Escenarios 2–ádicos en la dinámica de Collatz

Geometría previa y alturas del salto impar

Miguel Cerdá Bennassar

Enero de 2026; revisado en septiembre de 2026

Resumen

Se refina la tabla–escenario 2-ádica asociada a la descomposición $n = m2^k$ mediante la altura $C(m) = \nu_2(3m + 1)$ de cada impar. El mapa reducido impar–a–impar permite establecer hechos locales exactos. Tras un paso impar–a–impar no pueden aparecer múltiplos de 3, aunque las clases 1 y 2 módulo 3 se alternan según la paridad de $C(m)$. Un salto contrae si y sólo si $C(m) \geq 2$. Los nodos receptores son exactamente los impares no múltiplos de 3, cada uno con infinitas preimágenes, de modo que recepción y contracción son propiedades independientes. Por último, se obtiene una identidad exacta de balance para cualquier ciclo reducido, de la que se sigue $3^r < 2^A$ con una cota superior que muestra lo ajustado de ese balance. Se distingue en todo momento entre rasgos específicos del ciclo clásico y restricciones válidas para cualquier ciclo hipotético.

1. Introducción

Sea

$$F(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ 3n + 1, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

La representación única $n = m2^k$, con m impar y $k \geq 0$, proporciona una tabla–escenario fija para $\mathbb{N}$, introducida en [1]. Sobre ella, los pasos pares son verticales y los pasos impares cambian de columna. El propósito de este trabajo es añadir a ese escenario la información 2-ádica propia de cada salto impar sin confundirla con las propiedades globales todavía desconocidas de las órbitas.

2. Escenario de alturas 2-ádicas

Sea I el conjunto de los impares positivos.

Definición 2.1. *Para $m \in I$ definimos la altura del salto impar por*

$$C(m) = \nu_2(3m + 1).$$

El mapa reducido impar–a–impar es

$$T(m) = \frac{3m + 1}{2^{C(m)}}.$$

Así, $C(m)$ mide exactamente el número de divisiones por 2 efectuadas después de $3m + 1$ hasta alcanzar el siguiente impar.

Si $m \equiv 3 \pmod 4$, entonces $3m + 1 \equiv 2 \pmod 4$ y $C(m) = 1$. Si $m \equiv 1 \pmod 4$, entonces $3m + 1 \equiv 0 \pmod 4$ y $C(m) \geq 2$.

3. La restricción módulo 3

Proposición 3.1 (Desaparición de los impares múltiplos de 3)**.** *Para todo impar positivo m,*

$$3 \nmid T(m).$$

En consecuencia, después de un solo paso impar–a–impar ningún término impar posterior de la trayectoria puede ser múltiplo de 3*.*

Demostración. Para todo m,

$$3m + 1 \equiv 1 \pmod 3.$$

Como 2 es invertible módulo 3, la división por $2^{C(m)}$ no puede introducir un factor 3. Por tanto $T(m) \not\equiv 0 \pmod 3$. □

No se sigue que $T(m) \equiv 1 \pmod 3$. En efecto,

$$T(m) \equiv 2^{-C(m)} \equiv (-1)^{C(m)} \pmod 3,$$

de modo que

$$T(m) \equiv \begin{cases} 1 \pmod 3, & C(m) \text{ par}, \\ 2 \pmod 3, & C(m) \text{ impar}. \end{cases}$$

Las dos clases no nulas pueden, por tanto, aparecer; la única clase excluida tras el primer salto impar es $0 \pmod 3$.

4. Contracción local

Proposición 4.1. *Sea $m > 1$ impar. Entonces*

$$T(m) < m \quad \Longleftrightarrow \quad C(m) \geq 2.$$

Demostración. Si $C(m) = 1$,

$$T(m) = \frac{3m+1}{2} > m.$$

Si $C(m) \geq 2$,

$$T(m) \leq \frac{3m+1}{4} < m,$$

donde la última desigualdad usa $m > 1$. □

El caso $m = 1$ debe separarse: $C(1) = 2$ pero $T(1) = 1$. La altura $C(m)$ describe, por tanto, expansión o contracción de una transición individual; no determina por sí sola el comportamiento global de una órbita.

