Dinámica modular tipo Collatz con $k = 9$: estructura cíclica y proyección por raíces digitales

Miguel Cerdá Bennassar

Julio–Agosto 2025
Revisión: septiembre de 2026

Resumen

Se estudia un modelo tipo Collatz con preservación modular, correspondiente al caso $k = 9$ de la familia $f_k(n) = n/2$ si n es par y $(n+k)/2$ si n es impar. Se demuestra que la dinámica posee exactamente tres ciclos disjuntos, que toda órbita converge a uno de ellos y que el ciclo alcanzado está determinado por la valoración $v_3(n)$, pues las tres capas $v_3(n) = 0$, $v_3(n) = 1$ y $v_3(n) \geq 2$ son invariantes. La proyección por raíces digitales induce la aplicación bien definida $r \mapsto 5r$ módulo 9, cuyos ciclos reproducen los de la dinámica.

Se compara después el modelo con la dinámica de Collatz mediante el grafo de transiciones entre raíces digitales. Las divisiones por 2 inducen en ambos casos la misma aplicación $r \mapsto 5r$ y, por tanto, los mismos tres ciclos en el subgrafo modular de las divisiones por 2; la diferencia reside en la rama impar, pues $3n + 1$ nunca es múltiplo de 3 y las capas de los múltiplos de 3 son transitorias en Collatz. Se muestra que la conservación de capas invariantes obliga a la multiplicidad de ciclos, sin que el recíproco sea cierto. El trabajo no extrae conclusiones sobre la existencia de ciclos no triviales en la dinámica de Collatz.

1. Introducción

La función de Collatz combina divisiones por 2 sobre los números pares con la operación $3n + 1$ sobre los impares. Una forma de entender qué papel desempeña cada uno de estos ingredientes consiste en estudiar modelos del mismo tipo en los que la rama impar se sustituye por otra operación y en los que la dinámica puede analizarse por completo.

En este trabajo se estudia la familia $f_k(n) = n/2$ si n es par y $f_k(n) = (n + k)/2$ si n es impar, con k impar, y en particular el caso $k = 9$. Para este modelo, que denotamos por g, se determinan todos los ciclos, se demuestra que toda órbita converge a uno de ellos y se identifica el mecanismo que decide a cuál: la conservación de las capas definidas por la valoración 3-ádica v_3. Se muestra además que g induce sobre las raíces digitales una aplicación bien definida, $r \mapsto 5r$ módulo 9.

La segunda parte compara el modelo con la dinámica de Collatz a través del grafo de transiciones entre raíces digitales. Ambas dinámicas comparten la acción de las divisiones por 2, pero difieren en la rama impar, y esa diferencia basta para que las capas invariantes de g desaparezcan en Collatz. Se formula con precisión el alcance de esta observación: la conservación de capas obliga a la existencia de varios ciclos, pero su ausencia no garantiza por sí misma un ciclo único. En particular, el trabajo no pretende deducir de esta comparación resultados sobre la conjetura de Collatz.

2. Definición del sistema

Definición 2.1. Sea $k \in \mathbb{N}$ impar. Definimos la familia de funciones tipo Collatz

$$f_k(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n+k)/2, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

En este trabajo se estudia exclusivamente el caso $k = 9$, que denotamos por

$$g(n) := f_9(n).$$

3. Estructura cíclica global

Teorema 3.1. *La función g posee exactamente tres ciclos disjuntos:*

1. *un ciclo de longitud 6: $C_6 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$,*
2. *un ciclo de longitud 2: $C_2 = \{3, 6\}$,*
3. *y un punto fijo: $C_1 = \{9\}$.*

Además, toda órbita de g alcanza el conjunto $\{1, \ldots, 9\}$ en un número finito de pasos.

Demostración. Si $n > 9$, entonces $g(n) < n$: para n par, $n/2 < n$, y para n impar, $(n+9)/2 < n$ equivale a $n > 9$. Por tanto, toda órbita desciende estrictamente mientras sus términos superen 9, y alcanza $\{1, \ldots, 9\}$ en un número finito de pasos. Este conjunto es invariante, pues $g(n) \leq (9+9)/2 = 9$ para $n \leq 9$.

