Valoraciones 2-ádicas a lo largo de las órbitas de Collatz: resultados exactos, el corredor de 233 y seis trampas metodológicas

Nota II (de cierre)

Miguel Cerdá Bennassar
ORCID: 0000-0001-8360-1933

Octubre de 2026 (revisada en noviembre de 2026)

Resumen

La Nota I [1] propuso un experimento (su Problema 9) para comparar las fluctuaciones de las valoraciones $\nu_i = \nu_2(3m_i + 1)$ a lo largo de órbitas de Collatz con un paseo aleatorio independiente. Entre julio y agosto de 2026 ese experimento dio lugar a una serie de treinta y tres notas, no publicadas, que creyeron detectar estructura propia de la dinámica: una dependencia de la amplitud con el grado de atipicidad de la órbita, un exceso de rachas de longitud tres, una memoria serial entre visitas consecutivas a ciertas clases residuales y, sobre todo, un "corredor" en torno al entero 233. Esta nota sustituye a toda esa serie. Reúne los resultados exactos que se sostienen, informa del experimento con los controles adecuados y documenta el origen de aquellas señales.

El resultado principal es negativo y nítido: fuera del tramo final de la órbita sobre enteros pequeños, ninguna de las estadísticas estudiadas, incluida la memoria entre visitas consecutivas, distingue las órbitas de Collatz del paseo independiente con la misma regla de parada. El exceso estadístico del corredor de 233 está dominado por un tramo de la órbita de 27, compartido por numerosas trayectorias: el entero 233 está en ella, a 29 pasos impares del final. Se demuestra que, en la celda que define el corredor, la clase módulo 1944 depende solo de la paridad de una valoración anterior, lo que da, en densidad para posiciones fijas, el reparto exacto $(1/3, 1/3, 1/6, 1/6)$; las frecuencias observadas a lo largo de órbitas completas, una vez excluida la cola, concuerdan con él. La nota termina con un catálogo de seis trampas metodológicas, cada una ilustrada con el caso real en que apareció.

Índice

1 Procedencia y objetivo **2**

2 Resultados exactos sobre la estructura aritmética de las órbitas **3**
2.1 Consecuencias inmediatas de la equidistribución 3
2.2 Longitud de una racha 3

2.3 Predecesores y embudo terminal . . . 4
2.4 Deriva determinista y normalización puente . . . 4
2.5 Iteración truncada módulo potencias de 3 . . . 4
2.6 La celda $(2,1,2)$ y sus cuatro clases . . . 5
2.7 Leyes de cilindros . . . 5

3 Experimentos **6**
3.1 Diseño común . . . 6
3.2 El Problema 9 de la Nota I . . . 6
3.3 Amplitud puente, atipicidad y permutaciones . . . 7
3.4 Rachas y transiciones entre rachas . . . 7
3.5 El corredor de 233 . . . 8
3.6 La memoria entre visitas consecutivas . . . 9

4 Seis trampas metodológicas **10**

5 Conclusión **11**

1 Procedencia y objetivo

La Nota I [1] compara los mecanismos de reducción del problema 3/2 de Mahler y de la conjetura de Collatz, y deja abierto un experimento: estudiar la amplitud de las sumas centradas de las valoraciones 2-ádicas a lo largo de órbitas completas y compararla con la de un paseo aleatorio independiente (Problema 9 de la Nota I). Ese experimento se desarrolló durante julio y agosto de 2026 en treinta y tres notas sucesivas que no llegaron a publicarse, porque el propio autor detectó problemas en algunas de ellas. Una revisión posterior, con controles que aquellas notas no aplicaban, mostró que todas sus señales estadísticas tenían el mismo origen.

Esta nota recoge lo que sobrevive. La Sección 2 reúne los resultados exactos, indicando cuándo son conocidos. La Sección 3 informa de los experimentos con sus controles. La Sección 4 cataloga las trampas metodológicas encontradas. No se reproducen aquí las notas originales; se citan solo sus resultados cuando son correctos.

