Estructura triangular y compresión de órbitas en la dinámica de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Enero de 2026

Resumen

Se presenta una representación triangular de determinados tramos de las órbitas clásicas de Collatz. Para un impar A, la descomposición

$$A+1 = 2^n u, \qquad n = \nu_2(A+1), \qquad u \text{ impar},$$

determina un tramo exacto de la órbita cuyos términos satisfacen

$$A_j = 3^j 2^{\,n-j} u - 1, \qquad 0 \le j \le n,$$

y cuyo término terminal $B = A_n$ verifica

$$B+1 = (A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Esta identidad permite representar el tramo mediante un bloque triangular de altura n, entendiendo por altura el número de filas que separan la base del vértice: las divisiones sucesivas por 2 conducen desde $A+1 = 2^n u$ hasta el impar u, y a partir de éste las multiplicaciones sucesivas por 3 conducen hasta $B+1 = 3^n u$. La concatenación de estos bloques con los descensos pares que los separan proporciona una representación comprimida de la órbita clásica.

Se desarrolla explícitamente el ejemplo de la órbita iniciada en 39 y se precisa la diferencia entre la valuación $\nu_2(A+1)$, que determina la estructura triangular, y la valuación $\nu_2(3A+1)$ asociada al mapa impar acelerado.

Se describe además una disposición complementaria de los mismos tramos en una familia fija de triángulos $T(a)$, con $a \equiv 0, 4 \pmod 6$, en la que cada entero positivo ocupa una posición única y en la que pueden leerse tanto la continuación de una órbita como los predecesores de un impar.

La construcción no introduce una dinámica alternativa ni implica resultados sobre la convergencia global o la existencia de ciclos. Su finalidad es proporcionar una representación exacta y compacta de ciertos tramos de la dinámica clásica de Collatz.

1. Introducción

La iteración clásica de Collatz genera trayectorias en las que se alternan multiplicaciones por 3 seguidas de una suma de 1 y divisiones por potencias de 2. Aunque la formulación término a término es elemental, determinados tramos de estas trayectorias admiten una reorganización aritmética exacta que permite agrupar varios pasos consecutivos en una sola estructura.

El objeto de este trabajo es presentar una de estas reorganizaciones. La construcción parte, para cada impar A, de la descomposición 2-ádica de $A+1$ y representa mediante un bloque triangular una racha finita de pasos efectivos de la órbita clásica. Los bloques obtenidos pueden concatenarse mediante los descensos pares que los separan, dando lugar a una representación comprimida de la trayectoria. Los mismos tramos pueden disponerse también en una familia fija de triángulos, independiente de la órbita que se estudie, que se describe en la Sección 4.

Es importante señalar desde el principio que esta representación no define una nueva aplicación de Collatz ni pretende sustituir la sucesión clásica. Los términos que no aparecen explícitamente en la secuencia comprimida permanecen determinados por la estructura interna de cada bloque y pueden recuperarse exactamente.

La finalidad de la construcción es, por tanto, representativa y estructural. En particular, no se pretende deducir de ella la convergencia global de las órbitas ni la inexistencia de ciclos no triviales. El interés reside en aislar una regularidad exacta basada en la valuación $\nu_2(A+1)$ y mostrar cómo dicha regularidad queda incorporada en la propia dinámica clásica.

2. Estructura triangular y compresión de tramos de Collatz

La dinámica clásica de Collatz puede contemplarse desde distintas representaciones sin alterar la sucesión subyacente. En este trabajo se introduce una representación triangular que no pretende reproducir uno a uno todos los términos de una órbita, sino agrupar determinados tramos de ella en bloques finitos cuya estructura viene determinada por la valuación 2-ádica de $A+1$, siendo A un impar.

La construcción se basa en una identidad elemental pero útil. Sea A un entero impar positivo y escribamos de manera única

$$A+1 = 2^n u, \qquad n = \nu_2(A+1), \qquad u \text{ impar}.$$

Entonces

$$A = 2^n u - 1.$$

Consideremos ahora la transformación

$$F(x) = \frac{3x+1}{2}.$$

Partiendo de $A = 2^n u - 1$, esta transformación puede iterarse algebraicamente n veces. Durante las primeras $n-1$ iteraciones los valores obtenidos son impares, mientras que la n-ésima iteración produce el término terminal par del bloque. Para $A = 2^n u - 1$ se tiene

$$F(A) = \frac{3(2^n u - 1) + 1}{2} = 3\,2^{n-1} u - 1.$$

Si $n \geq 2$, este nuevo valor vuelve a ser impar, y el mismo cálculo puede repetirse. Esto conduce a la siguiente descripción exacta.