Todo ciclo está contenido en $\{1, \ldots, 9\}$. En efecto, si un ciclo contuviera un término mayor que 9, sea M el mayor de ellos y x su predecesor en el ciclo, con $g(x) = M$. Si $x > 9$, entonces $M = g(x) < x \leq M$; si $x \leq 9$, entonces $M = g(x) \leq 9$. Ambos casos son contradictorios.

Finalmente, la acción de g sobre $\{1, \ldots, 9\}$ es

$$1 \mapsto 5,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 6,\ 4 \mapsto 2,\ 5 \mapsto 7,\ 6 \mapsto 3,\ 7 \mapsto 8,\ 8 \mapsto 4,\ 9 \mapsto 9,$$

cuyos ciclos son exactamente

$$1 \to 5 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1, \qquad 3 \to 6 \to 3, \qquad 9 \to 9. \qquad \square$$

4. Preservación modular y capas v_3

Lema 4.1. *La función g preserva las clases módulo 3 según el esquema*

$$0 \mapsto 0, \qquad 1 \leftrightarrow 2.$$

Demostración. Si $n \equiv 0 \pmod 3$, entonces $g(n) \equiv 0 \pmod 3$ en ambas ramas, pues $9 \equiv 0 \pmod 3$. Si $n \equiv 1$ o $2 \pmod 3$, en ambas ramas se divide entre 2 un número congruente con n módulo 3, lo que equivale a multiplicar por $2^{-1} \equiv 2 \pmod 3$ y permuta ambas clases. $\square$

Teorema 4.2 (Convergencia por capas)**.** *Las capas*

$$L_0 = \{n : v_3(n) = 0\}, \qquad L_1 = \{n : v_3(n) = 1\}, \qquad L_2 = \{n : v_3(n) \geq 2\}$$

son invariantes por g, y toda órbita converge en tiempo finito al ciclo de su capa:

$$n \in L_0 \Rightarrow n \to C_6, \qquad n \in L_1 \Rightarrow n \to C_2, \qquad n \in L_2 \Rightarrow n \to C_1.$$

Demostración. La invariancia de L_0 es el Lema 4.1. Si $n = 3m \in L_1$, con $3 \nmid m$, entonces n y m tienen la misma paridad y

$$g(n) = 3 \cdot \frac{m}{2} \quad (m \text{ par}), \qquad g(n) = 3 \cdot \frac{m+3}{2} \quad (m \text{ impar}),$$

donde ni $m/2$ ni $(m+3)/2$ son múltiplos de 3; luego $g(n) \in L_1$. Si $n = 9m \in L_2$, entonces $g(n) = 9 \cdot m/2$ o $g(n) = 9 \cdot (m+1)/2$, que sigue siendo múltiplo de 9; luego $g(n) \in L_2$.

Por el Teorema 3.1, toda órbita alcanza $\{1, \ldots, 9\}$ en tiempo finito, y por la invariancia lo hace dentro de su capa. Como $L_0 \cap \{1, \ldots, 9\} = C_6$, $L_1 \cap \{1, \ldots, 9\} = C_2$ y $L_2 \cap \{1, \ldots, 9\} = C_1$, se sigue el resultado. □

5. Proyección por raíces digitales

Definición 5.1. Denotamos por $\rho(n)$ la raíz digital de n, es decir, su resto módulo 9, tomando $\rho(n) = 9$ si $9 \mid n$.

Proposición 5.2. *La función g induce sobre las raíces digitales una aplicación bien definida, que coincide en ambas ramas con*

$$r \mapsto 5r \pmod 9.$$

En consecuencia, el grafo funcional inducido sobre $\{1, \ldots, 9\}$ contiene exactamente los ciclos

$$(1, 5, 7, 8, 4, 2), \qquad (3, 6), \qquad (9),$$

que reproducen los ciclos C_6, C_2 y C_1 de g.

