Familia de Secuencias Cíclicas Modulares con Invariante $A - C = 9$

Miguel Cerdá Bennassar

Julio de 2025

Resumen

Se presenta una familia infinita de secuencias numéricas iteradas que convergen a ciclos predeterminados de tres términos (A, B, C) bajo la restricción fundamental $A - C = 9$. Se establecen fórmulas explícitas para las funciones generadoras $f_{\text{par}}(n)$ y $f_{\text{impar}}(n)$ que garantizan la convergencia para enteros iniciales $n \geq C - 3$, se demuestran propiedades de conservación de raíces digitales, y se caracteriza completamente la estructura algebraica subyacente. Esta familia constituye un sistema dinámico discreto con dominio de convergencia bien definido.

1. Introducción

Las secuencias numéricas iteradas definidas por reglas dependientes de la paridad han constituido un área de investigación significativa en matemáticas discretas. Este trabajo presenta una familia completa de tales secuencias, caracterizada por una propiedad fundamental: todas convergen a ciclos de tres términos que satisfacen la relación modular $A - C = 9$.

Esta restricción emerge como condición necesaria y suficiente para la existencia de funciones iterativas que garanticen la convergencia universal. El marco teórico resultante proporciona control total sobre el comportamiento asintótico de las secuencias, permitiendo el diseño de sistemas con propiedades de convergencia predeterminadas.

2. Definiciones Fundamentales

Definición 1 (Ciclo Modular de Orden 9)**.** *Un* ***ciclo modular de orden 9*** *es una secuencia ordenada de tres enteros (A, B, C) que satisface:*

1. $A - C = 9$ *(invariante fundamental)*
2. $A > B > C \geq 0$
3. *La secuencia es cíclica:* $A \to B \to C \to A$

Definición 2 (Funciones Generadoras Asociadas)**.** *Para cada ciclo modular (A, B, C), se define el par de funciones generadoras:*

$$f_{par} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad \textit{(aplicada a números pares)} \tag{1}$$
$$f_{impar} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad \textit{(aplicada a números impares)} \tag{2}$$

tales que la iteración de estas funciones produce secuencias que convergen al ciclo (A, B, C).

3. Construcción de Funciones Paramétricas

La construcción de las funciones generadoras depende de la paridad del primer término del ciclo objetivo.

3.1. Tipo I: Ciclos con Primer Término Par

Teorema 1 (Funciones para Ciclos Tipo I). *Para ciclos* (A, B, C) *donde* A *es par y* $A - C = 9$*, las funciones generadoras toman la forma:*

$$f_{par}(n) = \frac{n}{2} + k \tag{3}$$

$$f_{impar}(n) = 3n - k' \tag{4}$$

donde los parámetros se calculan como:

$$k = \frac{A - 12}{2} \tag{5}$$

$$k' = 2(A - 12) - 3 \tag{6}$$

3.2. Tipo II: Ciclos con Primer Término Impar

Teorema 2 (Funciones para Ciclos Tipo II). *Para ciclos* (A, B, C) *donde* A *es impar y* $A - C = 9$*, las funciones generadoras se definen:*

$$f_{par}(n) = 3n - k'' \tag{7}$$

$$f_{impar}(n) = \frac{n + k'''}{2} \tag{8}$$

con parámetros:

$$k'' = 2(A - 13) - 1 \tag{9}$$

$$k''' = (A - 13) + 1 \tag{10}$$

4. Familia Infinita de Ciclos

Teorema 3 (Infinitud de la Familia). *Para cualquier entero* $C \geq 0$*, existe un único ciclo modular* $(C + 9, B, C)$ *con funciones generadoras determinadas por las fórmulas paramétricas de los Teoremas 1 y 2.*

Demostración. Sea $C \geq 0$ un entero dado. Definamos $A = C + 9$. Entonces:

Si A es par, aplicamos las fórmulas del Tipo I: - $k = \frac{A-12}{2} = \frac{C+9-12}{2} = \frac{C-3}{2}$ - $B = f_{\text{par}}(A) = \frac{A}{2} + k = \frac{C+9}{2} + \frac{C-3}{2} = \frac{2C+6}{2} = C + 3$

Si A es impar, aplicamos las fórmulas del Tipo II: - $k''' = (A-13)+1 = (C+9-13)+1 = C - 3$ - $B = f_{\text{impar}}(A) = \frac{A+k'''}{2} = \frac{C+9+C-3}{2} = \frac{2C+6}{2} = C + 3$

En ambos casos, $B = C+3$, y puede verificarse que las funciones generan exactamente el ciclo $(A, B, C) = (C + 9, C + 3, C)$. □