Proposición 2.1 (Tramo triangular exacto)**.** *Sea A un entero impar positivo y sea*

$$A+1 = 2^n u, \qquad n = \nu_2(A+1), \qquad u \text{ impar}.$$

Definamos

$$A_j = 3^j 2^{\,n-j} u - 1, \qquad 0 \leq j \leq n.$$

Entonces

$$A_0 = A$$

y, para $0 \leq j < n$,

$$3A_j + 1 = 2A_{j+1}.$$

Por tanto, la órbita clásica de Collatz contiene exactamente el tramo

$$A_j \longmapsto 3A_j + 1 \longmapsto A_{j+1}, \qquad 0 \leq j < n.$$

En particular, después de n pasos de este tipo se alcanza

$$B := A_n = 3^n u - 1,$$

y se satisface la identidad

$$B+1=3^n u=(A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Demostración. La expresión para A_0 es inmediata:

$$A_0=2^n u-1=A.$$

Para $0\le j<n$,

$$3A_j+1=3\big(3^j 2^{\,n-j}u-1\big)+1=3^{j+1}2^{\,n-j}u-2,$$

y, por tanto,

$$3A_j+1=2\left(3^{j+1}2^{\,n-j-1}u-1\right)=2A_{j+1}.$$

De aquí se sigue

$$\frac{3A_j+1}{2}=A_{j+1}.$$

Para $j=n$ obtenemos

$$B=A_n=3^n u-1,$$

de donde

$$B+1=3^n u=3^n\frac{A+1}{2^n}=(A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

□

Corolario 2.2. *Sea $r=\nu_2(B)\ge 1$. En las n transiciones de un bloque triangular se cumple*

$$\nu_2(3A_j+1)=1,\qquad 0\le j\le n-2,\qquad y\qquad \nu_2(3A_{n-1}+1)=1+r\ge 2.$$

Por tanto, un bloque de altura n contiene una racha de $n-1$ transiciones consecutivas de Collatz con exponente 2-ádico unitario, cerrada por una transición de exponente $1+r$; el bloque incorpora sólo la primera de esas $1+r$ divisiones por 2, y las r restantes forman el descenso par que lo enlaza con el bloque siguiente.

Demostración. Por la proposición anterior, $3A_j+1=2A_{j+1}$. Para $j\le n-2$, A_{j+1} es impar, luego $\nu_2(3A_j+1)=1$. Para $j=n-1$, $A_{j+1}=A_n=B$ es par y $\nu_2(3A_{n-1}+1)=\nu_2(2B)=1+r$. □

Observación 2.3 (Raíz digital en el interior de un bloque)**.** *Sea un bloque triangular de altura $n\ge 3$. Entonces los impares internos $A_2,\dots,A_{n-1}$ tienen todos raíz digital 8, es decir,*

$$A_j\equiv 8\pmod 9,\qquad 2\le j\le n-1.$$

En efecto, como $2\cdot 5\equiv 1 \pmod 9$, la relación $A_{j+1}=(3A_j+1)/2$ da

$$A_{j+1}\equiv 5(3A_j+1)\equiv 6A_j+5\pmod 9.$$

La aplicación $x\mapsto 6x+5$ módulo 9 envía los residuos $0,3,6$ a 5; los residuos $1,4,7$ a 2; y los residuos $2,5,8$ a 8, que es un punto fijo. Por tanto, partiendo de cualquier A_0, el residuo alcanza el valor 8 en dos pasos como mucho y ya no cambia mientras dure el bloque.

Por ejemplo, en el bloque de altura 7 que empieza en $127=2^7-1$, los impares 127, 191, 287, 431, 647, 971 y 1457 tienen raíces digitales 1, 2, 8, 8, 8, 8 y 8; en el primer bloque de la órbita de 39 (altura 3), el único impar A_2 es 89, de raíz digital 8. En términos del grafo de raíces digitales de [1], la racha de un bloque recorre repetidamente el lazo $7\to 8\to 7$ entre un par de raíz digital 7 y un impar de raíz digital 8.