Demostración. Como $2 \cdot 5 \equiv 1 \pmod 9$, dividir por 2 equivale a multiplicar por 5 módulo 9. Para n par, $n/2 \equiv 5n$, y para n impar, $(n+9)/2 \equiv 5(n+9) \equiv 5n \pmod 9$. Los ciclos de $r \mapsto 5r$ en $\{1, \ldots, 9\}$ son los indicados. □

Observación 5.3. El ciclo $C_6 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ coincide con el grupo de unidades $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$, de orden $\varphi(9) = 6$, y la acción de g sobre sus raíces digitales es la multiplicación por 5, que es un generador de este grupo cíclico: las potencias 5^k recorren $1, 5, 7, 8, 4, 2$. Los ciclos $C_2 = \{3, 6\}$ y $C_1 = \{9\}$ son las órbitas de la misma multiplicación sobre los elementos no invertibles, es decir, sobre los múltiplos de 3 no nulos y sobre el 0 (representado por 9). Así, la partición en tres capas del Teorema 4.2 corresponde, módulo 9, a la partición de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ en unidades, múltiplos de 3 no nulos y cero.

Como $5^6 \equiv 1 \pmod 9$, se tiene $\rho(g^6(n)) = \rho(n)$ para todo n: la sucesión de raíces digitales de cualquier órbita de g es periódica desde su primer término, con período 6, 2 o 1 según la capa, aunque los propios términos solo alcancen su ciclo al cabo de varios pasos. Por ejemplo, la órbita $100, 50, 25, 17, 13, 11, 10, 5, \ldots$ tiene raíces digitales $1, 5, 7, 8, 4, 2, 1, 5, \ldots$.

6. Comparación con la dinámica de Collatz

Sea $C(n) = n/2$ si n es par y $C(n) = 3n + 1$ si n es impar. Módulo 9 se tiene

$$\rho\Big(\frac{n}{2}\Big) \equiv 5\rho(n), \qquad \rho(3n+1) \equiv 3\rho(n) + 1 \pmod 9.$$

