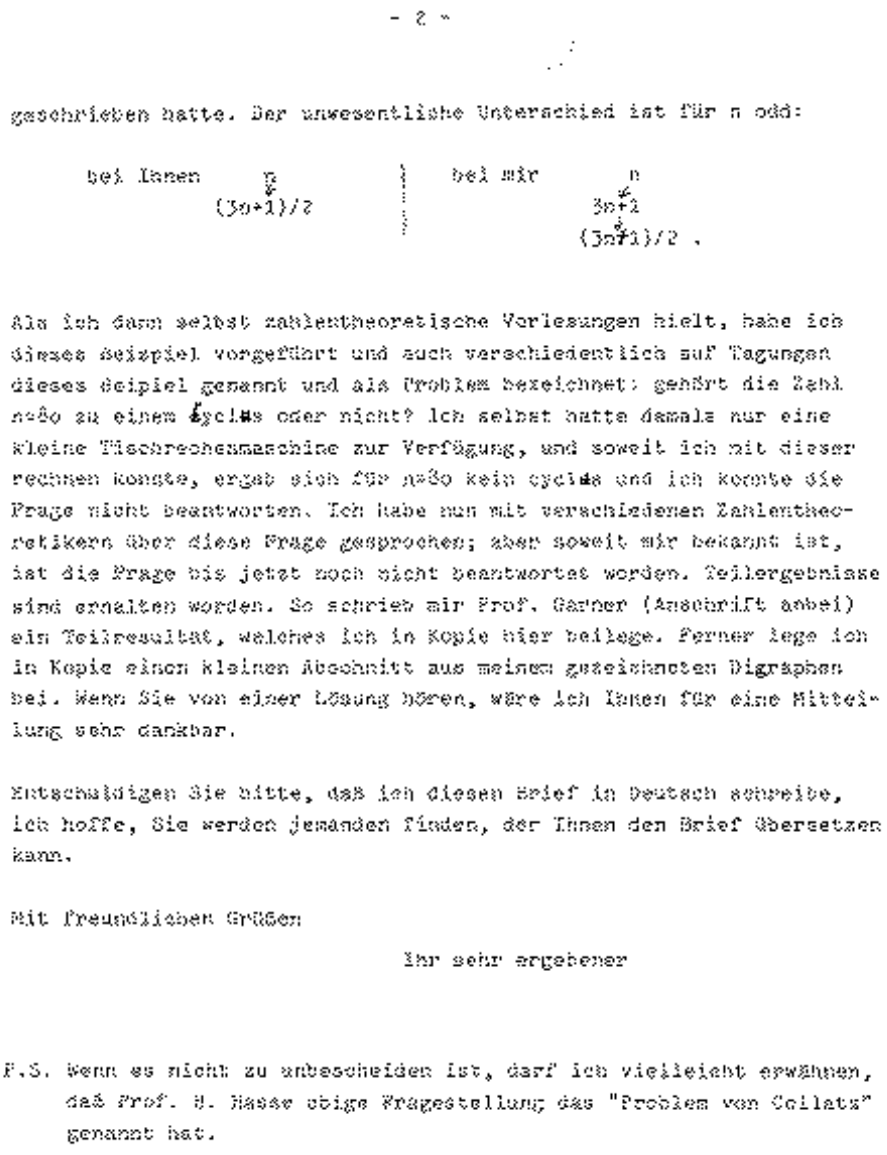
Vielen Dank für Ihren Brief und für Ihr Interesse an der Funktion

$$Tn = \begin{cases} n/2 & n \text{ even} \\ (3n+1)/2 & n \text{ odd,} \end{cases}$$