Observación 2.4. *La proposición anterior no introduce una dinámica distinta de la de Collatz. Cada transición*

$$A_j \longmapsto A_{j+1}$$

comprime exactamente dos pasos de la sucesión clásica:

$$A_j \longmapsto 3A_j + 1 \longmapsto \frac{3A_j + 1}{2} = A_{j+1}.$$

Debe advertirse que los términos A_j no aparecen necesariamente escritos de forma explícita sobre los lados del triángulo. En el nivel j, el término correspondiente se recupera mediante

$$A_j + 1 = 3^j\, 2^{\,n-j} u.$$

Es decir, se combina el valor $2^{\,n-j}u$ de la rama descendente con el factor 3^j acumulado en la rama ascendente.

Por ejemplo, en el primer bloque de la órbita iniciada en 39, donde $n = 3$ y $u = 5$, los valores 59 y 89 no aparecen escritos directamente en los lados del triángulo. Sin embargo,

$$59 + 1 = 60 = 3 \cdot 20$$

y

$$89 + 1 = 90 = 3^2 \cdot 10.$$

Así, los términos intermedios de la órbita están determinados exactamente por el bloque aunque no figuren como casillas explícitas en su representación gráfica.

Obsérvese además que, para $0 \le j < n$, los valores A_j son impares, pues $n - j \ge 1$ y

$$A_j = 3^j 2^{\,n-j} u - 1.$$

En cambio, el término terminal

$$B = 3^n u - 1$$

es par, ya que $3^n u$ es impar. Así, cada bloque triangular parte de un impar, atraviesa una racha de valores impares separados por los correspondientes términos pares de Collatz y termina necesariamente en un valor par.

Esta distinción entre el extremo algebraico $B + 1 = 3^n u$ y el término efectivo de Collatz

$$B = 3^n u - 1$$

es esencial en toda la construcción.

2.1. Identidad de normalización del bloque

La relación anterior puede escribirse en la forma

$$\boxed{B = (A + 1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{\frac{B + 1}{(A + 1)\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 1.}$$

Esta identidad no constituye una condición adicional impuesta a la órbita: es una consecuencia exacta de la estructura del tramo. Su interés reside en que resume todo el bloque mediante los dos extremos A y B y su altura

$$n = \nu_2(A + 1).$$

Geométricamente, el paso de $A+1$ a $B+1$ puede representarse mediante un triángulo de altura n. La rama descendente codifica las divisiones sucesivas por 2 contenidas en

$$A+1 = 2^n u,$$

mientras que la rama ascendente codifica las multiplicaciones sucesivas por 3 que conducen a

$$B+1 = 3^n u.$$

El vértice común está determinado por el impar u.

Así, el triángulo representa la identidad

$$2^n u \quad \longrightarrow \quad u \quad \longrightarrow \quad 3^n u,$$

mientras que los extremos efectivos del tramo de Collatz son

$$A = 2^n u - 1, \qquad B = 3^n u - 1.$$

3. Concatenación de bloques y órbita comprimida

Una órbita completa no está formada por un único bloque triangular. Al alcanzar el término terminal par

$$B = 3^n u - 1,$$

la dinámica clásica continúa mediante divisiones sucesivas por 2 hasta alcanzar el siguiente impar.

Sea

$$r = \nu_2(B).$$

Entonces podemos escribir

$$B = 2^r A', \qquad A' \text{ impar},$$

y la órbita clásica contiene el descenso

$$B \longmapsto \frac{B}{2} \longmapsto \frac{B}{2^2} \longmapsto \cdots \longmapsto \frac{B}{2^r} = A'.$$

El impar A' constituye la entrada del siguiente bloque triangular. Su altura viene dada por

$$n' = \nu_2(A'+1),$$

y escribiendo

$$A'+1 = 2^{n'} u',$$

el nuevo bloque termina en

$$B' = 3^{n'} u' - 1 = (A'+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{n'} - 1.$$

De este modo, la representación triangular puede concatenarse indefinidamente mientras lo haga la propia órbita de Collatz. Cada bloque consta de dos componentes:

1. un tramo triangular determinado por

   $$n = \nu_2(A+1),$$

   que comprime una sucesión exacta de pasos

   $$A_j \longmapsto 3A_j + 1 \longmapsto A_{j+1};$$

2. un descenso par terminal

   $$B \longmapsto B/2 \longmapsto \cdots \longmapsto A',$$

   que conduce al impar inicial del bloque siguiente.