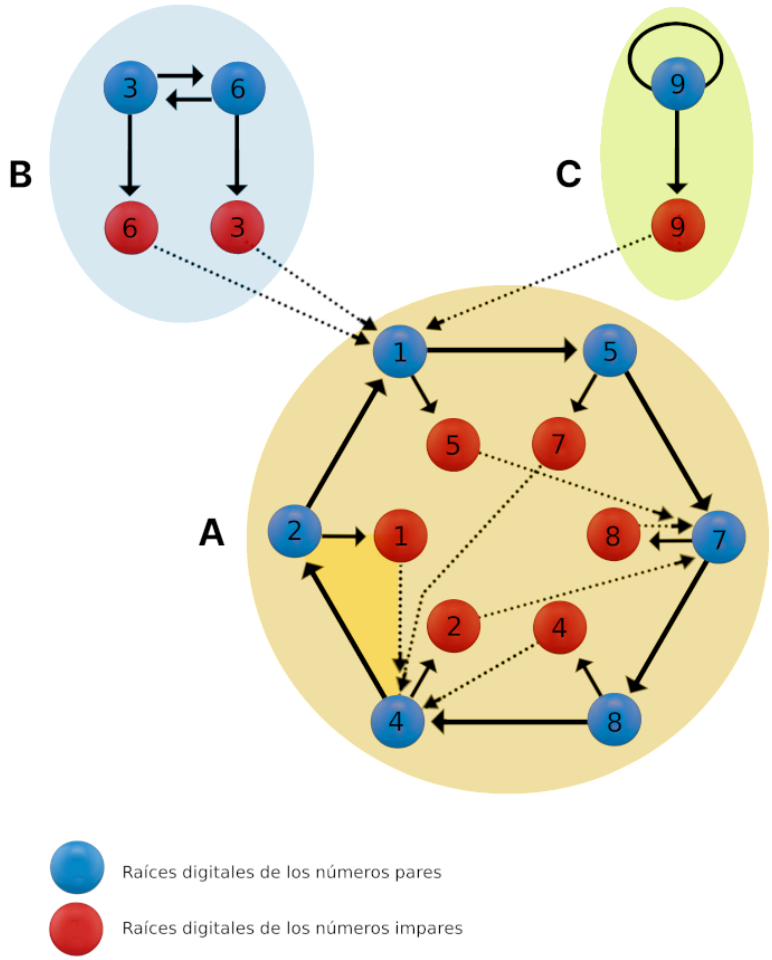

Figura 1: Transiciones de la dinámica de Collatz entre raíces digitales. Azul: números pares; rojo: impares. Flechas continuas: $n/2$ ($r \mapsto 5r$ mód 9); punteadas: $3n+1$ ($r \mapsto 3r+1$ mód 9). Cada estado par tiene dos sucesores posibles según la paridad del cociente. Las zonas B y C (múltiplos de 3) no reciben flechas desde la zona A.

Teorema 6.1. *Las transiciones $n \mapsto n/2$ de la dinámica de Collatz inducen sobre las raíces digitales la aplicación $r \mapsto 5r \pmod 9$, que coincide con la aplicación inducida por g en sus dos ramas (Proposición 5.2). En consecuencia, el subgrafo de transiciones $n/2$ de la Figura 1 contiene exactamente los mismos ciclos que g:*

$$(1, 5, 7, 8, 4, 2), \qquad (3, 6), \qquad (9).$$

Demostración. Como $2 \cdot 5 \equiv 1 \pmod 9$, dividir por 2 equivale a multiplicar por 5 módulo 9, sea cual sea la paridad del cociente. Los ciclos de $r \mapsto 5r$ en $\{1, \ldots, 9\}$ son los indicados. □

La diferencia entre ambas dinámicas reside en la rama impar. En g, $(n+9)/2 \equiv 5n \pmod 9$, de modo que la proyección es una función bien definida y las capas v_3 se conservan. En Collatz, en cambio, $\rho(3n+1) \in \{1, 4, 7\}$ para todo n, y la proyección deja de ser una función: cada estado par tiene dos sucesores posibles, según la paridad de $n/2$. En consecuencia, la sucesión de raíces digitales de una órbita de Collatz no está determinada por su valor inicial, a diferencia de lo que ocurre en g (Observación 5.3).

Proposición 6.2. *En la dinámica de Collatz, los múltiplos de* 3 *son transitorios: si* $3 \nmid n$*, entonces* $3 \nmid C(n)$*; y toda órbita que parte de un múltiplo de* 3 *lo abandona en su primer paso impar y no vuelve.*

Demostración. Si $3 \nmid n$, entonces $3 \nmid n/2$ y $3n + 1 \equiv 1$ (mód 3). Si $3 \mid n$, las divisiones por 2 conservan la divisibilidad por 3 hasta alcanzar un impar m, y entonces $3m + 1 \equiv 1$ (mód 3). □

Observación 6.3. Los ciclos del Teorema 6.1 son ciclos del subgrafo modular de las divisiones por 2, no ciclos orbitales de la dinámica de Collatz: una órbita real no puede permanecer indefinidamente en ellos, porque al aparecer un impar actúa la rama $3n + 1$. Sus estados desempeñan papeles distintos en las órbitas. Los estados de los ciclos modulares (9) y (3, 6) solo pueden aparecer durante el tramo inicial de una órbita que parte de un múltiplo de 3, antes del primer paso impar (por ejemplo, $144 \to 72 \to 36 \to 18 \to 9$). En cambio, los estados del ciclo modular $(1, 5, 7, 8, 4, 2)$ pueden reaparecer a lo largo del resto de la órbita, intercalados con las transiciones de la rama impar, que reingresan por los estados pares 4 y 7 (o 1, desde un múltiplo de 3). El grafo completo contiene además otros ciclos que combinan pasos pares e impares, como $7 \to 8 \to 7$; la proyección describe las transiciones posibles, pero no decide por sí sola el comportamiento global de las órbitas.