Notación

Para $n > 1$ impar, $(m_i)_{i\ge 0}$ es la sucesión de impares de su órbita, $m_0 = n$, $m_{i+1} = (3m_i+1)/2^{\nu_i}$ con $\nu_i = \nu_2(3m_i+1)$, y $\tau(n) = \min\{k : m_k = 1\}$. Se usan, como en la Nota I,

$$S_k^{\mathrm{din}} = \sum_{i<k} (\nu_i - \log_2 3), \qquad S_k^{\mathrm{cen}} = \sum_{i<k} (\nu_i - 2),$$

$$\log_2 m_k = \log_2 m_0 - S_k^{\mathrm{din}} + \varepsilon_k,$$

con $\varepsilon_k = \sum_{i<k} \log_2(1 + 1/(3m_i)) > 0$ (Proposición 11 y Corolario 13 de la Nota I). Una *racha* es un bloque maximal de valoraciones consecutivas iguales a 1. El *modelo independiente* es el paseo con incrementos ν independientes de ley $\mathbb{P}(\nu = j) = 2^{-j}$, $j \ge 1$, detenido en el primer k con $S_k^{\mathrm{din}} \ge \log_2 n$ (o con la regla de parada que se indique en cada caso); es el modelo estocástico habitual del problema [7, 4].

El punto de partida de todo lo que sigue es la Proposición 7 de la Nota I: *en densidad sobre los impares iniciales, las valoraciones* $(\nu_0, \dots, \nu_{r-1})$ *son exactamente independientes y geométricas para cada* r *fijo*; más precisamente, cada patrón $(j_0, \dots, j_{r-1})$ corresponde a una única clase impar módulo 2^{J+1}, $J = \sum j_i$. Es la versión, para la sucesión acelerada de impares, de la equidistribución de vectores de paridad de Terras [8].

2 Resultados exactos sobre la estructura aritmética de las órbitas

2.1 Consecuencias inmediatas de la equidistribución

Corolario 1 (Racha siguiente)**.** *Fijadas una posición* i *y cualquier condición sobre* $(\nu_0, \dots, \nu_i)$*, sea* L' *el número de valoraciones iguales a* 1 *inmediatamente posteriores a la posición* i*. En densidad sobre los impares iniciales,*

$$\mathbb{P}(L' = k) = 2^{-(k+1)} \quad (k \geq 0);$$

en particular, $\mathbb{P}(L' = 3) = \mathbb{P}(L' \geq 4) = 1/16$.

Demostración. $L' = k$ equivale a $\nu_{i+1} = \cdots = \nu_{i+k} = 1$ y $\nu_{i+k+1} \geq 2$. Por la Proposición 7 de la Nota I, esas valoraciones son independientes de las anteriores y geométricas, lo que da $(1/2)^k \cdot (1/2)$. □

Observación 2. *Este corolario contiene, como casos particulares, varios resultados obtenidos por cálculo modular explícito en el trabajo previo: que, fijados la longitud* L *de una racha y su valoración de ruptura* a*, la racha siguiente tiene longitud* 3 *en exactamente uno de los* 16 *levantamientos posibles del parámetro residual; que fijar el tipo de cualquier número finito de rachas anteriores no altera esa proporción; y que los* 16 *levantamientos se reparten según* L' *como* $8, 4, 2, 1, 1$ *para* $L' = 0, 1, 2, 3, \geq 4$*. Son correctos y constituyen comprobaciones explícitas de la equidistribución, pero no información nueva sobre la dinámica. Si las valoraciones fueran independientes con* $\mathbb{P}(\nu = 1) = p_1 \neq 1/2$*, la predicción análoga sería* $\mathbb{P}(L' = k) = p_1^k(1 - p_1)$*; esto será importante en la Sección 4.*

2.2 Longitud de una racha

Proposición 3. *Para* n *impar, el número de valoraciones consecutivas iguales a* 1 *a partir de* n *es exactamente* $\nu_2(n + 1) - 1$*. En particular, es* 0 *(racha vacía) si y solo si* $n \equiv 1 \pmod 4$.