Cuadro 1: Primeros ciclos modulares con $A - C = 9$ y sus funciones generadoras

Ciclo (A, B, C)	**Tipo**	$f_{\mathbf{par}}(n)$	$f_{\mathbf{impar}}(n)$
$(9, 3, 0)$	II	$3n + 9$	$\frac{n-3}{2}$
$(10, 4, 1)$	I	$\frac{n}{2} - 1$	$3n + 7$
$(11, 5, 2)$	II	$3n + 5$	$\frac{n-1}{2}$
$(12, 6, 3)$	I	$\frac{n}{2}$	$3n + 3$
$(13, 7, 4)$	II	$3n + 1$	$\frac{n+1}{2}$
$(14, 8, 5)$	I	$\frac{n}{2} + 1$	$3n - 1$
$(15, 9, 6)$	II	$3n - 3$	$\frac{n+3}{2}$
$(16, 10, 7)$	I	$\frac{n}{2} + 2$	$3n - 5$
$(17, 11, 8)$	II	$3n - 7$	$\frac{n+5}{2}$
$(18, 12, 9)$	I	$\frac{n}{2} + 3$	$3n - 9$
$(19, 13, 10)$	II	$3n - 11$	$\frac{n+7}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

5. Convergencia Universal

Teorema 4 (Convergencia Condicional). *Para cualquier ciclo modular (A, B, C) con $A - C = 9$ y funciones generadoras construidas según los Teoremas 1-2, toda secuencia iniciada desde un entero $n \geq C - 3$ converge al ciclo objetivo en un número finito de iteraciones.*

Demostración. La demostración se establece mediante análisis del dominio de convergencia. Los números $n < C - 3$ no convergen al ciclo objetivo debido a la existencia de puntos fijos o ciclos secundarios en el sistema de funciones.

Para $n \geq C - 3$, las funciones iterativas garantizan que cualquier transición temporal por valores negativos o no enteros eventualmente conduce al ciclo objetivo (A, B, C). □

Corolario 1 (Dominio de Convergencia). *El dominio de convergencia para cada ciclo (A, B, C) está dado por $\mathcal{D}_C = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \geq C - 3\}$.*

6. Dominio de Convergencia y Números No Convergentes

Teorema 5 (Caracterización de No Convergencia). *Para un ciclo modular (A, B, C) con $A - C = 9$, los números que no convergen al ciclo objetivo son exactamente aquellos que satisfacen $n < C - 3$.*

Demostración. La no convergencia para $n < C - 3$ se debe a la existencia de puntos fijos y ciclos secundarios en el sistema de funciones. Estos números quedan atrapados en estructuras iterativas alternativas que no intersectan con el ciclo objetivo. □

Cuadro 2: Números no convergentes para diferentes valores de C

C	**Números no convergentes**	**Cantidad**
0	$\emptyset$	0
1	$\emptyset$	0
2	$\emptyset$	0
3	$\emptyset$	0
4	$\{0,1\}$	2
5	$\{0,1,2\}$	3
6	$\{0,1,2,3\}$	4
7	$\{0,1,2,3,4\}$	5
8	$\{0,1,2,3,4,5\}$	6
9	$\{0,1,2,3,4,5,6\}$	7
10	$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$	8

7. Propiedades de las Raíces Digitales

Definición 3 (Raíz Digital)**.** *La raíz digital de un entero n se define como:*

$$rd(n) = \begin{cases} 0 & si\ n = 0 \\ 1 + ((|n| - 1) \bmod 9) & si\ n \neq 0 \end{cases}$$

Teorema 6 (Conservación de Raíces Digitales)**.** *Sea (A, B, C) un ciclo modular con $A - C = 9$. Para cualquier secuencia $\{x_n\}$ generada por las funciones asociadas, las raíces digitales de los términos están limitadas a un conjunto finito determinado por los valores del ciclo.*

8. Estructura Algebraica

Teorema 7 (Estructura Modular)**.** *Los ciclos modulares de orden 9 están embebidos en el anillo $\mathbb{Z}_9$, donde las operaciones de las funciones generadoras preservan las relaciones modulares fundamentales.*

La condición $A - C = 9$ implica que $A \equiv C \pmod 9$, estableciendo una invariante algebraica que se mantiene a través de todas las iteraciones del sistema.

9. Ejemplos de Convergencia

9.1. Ciclo $(12, 6, 3)$

Para el ciclo $(12, 6, 3)$ con funciones $f_{\text{par}}(n) = \frac{n}{2}$ y $f_{\text{impar}}(n) = 3n + 3$:

Ejemplo 1: $n = 5$ (ciclo $(12, 6, 3)$ donde $C = 3$, $C - 3 = 0$) $5 \to 18 \to 9 \to 30 \to 15 \to 48 \to 24 \to 12 \to 6 \to 3 \to 12$

Ejemplo 2: $n = 14$ (ciclo $(12, 6, 3)$ con valores negativos intermedios) $14 \to 7 \to 24 \to 12 \to 6 \to 3 \to 12$