Por tanto, la sucesión de bloques no sustituye a la órbita clásica, sino que proporciona una representación comprimida de ella.

3.1. Ejemplo: órbita iniciada en 39

La Figura 1 muestra la representación triangular asociada a la órbita de Collatz iniciada en 39. Conviene observarla antes de desarrollar algebraicamente el ejemplo, pues permite seguir visualmente la sucesión de bloques y los enlaces entre ellos.

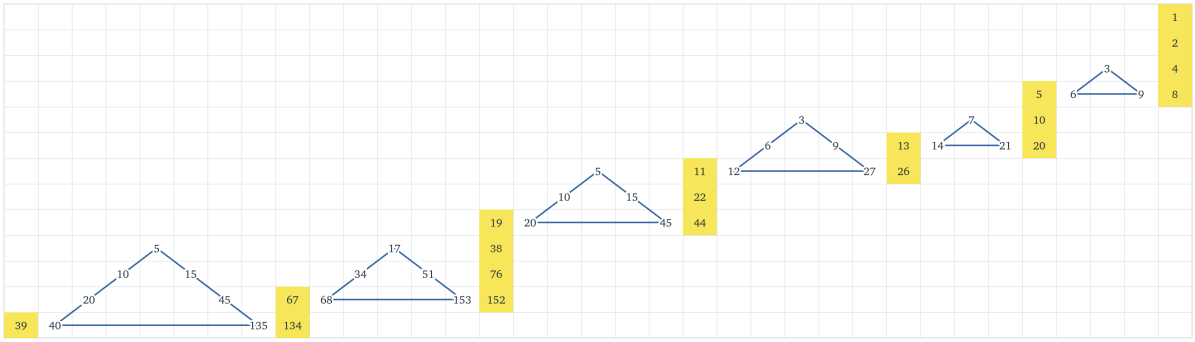

Figura 1: Representación triangular de la órbita de Collatz iniciada en 39. Las casillas resaltadas contienen exclusivamente los términos de la sucesión comprimida; en cada columna, los descensos pares se leen de abajo arriba. Los números situados sobre los triángulos son valores auxiliares de la representación. Cada triángulo codifica la identidad $2^n u \longrightarrow u \longrightarrow 3^n u$, cuyos extremos corresponden a $A+1$ y $B+1$, respectivamente. La altura de cada triángulo, medida en filas desde la base hasta el vértice, es $n = \nu_2(A+1)$: cada fila corresponde a una división por 2 en la rama izquierda y a una multiplicación por 3 en la derecha.

Para el primer bloque,

$$39 + 1 = 40 = 2^3 \cdot 5,$$

por lo que

$$n = 3, \qquad u = 5.$$

Los términos impares internos y el término terminal del primer tramo son

$$39, \quad 59, \quad 89, \quad 134,$$

pues

$$A_j = 3^j 2^{3-j} 5 - 1.$$

La órbita clásica correspondiente es

$$39 \to 118 \to 59 \to 178 \to 89 \to 268 \to 134.$$

El extremo del triángulo verifica

$$134 + 1 = 135 = 3^3 \cdot 5.$$

Obsérvese que los extremos del triángulo son los valores desplazados $A+1$ y $B+1$. En este caso,

$$40 = 39 + 1, \qquad 135 = 134 + 1.$$

Los términos internos de la órbita no se leen directamente en los lados del triángulo, sino mediante la regla

$$A_j + 1 = 3^j 2^{n-j} u.$$

Por ejemplo,

$$59 + 1 = 3 \cdot 20 = 60, \qquad 89 + 1 = 3^2 \cdot 10 = 90.$$

Como

$$134 = 2 \cdot 67,$$

el descenso par conduce a 67, que constituye la entrada del segundo bloque. Ahora

$$67 + 1 = 68 = 2^2 \cdot 17,$$

y, por tanto,

$$152 + 1 = 68 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 153.$$

El tramo clásico correspondiente es

$$67 \to 202 \to 101 \to 304 \to 152.$$

Continuando el procedimiento se obtiene la sucesión comprimida

$$39,\ 134,\ 67,\ 152,\ 76,\ 38,\ 19,\ 44,\ 22,\ 11,$$
$$26,\ 13,\ 20,\ 10,\ 5,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1.$$