die ich vor fast 50 Jahren neben verschiedenen anderen zahlentheoretischen Funktionen näher betrachtet habe. Ich hatte 1929 Vorlesungen von E. Landau und zahlentheoretische Vorlesungen von Lettenmeyer, beide in Göttingen und 1930 Vorlesungen von O. Perron in München und Isai Schur in Berlin gehört und ich fand es interessant, die Graphen von zahlentheoretischen Funktionen f(n) aufzuzeigen, indem ich einen Pfeil von n zu f(n) zeichnete oder einfacher, indem ich f(n) unter n hinschrieb. Man konnte dann verschiedene Begriffe wiederfinden, die in der Theorie gerichteter Graphen (digraphs) bekannt sind, wie Bäume (trees) Zusammenhangszahlen, Kreise (cycles) Verzeigungen (bifurcation) usw. Ich weiß nicht, wer als erster diese Beziehungen zur Graphentheorie untersucht hat; ich hatte jedenfalls weder in Vorlesungen noch in Veröffentlichungen diese Art der Darstellung zahlentheoretischer Funktionen kennengelernt. Mir machte es jedenfalls Spaß, die verschiedenen Erscheinungen zu beobachten und ich habe damals die Graphen zu sehr vielen zahlentheoretischen Funktionen gewöhnlich für Werte von n bis etwa 100 aufgestellt. So habe ich auch das obengenannte Beispiel betrachtet, welches ich/der im wesentlichen gleichwertigen Form

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & n \text{ even} \\ 3n+1 & n \text{ odd} \end{cases}$$

Figura 3: Carta de L. Collatz a M. E. Mays, 17 de septiembre de 1980. Página 1.



- 2 -

geschrieben hatte. Der unwesentliche Unterschied ist für n odd:

bei Ihnen $\frac{n}{(3n+1)/2}$ | bei mir $\frac{n}{3n+1}$ $\frac{}{(3n+1)/2}$.

Als ich dann selbst zahlentheoretische Vorlesungen hielt, habe ich dieses Beispiel vorgeführt und auch verschiedentlich auf Tagungen dieses Beipiel genannt und als Problem bezeichnet: gehört die Zahl n=8o zu einem Cyclus oder nicht? Ich selbst hatte damals nur eine kleine Tischrechenmaschine zur Verfügung, und soweit ich mit dieser rechnen konnte, ergab sich für n=8o kein cyclus und ich konnte die Frage nicht beantworten. Ich habe nun mit verschiedenen Zahlentheoretikern über diese Frage gesprochen; aber soweit mir bekannt ist, ist die Frage bis jetzt noch nicht beantwortet worden. Teilergebnisse sind erhalten worden. So schrieb mir Prof. Garner (Anschrift anbei) ein Teilresultat, welches ich in Kopie hier beilege. Ferner lege ich in Kopie einen kleinen Abschnitt aus meinem gezeichneten Digraphen bei. Wenn Sie von einer Lösung hören, wäre ich Ihnen für eine Mitteilung sehr dankbar.

Entschuldigen Sie bitte, daß ich diesen Brief in Deutsch schreibe, ich hoffe, Sie werden jemanden finden, der Ihnen den Brief übersetzen kann.

Mit freundlichen Grüßen

Ihr sehr ergebener

P.S. Wenn es nicht zu unbescheiden ist, darf ich vielleicht erwähnen, daß Prof. H. Hasse obige Fragestellung das "Problem von Collatz" genannt hat.

Figura 4: Carta de L. Collatz a M. E. Mays. Página 2. La pregunta sobre «n=8o» aparece en el segundo párrafo.

Referencias

[1] J. C. Lagarias, *The* $3x+1$ *problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23. Versión web anotada, con la carta de Collatz a Mays, el boceto y el fragmento de Garner: https://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/node1-an.shtml

[2] S. R. Garcia y S. J. Miller, *100 Years of Math Milestones: The Pi Mu Epsilon Centennial Collection*, American Mathematical Society, 2019; entrada «1932. The $3x + 1$ Problem», Centennial Problem 1932, propuesto por J. C. Lagarias.

[3] M. Meudt y J. Read, *Translation of the Collatz letter*, en el material de la Simon Fraser University asociado a [1]: https://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/goodies/ubersetzung/html/ubersetzung.html

[4] L. E. Garner, *On the Collatz* $3n + 1$ *algorithm*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), 19–22.