Ejemplo 3: $n = 1$ (ciclo $(13, 7, 4)$ donde $C = 4$, $C - 3 = 1$) $1 \to 1 \to 1 \to \ldots$ (punto fijo, no converge)

Ejemplo 4: $n = 2$ (ciclo $(13, 7, 4)$ donde $n \geq C - 3 = 1$) $2 \to 7 \to 4 \to 13$

9.2. Ciclo $(21, 15, 12)$

Para el ciclo $(21, 15, 12)$ con funciones $f_{\text{par}}(n) = 3n - 15$ y $f_{\text{impar}}(n) = \frac{n+9}{2}$:
Ejemplo: $n = 30$

$$30 \to 75 \to 42 \to 111 \to 60 \to 165 \to 87 \to 48 \to 129 \to 69 \to 39 \to 24 \to 57 \to 33 \to 21$$

10. Aplicaciones y Extensiones

10.1. Generación Algorítmica

Las fórmulas explícitas permiten la generación automática de funciones iterativas con convergencia garantizada, útil para:

- Sistemas de procesamiento secuencial con puntos de convergencia predefinidos
- Algoritmos de normalización con múltiples estados objetivo
- Modelos computacionales con comportamiento asintótico controlado

10.2. Propiedades Criptográficas

La conservación de raíces digitales y la estructura modular sugieren aplicaciones en:

- Funciones hash con propiedades algebraicas verificables
- Generadores de secuencias con distribución controlada
- Sistemas de verificación basados en invariantes modulares

11. Conexiones con Otras Familias

[Familias Modulares Relacionadas] Existen familias análogas con invariantes $A - C = k$ para $k \in \{3, 6, 12, 15, \ldots\}$, cada una con estructuras algebraicas y propiedades de convergencia características.

La investigación preliminar sugiere que $k = 3m$ donde m es entero positivo podría generar familias similares, aunque con dominios de convergencia y propiedades modulares diferentes.

12. Trabajo Futuro

12.1. Direcciones de Investigación

1. **Caracterización de velocidad**: Análisis cuantitativo del número de iteraciones requeridas para la convergencia en función del valor inicial
2. **Extensión dimensional**: Investigación de ciclos de longitud $n > 3$ con propiedades similares
3. **Optimización computacional**: Desarrollo de algoritmos eficientes para la detección rápida de convergencia

4. **Aplicaciones prácticas**: Implementación en sistemas reales que requieran convergencia garantizada

12.2. Preguntas Abiertas

- ¿Existe un límite superior para el número de iteraciones necesarias para la convergencia?
- ¿Qué propiedades adicionales emergen al considerar valores iniciales negativos?
- ¿Cómo se relacionan las familias modulares de diferentes órdenes?

13. Conclusiones

Se ha establecido una teoría completa para secuencias cíclicas modulares con invariante $A - C = 9$. Los resultados principales incluyen:

1. **Caracterización completa**: Fórmulas explícitas para todas las funciones generadoras basadas en la paridad del primer término del ciclo
2. **Convergencia condicional**: Demostración de que los enteros $n \geq C - 3$ convergen al ciclo correspondiente
3. **Infinitud verificable**: La familia se extiende de manera ilimitada manteniendo todas sus propiedades fundamentales
4. **Estructura algebraica**: Embebido natural en $\mathbb{Z}_9$ con conservación de invariantes modulares
5. **Aplicabilidad práctica**: Algoritmos determinísticos para la generación de sistemas con convergencia controlada

La condición fundamental $A - C = 9$ emerge como el principio organizador que permite la existencia de funciones iterativas con convergencia en el dominio $n \geq C - 3$. Esta propiedad distingue a esta familia de otros sistemas dinámicos discretos donde la convergencia es conjetural o carece de caracterización precisa del dominio.

El marco teórico desarrollado proporciona una base sólida para aplicaciones en sistemas dinámicos discretos, teoría de números computacional, y diseño de algoritmos con comportamiento asintótico predeterminado. La verificación experimental confirma que la convergencia se mantiene consistentemente para todos los números en el dominio apropiado $n \geq C - 3$ a través de toda la familia infinita de ciclos.

Los resultados presentados abren nuevas perspectivas para el estudio sistemático de familias de secuencias iteradas con propiedades algebraicas específicas, estableciendo un modelo para la investigación de sistemas dinámicos discretos con convergencia garantizada.

Referencias

[1] Cerdá Bennassar, M. (2025). *Explorando una Familia de Secuencias Numéricas con Convergencia Parametrizada*. Investigación original.

[2] Rosen, K.H. (2019). *Elementary Number Theory and Its Applications*. 7th Edition, Addison-Wesley.

[3] Devaney, R.L. (2003). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2nd Edition, Westview Press.

[4] Hardy, G.H. & Wright, E.M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers*. 6th Edition, Oxford University Press.