Esta sucesión debe distinguirse de la órbita clásica completa,

$$39,\ 118,\ 59,\ 178,\ 89,\ 268,\ 134,\ 67,\ 202,\ 101,\ 304,$$
$$152,\ 76,\ 38,\ 19,\ 58,\ 29,\ 88,\ 44,\ 22,\ 11,\ 34,\ 17,$$
$$52,\ 26,\ 13,\ 40,\ 20,\ 10,\ 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1.$$

La primera no constituye una dinámica alternativa: es una *compresión estructurada* de la segunda. Los términos omitidos en la escritura comprimida están determinados exactamente por los bloques triangulares y pueden recuperarse a partir de ellos.

3.2. Relación con el mapa impar acelerado

Conviene distinguir la construcción triangular del mapa inducido habitual sobre los impares,

$$T(x) = \frac{3x+1}{2^{\nu_2(3x+1)}}.$$

El mapa T utiliza la valuación

$$\nu_2(3x+1),$$

mientras que la altura de un bloque triangular viene determinada por

$$\nu_2(x+1).$$

Estas dos valuaciones desempeñan funciones distintas y no deben identificarse.

La representación triangular no pretende sustituir al mapa T. Su objeto es diferente: agrupar una racha exacta de pasos de Collatz, caracterizada por $\nu_2(3A_j + 1) = 1$ para $0 \le j \le n-2$ y cerrada por un paso de exponente $1 + \nu_2(B)$ (Corolario 2.2), hasta alcanzar el término terminal par del bloque. En particular, el bloque junto con su descenso par equivale a n iteraciones del mapa T, con valuaciones $(1, \ldots, 1, 1 + r)$, y $A' = T^n(A)$.

En consecuencia, la estructura triangular es una representación exacta pero no término a término de la dinámica clásica. Su utilidad es principalmente descriptiva y estructural: permite visualizar y comprimir determinados tramos de una órbita sin introducir ninguna hipótesis sobre la convergencia global de Collatz.

Observación 3.1 (Relación con la formulación F_1)**.** *En la formulación F_1 de [2], cada paso de T se despliega en un descenso dentro de una fibra, de longitud d, seguido de un puente por un semientero o por un entero par, y un paso de valuación $v = 1$ corresponde a $d = 0$ con puente por semientero. Por el Corolario 2.2, un bloque triangular de altura n corresponde en F_1 a una racha maximal de $n-1$ pasos sin descenso y con puente por semientero, cerrada por un paso de valuación $1 + r \ge 2$. Así, la altura de un triángulo mide, salvo una unidad, la longitud de una racha de puentes por semientero sin descenso.*

4. La familia fija de triángulos $T(a)$

Los bloques de las secciones anteriores se construyen a partir de la órbita que se estudia: cada impar A determina su propio triángulo. Los mismos tramos admiten otra disposición, en la que los triángulos están fijados de antemano y cada entero positivo ocupa en ellos un lugar único. Esta disposición resulta cómoda para recorrer las órbitas en los dos sentidos.

Definición 4.1 (Familia $T(a)$)**.** *Sea $a \geq 0$ un entero tal que $a+1$ es primo con 6, es decir, $a \equiv 0, 4 \pmod 6$. El triángulo $T(a)$ tiene una fila por cada entero $n \geq 1$, y la fila n consta de los n términos*

$$T(a)_{n,j} = (a+1)\,2^{\,n-j}\,3^{\,j-1} - 1, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

