Demostración formal de la conjetura de Collatz mediante una estructura afín reversible

Autor: [Miguel Cerdá Bennassar]

Resumen

Se presenta una demostración matemática formal de la conjetura de Collatz. A través de una sucesión afín creciente y una función inversa completamente definida sobre los números impares positivos, se construye un grafo dirigido, acíclico y absorbente, cuyo nodo final es el número 1. Se demuestra que toda secuencia generada por la función de Collatz termina necesariamente en 1 y queda confinada al ciclo 4–2–1.

1. Definición funcional y objetivo

Definición 1.1. *Sea $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ definida por:*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & si\ n \equiv 0 \pmod 2 \\ 3n+1, & si\ n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Conjetura de Collatz: $\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(k)}(n) = 1$.

2. Sucesión afín generadora

Definición 2.1. *Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por:*

$$a_{n+1} = 4a_n + 1, \quad a_1 = 23$$

Proposición 2.2. *La solución general es:*

$$a_n = 23 \cdot 4^{n-1} + \frac{4^{n-1} - 1}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Por inducción. Verificado para $n = 1$, se asume para n y se demuestra para $n + 1$ aplicando la relación de recurrencia. □

Corolario 2.3. *Todo a_n es impar y estrictamente creciente.*

3. Función inversa total sobre los impares

Definición 3.1. *Definimos $g(n)$ como:*

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{4}, & si\ \frac{n-1}{4} \in \mathbb{Z}^+\ impar \\ 2(3r+1), & r = \frac{n-1}{4},\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

Teorema 3.2. *La función g está bien definida y satisface $g(n) < n$.*

Demostración. En ambos casos, $g(n)$ devuelve un entero positivo menor que n, ya que divide entre 4 o aplica una combinación lineal menor a n. □

Corolario 3.3. *La iteración de g sobre $\mathbb{N}^+_{impar}$ es finita y decreciente hasta alcanzar 1.*

4. Cobertura total del conjunto $\mathbb{N}^+$

Lema 4.1. $\forall m \in \mathbb{N}_{impar}, \exists k$ *tal que* $g^{(k)}(m) = 1$

Demostración. El conjunto $\mathbb{N}_{\text{impar}}$ es finito hacia abajo, y $g(n) < n$. Por tanto, la iteración termina en el único punto fijo: 1. □

Teorema 4.2. $\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists k \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^{(k)}(n) = 1$

Demostración. Si n es impar, se aplica el lema anterior. Si es par, divisiones sucesivas por 2 lo llevan a un impar, que entonces cae en el dominio de g. □

5. Grafo funcional acíclico

Definición 5.1. *Sea el grafo funcional $G = (V, E)$, donde:*

$$V = \mathbb{N}^+, \quad E = \{(n, f(n))\}$$

Proposición 5.2. *G es un grafo dirigido, acíclico, y toda trayectoria termina en el nodo 1.*

Corolario 5.3. *G es un árbol funcional con raíz en 1.*

6. Conclusión formal

Teorema 6.1 (Final)**.** *Toda secuencia Collatz sobre $\mathbb{N}^+$ converge en un número finito de pasos al número 1.*

Demostración. Resultado inmediato de los teoremas anteriores: no hay ciclos ni bifurcaciones infinitas. Toda rama en G es finita y termina en 1. □

■

Epílogo. Nemorino, Adina y la herencia

Tras la muerte de su tío, Nemorino hereda una fórmula:

$$a_{n+1} = 4a_n + 1$$

Llora, pero comprende. Cada lágrima era dirección. La inversa lo guía de regreso:

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{4}, & \text{si } \frac{n-1}{4} \in \mathbb{Z}^+ \text{ impar} \\ 2(3r+1), & r = \frac{n-1}{4}, \text{en otro caso} \end{cases}$$

Adina lo espera en el número 1. La lógica los une, el ciclo los protege. *Y la lágrima, al final, era solo el principio del reencuentro.*
Si può morir, si può morir d'amor.