5. Nodos receptores y preimágenes

Definición 5.1 (Nodo receptor impar)**.** *Un impar b es nodo receptor si existe un impar $a \neq b$ tal que $T(a) = b$. El conjunto de impares que alcanzan b tras un número finito de iteraciones de T forma su árbol inverso impar.*

Para un impar b, la igualdad $T(a) = b$ equivale a la existencia de un entero $r \geq 1$ tal que

$$3a + 1 = 2^r b, \qquad a = \frac{2^r b - 1}{3},$$

con a impar; como b es impar, r es entonces necesariamente $C(a)$. Esta ecuación permite caracterizar por completo los nodos receptores.

Proposición 5.2 (Caracterización de los nodos receptores)**.** *Un impar b es nodo receptor si y sólo si $3 \nmid b$. En ese caso b tiene infinitas preimágenes bajo T: si a_0 es la menor, las demás son $a_{j+1} = 4a_j + 1$. Los múltiplos de 3 no tienen ninguna preimagen: son hojas del árbol inverso.*

Demostración. Si $3 \mid b$, entonces $2^r b \equiv 0 \pmod 3$, mientras que $3a + 1 \equiv 1 \pmod 3$; no hay solución. Si $3 \nmid b$, se tiene $2^r b \equiv (-1)^r b \pmod 3$, y eligiendo $r \geq 1$ par cuando $b \equiv 1 \pmod 3$ e impar cuando $b \equiv 2 \pmod 3$ resulta $3 \mid 2^r b - 1$. El número $a = (2^r b - 1)/3$ es entonces un entero positivo, e impar porque $2^r b - 1$ lo es. Los valores admisibles de r forman una progresión de diferencia 2, y al pasar de r a $r + 2$ se obtiene

$$\frac{2^{r+2} b - 1}{3} = 4 \cdot \frac{2^r b - 1}{3} + 1.$$

Por último, $a = b$ exige $b(2^r - 3) = 1$, es decir $b = 1$ y $r = 2$; para cualquier otro r admisible la preimagen es distinta de b, de modo que también $b = 1$ es receptor. □

La condición de ser nodo receptor no debe confundirse, por tanto, con la condición $C(a) \geq 2$. Por ejemplo,

$$C(3) = 1, \qquad T(3) = 5,$$

de modo que un impar de altura mínima puede alimentar un nodo receptor. La altura controla la variación numérica de la transición; la ecuación $3a + 1 = 2^r b$ controla su estructura de preimágenes. Son propiedades diferentes: la primera depende de a módulo potencias de 2, la segunda de b módulo 3.

6. El rincón clásico como caso particular

El ciclo clásico es $\mathcal{C} = \{1, 2, 4\}$. Su arquitectura final se estudia en [1]: 16 es la menor potencia de 2 por encima del ciclo que recibe una entrada impar no trivial, $3 \cdot 5 + 1 = 16$; toda órbita que alcanza $\mathcal{C}$ desde fuera de $\{1, 2, 4, 8\}$ pasa necesariamente por 16; y el núcleo escénico clásico es

$$K_{\mathrm{cl}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 16\},$$

donde 3 es la menor alimentación impar de 5. Por la Proposición 5.2, el 3 es una hoja del árbol inverso, mientras que el 5 tiene infinitas preimágenes: $3, 13, 53, 213, \ldots$

Estas propiedades describen el rincón clásico. No se afirmará que un ciclo hipotético distinto deba poseer un umbral análogo a 16 ni una cascada vertical final de la misma forma.

7. Rincones periódicos generales

Definición 7.1. *Un rincón periódico es una órbita periódica finita de la dinámica de Collatz. En el mapa reducido, sus términos impares forman una órbita periódica finita de T.*

Esta definición admite ciclos con uno o con varios impares. Si los impares de un ciclo reducido son

$$m_1, m_2, \ldots, m_r,$$

y

$$a_i = C(m_i) = \nu_2(3m_i + 1),$$

entonces

$$m_{i+1} = \frac{3m_i + 1}{2^{a_i}}, \qquad m_{r+1} = m_1.$$

Por la restricción módulo 3, ninguno de los m_i puede ser divisible por 3.

Asimismo, para un ciclo no trivial con todos $m_i > 1$ no pueden tenerse todos los $a_i = 1$, pues entonces cada transición aumentaría estrictamente el valor. Por tanto, un ciclo hipotético de ese tipo debe contener al menos una transición con $a_i \geq 2$. Esto no implica que las transiciones con $a_i = 1$ estén prohibidas: pueden formar parte de un ciclo si son compensadas por otras transiciones.