El último término de la fila n es

$$L_n = T(a)_{n,n} = (a+1)\,3^{\,n-1} - 1,$$

que llamaremos extremo *de la fila.*

Los triángulos pueden construirse fila a fila con dos transformaciones elementales. En efecto, para $1 \leq j \leq n$,

$$T(a)_{n+1,j} = 2\,T(a)_{n,j} + 1, \qquad L_{n+1} = 3L_n + 2,$$

de modo que los n primeros términos de la fila $n+1$ se obtienen aplicando $x \mapsto 2x+1$ a los de la fila n, y el último aplicando $x \mapsto 3x+2$ al extremo de la fila anterior. Dentro de una misma fila,

$$T(a)_{n,j+1} = \frac{3\,T(a)_{n,j} + 1}{2}, \qquad 1 \leq j < n,$$

que es la transformación F de la Sección 2. Las primeras filas de $T(0)$, $T(4)$ y $T(6)$ son las siguientes:

n	$T(0)$	$T(4)$	$T(6)$
1	0	4	6
2	1, 2	9, 14	13, 20
3	3, 5, 8	19, 29, 44	27, 41, 62
4	7, 11, 17, 26	39, 59, 89, 134	55, 83, 125, 188
5	15, 23, 35, 53, 80	79, 119, 179, 269, 404	111, 167, 251, 377, 566

Proposición 4.1 (Localización única)**.** *Todo entero $N \geq 0$ aparece exactamente una vez en la familia $\{T(a)\}_{a \equiv 0,4 \ (\mathit{mód}\ 6)}$. Si*

$$N + 1 = 2^m\,3^s\,q, \qquad \gcd(q, 6) = 1,$$

entonces $N = T(a)_{n,j}$ con

$$a = q - 1, \qquad n = m + s + 1, \qquad j = s + 1.$$

Además, N es el extremo de su fila si y sólo si N es par.

Demostración. La igualdad $N = T(a)_{n,j}$ equivale a $N + 1 = (a+1)\,2^{\,n-j}\,3^{\,j-1}$. Como $a+1$ es primo con 6, la factorización única de $N+1$ obliga a $a+1 = q$, $n - j = m$ y $j - 1 = s$, y recíprocamente estos valores satisfacen la igualdad, con $1 \leq j \leq n$. Como q es primo con 6, se tiene $q \equiv 1, 5 \pmod 6$, es decir, $a \equiv 0, 4 \pmod 6$. Por último, N es par si y sólo si $N+1$ es impar, esto es, si y sólo si $m = 0$, lo que equivale a $j = n$. □

Así, en cada fila con $n \geq 2$ los términos $T(a)_{n,j}$ con $j < n$ son impares y el extremo es par.

Corolario 4.2 (Relación con los bloques)**.** *Sea $A = T(a)_{n,j}$ un impar, de modo que $j < n$. El bloque triangular de A en el sentido de la Sección 2 tiene altura $\nu_2(A+1) = n - j$ y vértice $u = (a+1)\,3^{j-1}$, sus términos son*

$$A_i = T(a)_{n,j+i}, \qquad 0 \le i \le n - j,$$

y su término terminal es el extremo de la fila:

$$B = 3^{n-j}u - 1 = (a+1)\,3^{n-1} - 1 = L_n.$$

En particular, todos los impares de una misma fila comparten el mismo término terminal, y el bloque de un impar es el tramo de su fila que va desde él hasta el extremo.

Demostración. Por la Proposición 4.1, $A+1 = (a+1)\,2^{n-j}\,3^{j-1}$ con $a+1$ impar, luego $\nu_2(A+1) = n-j$ y $u = (a+1)\,3^{j-1}$. Entonces $A_i = 3^i 2^{n-j-i}u - 1 = (a+1)\,2^{n-j-i}\,3^{j+i-1} - 1 = T(a)_{n,j+i}$. □

Observación 4.3 (Primeros términos y extremos)**.** *La aplicación que envía el primer término $T(a)_{n,1}$ de cada fila con $n \ge 2$ a su extremo L_n es una biyección entre los impares $F \not\equiv 2 \pmod 3$ y los pares $P \equiv 2 \pmod 6$. Explícitamente, si $F + 1 = 2^k m$ con m impar, entonces $3 \nmid m$ y la imagen es $P = 3^k m - 1$; recíprocamente, si $P + 1 = 3^k m$ con $3 \nmid m$, el impar correspondiente es $F = 2^k m - 1$.*

En efecto, por la Proposición 4.1, un impar F ocupa la primera columna de su fila si y sólo si $s = 0$, es decir, si y sólo si $3 \nmid F + 1$, lo que equivale a $F \not\equiv 2 \pmod 3$; en ese caso $F = (a+1)2^{n-1} - 1$ con $m = a + 1$ y $k = n - 1$. Del mismo modo, un par P es el extremo de una fila con $n \ge 2$ si y sólo si $3 \mid P + 1$, es decir, $P \equiv 2 \pmod 6$. Como cada una de estas filas tiene un único primer término y un único extremo, la correspondencia es biyectiva.

