El escenario de Collatz: una separación entre geometría y dinámica

Miguel Cerdá Bennassar

Diciembre de 2025; revisado en septiembre de 2026

Resumen

Se propone una lectura geométrica del problema de Collatz basada en una disposición columnar de los números naturales obtenida a partir de su descomposición 2-ádica. Esta disposición define un escenario estático, independiente de la iteración, sobre el cual se representan las trayectorias. Se prueba que toda órbita que alcanza el ciclo clásico desde fuera de $\{1, 2, 4, 8\}$ pasa necesariamente por 16, y se distingue entre el ciclo clásico, su núcleo escénico final y la cuenca de atracción. La reformulación permite separar dos posibles obstáculos a la conjetura: la existencia de otros ciclos y la existencia de órbitas no acotadas. El objetivo no es demostrar la conjetura, sino reorganizarla en un marco estructural preciso.

1. Introducción

La función de Collatz es

$$F(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ 3n+1, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

La conjetura afirma que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $r \geq 0$ tal que $F^r(n)$ pertenece al ciclo

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1.$$

En lugar de comenzar por trayectorias particulares, consideraremos primero una coordenatización fija de $\mathbb{N}$. La función de Collatz será entonces la dinámica que se representa sobre ese escenario.

2. La tabla–escenario

Todo entero positivo admite una descomposición única

$$n = m2^k,$$

donde m es impar y $k \geq 0$. Organizamos $\mathbb{N}$ de modo que cada columna esté indexada por un impar m y contenga

$$m, 2m, 4m, 8m, \ldots,$$

mientras que la altura viene dada por $k = \nu_2(n)$.

Esta disposición es independiente de Collatz. Los pasos pares $n \mapsto n/2$ son descensos verticales dentro de una columna. Un paso impar $m \mapsto 3m+1$ abandona la columna de m y, tras las divisiones por 2 correspondientes, conduce a otra columna impar. La geometría del escenario y la dinámica que actúa sobre él quedan así separadas.

3. La dinámica reducida impar–a–impar

Para un impar m definimos

$$T(m) = \frac{3m+1}{2^{\nu_2(3m+1)}}.$$

Este mapa reúne en una sola transición el paso impar $3m+1$ y todas las divisiones por 2 necesarias hasta alcanzar el siguiente impar.

4. El rincón clásico y su umbral

El ciclo clásico

$$\mathcal{C} = \{1, 2, 4\}$$

es una región finita e invariante de la dinámica. En la primera columna del escenario, correspondiente al núcleo impar $m = 1$, aparece además una propiedad específica de la entrada al ciclo.

Definición 4.1 (Umbral clásico de entrada)**.** *Llamaremos umbral clásico de entrada a la menor potencia de* 2 *estrictamente superior a los elementos del ciclo que recibe directamente una entrada impar no trivial* $m > 1$ *mediante* $3m+1$ *y desde la cual la trayectoria queda forzada a descender por la primera columna hasta el ciclo.*

Proposición 4.2. *El umbral clásico de entrada es* 16*.*

Demostración. Para $2, 4, 8$ las ecuaciones $3m+1 = 2^j$ dan respectivamente $m = 1/3$, $m = 1$ y $m = 7/3$. Por tanto no existe entrada impar no trivial a $2, 4$ u 8. En cambio,

$$3 \cdot 5 + 1 = 16.$$

Una vez alcanzado 16, la evolución queda determinada:

$$16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

□

Potencias superiores también pueden recibir entradas impares; por ejemplo $21 \mapsto 64$ y $85 \mapsto 256$. Esto no contradice la definición: 16 es el umbral *inferior* no trivial de la cascada final, no la mayor potencia de 2 que admite una entrada impar. La proposición siguiente muestra que, además, el paso por 16 es obligado.

Proposición 4.3 (Inevitabilidad del umbral)**.** *Si* m *es impar y* $3m+1 = 2^j$*, entonces* j *es par. En consecuencia, toda órbita que alcanza* $\mathcal{C}$ *partiendo de un* $n \notin \{1, 2, 4, 8\}$ *pasa por* 16*.*

Demostración. Como $2 \equiv -1 \pmod 3$, se tiene $2^j \equiv (-1)^j \pmod 3$, mientras que $3m+1 \equiv 1 \pmod 3$. Luego j es par, y las únicas potencias de 2 que reciben una entrada impar son $4^k = 3m+1$, con $m = (4^k-1)/3$. Para $k = 1$ la entrada es $m = 1$, que ya pertenece al ciclo; para $k \geq 2$ se tiene $4^k \geq 16$.

Sea ahora $n \notin \{1, 2, 4, 8\}$ cuya órbita alcanza $\mathcal{C}$. Si n es una potencia de 2, es $n \geq 16$ y desciende por 16. Si no lo es, considérese el primer término de la órbita que es potencia de 2. Su predecesor no es potencia de 2; si fuera par, su mitad no podría ser potencia de 2, luego es un impar $m > 1$ con $3m+1 = 4^k$ y $k \geq 2$. A partir de $4^k \geq 16$ la órbita desciende por la primera columna y pasa por 16. □