8. Balance aritmético de un ciclo impar

Las alturas permiten formular una condición global que sí es válida para cualquier ciclo reducido. De

$$2^{a_i} m_{i+1} = 3m_i + 1$$

y multiplicando las razones correspondientes se obtiene

$$2^A = \prod_{i=1}^{r} \frac{3m_i + 1}{m_i} = 3^r \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{1}{3m_i}\right), \qquad A = \sum_{i=1}^{r} a_i.$$

En particular,

$$2^A > 3^r.$$

Esta identidad muestra por qué el comportamiento global no puede deducirse de clasificar aisladamente los pasos como expansivos o contractivos: en una órbita periódica importa el balance conjunto de todas las alturas a_i.

Comentario 8.1 (Lo ajustado del balance)**.** *La identidad da también una cota superior. Si* $\mu = \min_i m_i$*, cada factor cumple* $1 + \frac{1}{3m_i} \leq 1 + \frac{1}{3\mu}$*, y tomando logaritmos en base* 2*,*

$$0 < A - r \log_2 3 \leq r \log_2\!\left(1 + \frac{1}{3\mu}\right) < \frac{r}{3\mu \ln 2}.$$

Así, en un ciclo cuyos impares sean todos grandes, el cociente A/r *ha de ser una aproximación racional extraordinariamente buena de* $\log_2 3$*. Este es el punto de partida clásico de las cotas inferiores para la longitud de un ciclo no trivial: combinado con la teoría de fracciones continuas de* $\log_2 3$ *y con la verificación computacional de la conjetura hasta valores grandes, conduce a los resultados de Steiner [4] y Eliahou [2].*

9. Restricciones universales y rasgos específicos

Conviene separar cuidadosamente ambos niveles.

Son restricciones válidas para cualquier ciclo hipotético: su conjunto de impares es finito; ninguno de esos impares es múltiplo de 3; las transiciones satisfacen las ecuaciones anteriores; para un ciclo no trivial con impares mayores que 1 debe aparecer al menos una altura $C(m) \geq 2$; y las alturas satisfacen el balance de la sección anterior.

En cambio, son rasgos específicos del rincón clásico: el umbral 16; la cascada puramente vertical $16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$; la entrada $5 \to 16$; y la alimentación mínima $3 \to 5$. Estos rasgos pueden utilizarse para describir con precisión el ciclo conocido, pero no deben imponerse como condiciones necesarias a un ciclo alternativo.

10. La conjetura y los dos tipos de obstrucción

Como se expone en [1], la conjetura de Collatz equivale a que la cuenca del ciclo clásico sea todo $\mathbb{N}$, y puede fallar de dos maneras conceptualmente distintas: mediante otro rincón periódico o mediante una órbita no acotada, que nunca alcanza ningún rincón periódico. Las restricciones universales de las secciones anteriores conciernen sólo al primer tipo de obstrucción; la información local que aporta la altura $C(m)$ no basta por sí sola para excluir el segundo.

11. Conclusión

La tabla $n = m2^k$ proporciona el escenario fijo y la función $C(m) = \nu_2(3m+1)$ añade un relieve aritmético que cuantifica cada descenso posterior a un paso impar. Esta información permite establecer hechos locales exactos —la exclusión de múltiplos de 3 tras un salto impar, el criterio de contracción para $m > 1$ y la caracterización de los nodos receptores— sin confundirlos con afirmaciones globales sobre ciclos.

La distinción entre contracción y recepción queda así precisada: la primera depende de la altura del impar de partida y la segunda de la clase módulo 3 del de llegada. A su vez, separar el núcleo clásico de la definición general de rincón periódico permite estudiar sin prejuicios ciclos hipotéticos con varios impares, sujetos a una identidad de balance exacta. El escenario 2-ádico queda así como un marco descriptivo y estructural: organiza la dinámica y sus restricciones, pero no presupone el desenlace de la conjetura.

A. Primeros valores de la altura

m	$3m+1$	$C(m)$	clase (mód 4)
3	10	1	3
5	16	4	1
7	22	1	3
9	28	2	1
11	34	1	3
13	40	3	1
15	46	1	3
17	52	2	1

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *El escenario de Collatz: una separación entre geometría y dinámica*, collatz.es, 2025; revisado en 2026.

[2] S. Eliahou, The $3x+1$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths, *Discrete Mathematics* **118** (1993), 45–56.

[3] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x+1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010.

[4] R. P. Steiner, A theorem on the Syracuse problem, *Proceedings of the 7th Manitoba Conference on Numerical Mathematics* (1977), 553–559.