Si se considera, en cambio, la aplicación que envía cada impar al término terminal de su bloque, se obtiene una aplicación sobre los mismos pares que no es inyectiva: por el Corolario 4.2, todos los impares de una fila comparten el mismo extremo. Por ejemplo, 3 y 5 están en la fila 3, 5, 8 de $T(0)$ y sus bloques terminan ambos en 8.

En la representación por bloques el vértice u puede contener factores 3; en la familia $T(a)$ esos factores se traducen en el desplazamiento de columna $j-1$. Las dos disposiciones contienen, por tanto, los mismos tramos y los mismos términos terminales. Para la órbita de 39 de la Sección 3 se obtiene la siguiente lectura por filas:

entrada	posición	tramo de la fila	impar siguiente
39	$T(4)_{4,1}$	39, 59, 89, 134	67
67	$T(16)_{3,1}$	67, 101, 152	19
19	$T(4)_{3,1}$	19, 29, 44	11
11	$T(0)_{4,2}$	11, 17, 26	13
13	$T(6)_{2,1}$	13, 20	5
5	$T(0)_{3,2}$	5, 8	1
1	$T(0)_{2,1}$	1, 2	1

Los extremos $134, 152, 44, 26, 20, 8, 2$ son los términos terminales de los bloques de la Sección 3, y la última fila, formada por 1 y 2, se cierra sobre sí misma.

La familia fija permite describir también los predecesores de un impar.

Proposición 4.4 (Predecesores de un impar)**.** *Sea M un impar positivo. Los impares A cuyo bloque, seguido de su descenso par, conduce a M son exactamente los impares de las filas cuyo extremo es de la forma*

$$L = 2^k M, \qquad k \ge 1, \qquad 3 \mid L + 1.$$

Cada una de esas filas aporta $\nu_3(L+1)$ predecesores. En consecuencia, si $3 \mid M$, el impar M no tiene predecesores; si $M \equiv 1 \pmod 3$, las filas corresponden a los k impares, y si $M \equiv 2 \pmod 3$, a los k pares.

Demostración. Por el Corolario 4.2, el bloque de un impar A situado en la fila n de $T(a)$ termina en L_n, y su descenso par conduce a $L_n/2^{\nu_2(L_n)}$. Este valor es M si y sólo si $L_n = 2^k M$ con $k = \nu_2(L_n) \geq 1$. Además, como la fila contiene al impar A, se tiene $n \geq 2$ y $L_n + 1 = (a+1)\,3^{n-1}$ es múltiplo de 3.

Recíprocamente, sea $L = 2^k M$ con $k \geq 1$ y $3 \mid L+1$. Por la Proposición 4.1, el par L es el extremo de la fila $n = \nu_3(L+1)+1 \geq 2$ de un triángulo $T(a)$, y los $n-1$ impares de esa fila tienen bloques que terminan en L, cuyo descenso par conduce a M. Finalmente, $L+1 = 2^k M + 1 \equiv 0$ (mód 3) es imposible si $3 \mid M$, y en otro caso equivale a $2^k \equiv -M^{-1}$ (mód 3), es decir, a k impar si $M \equiv 1$ (mód 3) y a k par si $M \equiv 2$ (mód 3). □

Por ejemplo, para $M = 5$ los primeros valores admisibles son $k = 2, 4, 6$: el extremo 20 cierra la fila 13, 20 de $T(6)$; el extremo 80 cierra la fila 15, 23, 35, 53, 80 de $T(0)$; y el extremo 320 cierra la fila 213, 320 de $T(106)$. Los impares 13, 15, 23, 35, 53 y 213 conducen todos a 5. Iterando la proposición se obtiene el árbol de predecesores de cualquier impar no múltiplo de 3.

