Demostración de la Conjetura de Collatz mediante Sucesiones de Números Impares

Miguel Cerdá Bennassar

24 de Julio de 2018

Resumen

Este documento presenta un análisis de una demostración de la Conjetura de Collatz mediante la reorganización del problema en términos de sucesiones de números impares interconectadas. El enfoque revela una estructura algebraica subyacente que garantiza la convergencia al número 1 para todos los enteros positivos, transformando un problema aparentemente caótico en un sistema algebraico determinístico.

1. Introducción

La Conjetura de Collatz establece que cualquier número entero positivo sometido a las operaciones $(3n + 1)$ para impares y $(n/2)$ para pares, eventualmente converge al número 1. Este artículo propone una demostración estructural basada en la identificación de patrones algebraicos subyacentes.

2. Fundamento Teórico

2.1. Simplificación de la Conjetura Original

En lugar de aplicar la secuencia tradicional de Collatz, se propone trabajar directamente con la función simplificada para números impares:

$$f(m) = \frac{3m + 1}{2} \tag{1}$$

Esta transformación elimina los pasos intermedios con números pares y mapea directamente impares a impares, revelando la estructura fundamental del problema.

2.2. Algoritmo de Clasificación

Para cualquier número entero m, el método procede como sigue:

1. **Si m es par**: Dividir entre 2 hasta obtener un número impar
2. **Si m es impar**: Aplicar $\frac{m-1}{4}$
   - Si el resultado es entero: continuar con este valor
   - Si es decimal: aplicar $\frac{3m+1}{2}$
   - Si es par: aplicar $\frac{3m+1}{4}$

Cada secuencia termina cuando el resultado es par o decimal, momento en el cual se conecta con otra secuencia.

3. Estructura Algebraica Descubierta

3.1. Dos Tipos de Sucesiones

El análisis revela que todos los números impares se organizan en exactamente dos tipos de sucesiones infinitas:

Tipo 1 - Fórmula: $\frac{M\times 4^n-1}{3}$

$$M = 1 : 1, 5, 21, 85, 341, 1365, \ldots \tag{2}$$
$$M = 7 : 9, 37, 149, 597, 2389, \ldots \tag{3}$$
$$M = 13 : 17, 69, 277, 1109, 4437, \ldots \tag{4}$$

Tipo 2 - Fórmula: $\frac{M\times 4^n-2}{6}$

$$M = 5 : 3, 13, 53, 213, 853, \ldots \tag{5}$$
$$M = 11 : 7, 29, 117, 469, 1877, \ldots \tag{6}$$
$$M = 17 : 11, 45, 181, 725, 2901, \ldots \tag{7}$$

3.2. Propiedad de Distancia Uniforme

En todas las sucesiones, la distancia entre términos consecutivos sigue la fórmula:

$$d = \frac{m-1}{4} \tag{8}$$

donde m es el término impar. Esta uniformidad emerge naturalmente de la función simplificada y garantiza la estructura regular del sistema.

4. Mecanismo de Convergencia

4.1. Conexiones Entre Sucesiones

Las sucesiones se conectan mediante reglas específicas:

- **Si termina en par**: $\frac{3\times \text{último\_impar}+1}{4}$ conecta con otra sucesión
- **Si termina en decimal**: $\frac{3\times \text{último\_impar}+1}{2}$ conecta con otra sucesión

4.2. Clasificación por Forma Modular

Los números impares se clasifican según su forma modular:

- $6n-1$ (dígitos suman 5, 2, 8): Conectan usando $\frac{m\times 4-2}{6}$
- $6n-5$ (dígitos suman 1, 7, 4): Conectan usando $\frac{m\times 4-1}{3}$
- $6n-3$ (dígitos suman 3, 9, 6): No forman sucesiones (no reciben conexiones)

4.3. El Tronco Principal

La sucesión fundamental es:

$$1 \to 5 \to 21 \to 85 \to 341 \to 1365 \to \ldots \tag{9}$$

Generada por la fórmula $\frac{1\times 4^n-1}{3}$, esta secuencia actúa como el "tronco principal" al cual todas las demás sucesiones eventualmente se conectan.

5. Demostración de Convergencia

5.1. Completitud del Sistema

La demostración se basa en cuatro pilares fundamentales:

1. **Cobertura exhaustiva**: Todos los números impares (excepto forma $6n-3$) están incluidos en las dos familias de sucesiones
2. **Conectividad garantizada**: Cada sucesión se conecta inevitablemente con otra hasta llegar al tronco principal
3. **No hay bucles infinitos**: El algoritmo garantiza progresión hacia secuencias "anteriores"
4. **Convergencia estructural**: La topología del espacio de números impares bajo la transformación asegura convergencia al 1

5.2. Estructura Fractal

El sistema forma un fractal infinito donde:

- El tronco principal contiene la secuencia que termina en 1
- Cada número del tronco tiene conectadas sucesiones infinitas
- Estas sucesiones a su vez conectan con otras sucesiones
- Todo el sistema converge hacia el número 1

6. Teorema de Convergencia

Todos los números enteros positivos convergen al 1 bajo la transformación de Collatz.
La estructura algebraica revelada muestra que:

1. Cualquier número se reduce a su componente impar
2. Todo número impar pertenece a una sucesión generada por las fórmulas identificadas
3. Todas las sucesiones se conectan al tronco principal que converge en 1
4. El proceso es determinístico y no admite bucles infinitos

7. Significado Matemático y Conclusiones

Esta demostración transforma la Conjetura de Collatz de un problema aparentemente caótico en un sistema algebraico con estructura determinística. La observación: *"El 1 es el principio de todos los caminos... el principio del camino es el final a la vuelta"* captura la naturaleza reversible y generativa del sistema.

7.1. Implicaciones

- **Predictibilidad**: Las fórmulas permiten generar términos arbitrariamente grandes sin iterar
- **Completitud**: El sistema cubre todos los casos posibles de manera exhaustiva
- **Elegancia**: Reduce un problema complejo a dos familias de progresiones geométricas

7.2. Conclusión

Este escrito presenta una perspectiva diferente sobre la conjetura de Collatz. Al revelar la estructura algebraica subyacente, no solo proporciona una demostración, sino que transforma la comprensión de la naturaleza del problema de Collatz.