Comentario 4.4 (Entradas por potencias más altas)**.** *Las entradas impares a la primera columna son, por tanto, los términos de la sucesión* $(4^k-1)/3$*:* $5, 21, 85, 341, 1365, 5461, \ldots$ *Los términos con* $k \equiv 0 \pmod 3$*, como* 21 *o* 1365*, son múltiplos de* 3 *y no tienen preimagen impar (véase el Comentario 5.2); sólo aparecen como valores iniciales. La entrada por* 5 *es la más frecuente: entre los* n *con* $9 \leq n < 10^6$*, el último impar de la órbita es* 5 *en aproximadamente el* 94 % *de los casos,* 341 *en el* 3,8 % *y* 85 *en el* 2,4 %*. El* 5 *no es, pues, inevitable; el* 16 *sí.*

5. El núcleo escénico final clásico

La entrada impar inmediata al umbral es única:

$$3m + 1 = 16 \quad \Longrightarrow \quad m = 5.$$

Para seleccionar una alimentación impar mínima de 5 mediante el mapa reducido, definimos

$$u_0 = \min\{u > 1 : \ u \text{ impar y } T(u) = 5\}.$$

Como

$$T(3) = \frac{10}{2} = 5,$$

y no existe otro impar u con $1 < u < 3$, se tiene $u_0 = 3$.

Definición 5.1 (Núcleo escénico final clásico)**.** *Definimos*

$$K_{\mathrm{cl}} = \{1, 2, 4, 8, 16\} \cup \{3, 5\}.$$

Este conjunto contiene simultáneamente el ciclo clásico, la cascada vertical desde el umbral, la entrada impar $5 \mapsto 16$ *y la alimentación impar mínima* $3 \mapsto 5$ *bajo* T*.*

Así, la escena mínima considerada es

$$3 \xrightarrow{T} 5 \xrightarrow{3m+1} 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

El conjunto K_{cl} no pretende contener el árbol inverso completo del ciclo; codifica únicamente esta estructura final mínima.

Comentario 5.2 (El 3 como hoja)**.** *Ningún impar* m *cumple* $3m + 1 \equiv 0 \pmod 3$*, de modo que un múltiplo de* 3 *no tiene preimagen impar: en el árbol inverso es una hoja. En particular, sólo pasan por* 3 *las órbitas que empiezan en* $3 \cdot 2^j$*. El* 3 *forma parte de* K_{cl} *como alimentación impar mínima del* 5 *en el sentido de la definición, no porque las órbitas lo atraviesen; los demás impares con* $T(u) = 5$*, como* 13 *o* 53*, sí tienen preimágenes.*

6. Rincones periódicos y cuencas

Para no imponer a ciclos hipotéticos la geometría particular del ciclo clásico conviene separar tres conceptos.

Definición 6.1 (Rincón periódico)**.** *Un rincón periódico es una órbita periódica finita de la función de Collatz. Equivalentemente, es un ciclo finito de la dinámica. No se exige que contenga una cascada vertical semejante a la del rincón clásico.*

Esta definición admite, en particular, un hipotético ciclo con varios impares. El rincón clásico es el ciclo $\mathcal{C} = \{1, 2, 4\}$; el conjunto K_{cl} es un núcleo escénico asociado a él, no la definición general de rincón.

Definición 6.2 (Cuenca de atracción)**.** *La cuenca del ciclo clásico es*

$$\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \{n \in \mathbb{N} : \exists r \geq 0, \ F^r(n) \in \mathcal{C}\}.$$

7. Dos posibles obstáculos a la conjetura

La unicidad del rincón periódico clásico, por sí sola, no equivale a la conjetura: aun sin otros ciclos podría existir una órbita que no alcanzara ningún ciclo.

Por tanto, en el lenguaje del escenario, la conjetura puede descomponerse en dos afirmaciones:

1. no existe ningún rincón periódico distinto del ciclo clásico;
2. toda órbita positiva alcanza algún rincón periódico en un número finito de pasos.

Juntas implican que toda órbita alcanza $\mathcal{C}$; recíprocamente, la conjetura clásica implica ambas. De manera equivalente,

$$\boxed{\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \mathbb{N}.}$$

La segunda afirmación admite una formulación más concreta.

Proposición 7.1. *Una órbita de F alcanza algún rincón periódico si y sólo si está acotada.*

Demostración. Si la órbita alcanza un ciclo, a partir de ese momento toma sólo los valores del ciclo, luego está acotada. Recíprocamente, una órbita acotada toma un número finito de valores, por lo que algún valor se repite; como F es una función, la órbita es periódica a partir de esa repetición y ha alcanzado un ciclo. □

El escenario permite así distinguir dos modos lógicamente diferentes en los que la conjetura podría fallar: la aparición de otro ciclo finito o la existencia de una órbita no acotada, que nunca queda confinada en un ciclo. Esta descomposición es la habitual en la literatura sobre el problema [1].

8. Conclusión

La descomposición única $n = m2^k$ proporciona una coordenatización fija de $\mathbb{N}$ sobre la que la dinámica de Collatz puede representarse mediante movimientos verticales y cambios de columna. Dentro de este escenario, el ciclo clásico posee una arquitectura final particular: la entrada mínima $3 \to 5$, el umbral 16, por el que pasa obligatoriamente toda órbita que llega al ciclo desde fuera de $\{1, 2, 4, 8\}$, y la cascada $16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$.

Esta arquitectura no se impone a posibles ciclos alternativos. La distinción entre rincón periódico, núcleo escénico clásico y cuenca de atracción permite formular con precisión el papel del escenario: la unicidad del ciclo clásico resuelve sólo la parte periódica del problema; la conjetura completa exige además que ninguna órbita sea no acotada.

Referencias

[1] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem*, American Mathematical Society, 2010.