Observación 4.5. *La familia $T(a)$ no añade información a la representación por bloques: es otra disposición de la misma compresión exacta de la órbita clásica, y como ella no implica resultados sobre la convergencia de las órbitas ni sobre la existencia de ciclos no triviales. Su utilidad es práctica: cada entero tiene en ella una dirección fija (a, n, j), y las órbitas pueden recorrerse hacia delante, pasando de una fila a su extremo y de éste al impar siguiente, o hacia atrás, mediante la Proposición 4.4.*

Junto a este escrito, collatz.es ofrece dos generadores: uno para la representación por bloques de una órbita y otro para la familia $T(a)$, que calcula la posición de un entero, recorre la cadena de filas y construye el árbol de predecesores de un impar.

5. Alcance de la representación triangular

La representación triangular desarrollada en las secciones anteriores es una codificación exacta de determinados tramos de la dinámica clásica de Collatz. Su carácter exacto debe distinguirse, sin embargo, del alcance de las conclusiones que pueden extraerse de ella.

La identidad

$$B + 1 = (A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n, \qquad n = \nu_2(A+1),$$

describe completamente cada bloque triangular, pero no constituye por sí misma una condición de convergencia de la órbita. Del mismo modo, la concatenación sucesiva de bloques permite seguir una trayectoria mientras ésta exista, pero no demuestra que toda trayectoria deba alcanzar finalmente el valor 1.

La construcción tampoco excluye por sí sola la existencia de ciclos no triviales. Un eventual ciclo de Collatz tendría igualmente una representación mediante los bloques correspondientes, y cualquier imposibilidad de cierre debería demostrarse mediante argumentos aritméticos adicionales.

Por tanto, la utilidad de la representación triangular es de carácter estructural y descriptivo: reorganiza de forma exacta ciertos tramos de una órbita clásica y hace visible la alternancia entre dos mecanismos distintos:

1. las rachas determinadas por

$$n = \nu_2(A+1),$$

durante las cuales se cumple

$$A_j = 3^j 2^{\,n-j} u - 1;$$

2. los descensos pares que siguen al término terminal

$$B = 3^n u - 1$$

y conducen al impar que inicia el bloque siguiente.

Esta reorganización no modifica la dinámica de Collatz ni introduce una dinámica alternativa. Su finalidad es proporcionar una representación comprimida en la que determinadas regularidades aritméticas, menos visibles en la escritura término a término de la órbita clásica, aparecen agrupadas en bloques finitos.

6. Conclusiones

La representación triangular presentada en este trabajo proporciona una forma exacta de comprimir determinados tramos de las órbitas de Collatz.

Para todo impar A, la descomposición

$$A + 1 = 2^n u, \qquad n = \nu_2(A + 1),$$

determina un tramo finito

$$A_j = 3^j 2^{n-j} u - 1, \qquad 0 \le j \le n,$$

cuyo término terminal satisface

$$B + 1 = (A + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Cada transición interna del bloque corresponde exactamente a dos pasos de la dinámica clásica,

$$A_j \longmapsto 3A_j + 1 \longmapsto A_{j+1},$$

por lo que la construcción no introduce una dinámica nueva, sino una codificación comprimida de la existente.

La concatenación de estos bloques con los descensos pares que los separan permite representar una órbita mediante una sucesión de estructuras triangulares de alturas variables. La figura asociada a la órbita iniciada en 39 constituye un ejemplo explícito de esta descomposición.

Los mismos tramos se disponen también en la familia fija de triángulos $T(a)$, con $a \equiv 0, 4$ (mód 6), en la que cada entero positivo ocupa una posición única. En ella, el término terminal de un bloque es el extremo de la fila que contiene a su impar inicial, y los predecesores de un impar se leen en las filas cuyos extremos descienden hasta él.

La representación no implica por sí misma la convergencia de las órbitas ni excluye la existencia de ciclos no triviales. Su interés reside en hacer visible una estructura aritmética exacta basada en la valuación $\nu_2(A + 1)$ y en separar dicha estructura de la valuación $\nu_2(3A + 1)$ que gobierna el mapa impar acelerado.

En este sentido, los triángulos deben entenderse como una herramienta de representación y compresión de la dinámica clásica de Collatz, y no como una modificación de ésta ni como una hipótesis adicional sobre su comportamiento global.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Dinámica modular tipo Collatz con $k = 9$: estructura cíclica y proyección por raíces digitales*, collatz.es, 2026.

[2] M. Cerdá Bennassar, *Dos formulaciones de una dinámica tipo Collatz*, collatz.es, 2026.