7. Capas invariantes y multiplicidad de ciclos

La comparación de la sección anterior muestra que g y la dinámica de Collatz comparten la acción de las divisiones por 2 sobre las raíces digitales y difieren únicamente en la rama impar. Esta diferencia determina si la partición en capas v_3 se conserva o no.

Proposición 7.1 (Capas invariantes)**.** *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una aplicación en la que toda órbita es eventualmente periódica, y sea* $\mathbb{N} = L_1 \cup \cdots \cup L_m$ *una partición en conjuntos no vacíos con* $f(L_i) \subseteq L_i$ *para todo* i*. Entonces* f *posee al menos* m *ciclos disjuntos, uno contenido en cada capa* L_i*.*

Demostración. Sea $n \in L_i$. Su órbita permanece en L_i y es eventualmente periódica, luego el ciclo en que desemboca está contenido en L_i. Ciclos contenidos en capas distintas son disjuntos. □

Corolario 7.2. *Las capas* L_0*,* L_1 *y* L_2 *del Teorema 4.2 son invariantes por* g*, de modo que* g *tiene al menos tres ciclos. Junto con el Teorema 3.1, tiene exactamente tres.*

En la dinámica de Collatz, las divisiones por 2 conservan las capas exactamente igual que en g, pues ambas inducen $r \mapsto 5r$ (Teorema 6.1). Es la rama impar la que las rompe: $3n+1$ nunca es múltiplo de 3, de modo que las capas de los múltiplos de 3 son transitorias (Proposición 6.2). En el grafo de la Figura 1, esto se traduce en que las zonas B y C solo emiten flechas hacia la zona A y no reciben ninguna desde ella. Por tanto, el mecanismo que en g obliga a la existencia de varios ciclos no está presente en Collatz.

Observación 7.3 (El recíproco no se cumple)*.* La ausencia de capas invariantes elimina ese mecanismo, pero no implica por sí misma la existencia de un único ciclo. La aplicación $n \mapsto n/2$ (n par), $n \mapsto 3n - 1$ (n impar) destruye la estructura módulo 3 del mismo modo que la de Collatz, pues $3n - 1 \not\equiv 0$ (mód 3), y sin embargo posee al menos tres ciclos disjuntos en los enteros positivos: los que contienen a 1, a 5 y a 17.

En consecuencia, si la dinámica de Collatz posee o no ciclos no triviales es una cuestión que este análisis no resuelve.

8. Conclusión

La función g, definida por $g(n) = (n + 9)/2$ en los impares, constituye un modelo tipo Collatz completamente analizable. Toda órbita desciende a $\{1, \ldots, 9\}$, la dinámica se descompone en tres capas invariantes determinadas por v_3, y cada capa contiene exactamente un ciclo. Además, g induce módulo 9 la aplicación bien definida $r \mapsto 5r$, cuyos ciclos reproducen los de g.

La comparación con la dinámica de Collatz, recogida en el grafo de raíces digitales, muestra que ambas comparten la acción de las divisiones por 2: las transiciones $n/2$ de Collatz inducen la misma aplicación $r \mapsto 5r$ y, por tanto, los mismos tres ciclos en el subgrafo modular inducido por las divisiones por 2: $(1, 5, 7, 8, 4, 2)$, $(3, 6)$ y (9). La diferencia está en la rama impar. Mientras g conserva las capas v_3, la operación $3n + 1$ envía todo impar a las raíces digitales 1, 4 o 7, de modo que los estados de los ciclos modulares (9) y $(3, 6)$ solo aparecen en el tramo inicial de las órbitas que parten de un múltiplo de 3, mientras que los estados del ciclo modular $(1, 5, 7, 8, 4, 2)$ son los únicos que reaparecen a lo largo del resto de la órbita.

Esta diferencia identifica con precisión un mecanismo estructural: la conservación de capas invariantes obliga a la coexistencia de varios ciclos, y ese mecanismo está ausente en Collatz. No demuestra, sin embargo, la unicidad del ciclo trivial de Collatz, como muestra el ejemplo de $3n - 1$, en el que la misma ausencia de capas es compatible con varios ciclos.