Demostración. Escríbase $n = t\,2^{L+1} - 1$ con t impar, de modo que $\nu_2(n+1) = L+1$. Si $L \geq 1$, entonces $3n + 1 = 2(3t\,2^L - 1)$ con $3t\,2^L - 1$ impar, luego $\nu_2(3n + 1) = 1$ y el siguiente impar es $3t\,2^L - 1 = (3t)2^L - 1$, de la misma forma con L reducido en una unidad. Si $L = 0$, el argumento final que sigue se aplica directamente. Iterando, se obtienen exactamente L valoraciones iguales a 1, hasta llegar a $3^L t \cdot 2 - 1$, cuyo siguiente paso tiene $3(3^L t \cdot 2 - 1) + 1 = 2(3^{L+1}t - 1)$ con $3^{L+1}t - 1$ par, es decir, valoración ≥ 2. □

Es un hecho conocido: la longitud de la racha es el número de unos finales de la expansión binaria de n, menos uno.

2.3 Predecesores y embudo terminal

Lema 4. *Un impar m tiene un predecesor impar en la órbita acelerada, es decir, existe p impar con $(3p+1)/2^{\nu_2(3p+1)} = m$, si y solo si $3 \nmid m$.*

Demostración. Es un hecho elemental conocido [6]. Si $m = (3p+1)/2^k$, entonces $m\,2^k = 3p+1 \equiv 1 \pmod 3$ y $3 \nmid m$. Recíprocamente, si $3 \nmid m$, elíjase $k \geq 1$ con $2^k \equiv m^{-1} \pmod 3$ (basta fijar la paridad de k); entonces $p = (m2^k - 1)/3$ es entero, positivo e impar, y $(3p+1)/2^k = m$ con $\nu_2(3p+1) = k$ porque m es impar. □

Proposición 5 (Último impar antes de 1)**.** *Para $n > 1$, el último impar $m_{\tau-1}$ es de la forma $(4^j - 1)/3$ con $j \geq 2$. Si además $\tau(n) \geq 2$, entonces $j \not\equiv 0 \pmod 3$: los primeros valores posibles son $5, 85, 341, 5461, 21845$ (para $j = 2, 4, 5, 7, 8$), y quedan excluidos $21, 1365, \ldots$*

Demostración. $3m_{\tau-1} + 1 = 2^v$ exige $2^v \equiv 1 \pmod 3$, es decir, $v = 2j$ par; $j = 1$ daría $m_{\tau-1} = 1$, luego $j \geq 2$. Si $\tau \geq 2$, $m_{\tau-1}$ tiene predecesor y, por el Lema 4, $3 \nmid m_{\tau-1}$. Como $3 \mid (4^j - 1)/3$ si y solo si $4^j \equiv 1 \pmod 9$, y el orden de 4 módulo 9 es 3, esto ocurre exactamente cuando $3 \mid j$. □

La proposición clasifica el último paso; no dice nada sobre las frecuencias. Empíricamente, alrededor del 94% de las órbitas terminan en $5 \to 16 \to 1$, en torno al 2% en 85 y en torno al 4% en 341, con proporciones estables entre semillas de 20 y 80 bits (Sección 3.2).

2.4 Deriva determinista y normalización puente

Proposición 6. *Para toda órbita que alcanza 1,*

$$S_\tau^{\text{cen}} = \log_2 n - \tau\,(2 - \log_2 3) + \varepsilon_\tau.$$

Demostración. Es el Corolario 13 de la Nota I en $k = \tau$, con $m_\tau = 1$, más la relación $S_k^{\text{din}} = S_k^{\text{cen}} + k(2 - \log_2 3)$. □

El valor final de S^{cen} no es libre: queda determinado por el par $(\log_2 n, \tau)$ salvo la corrección positiva ε_τ, acotada explícitamente por la Proposición 11 de la Nota I. En consecuencia, si se condiciona por τ dentro de un rango $n \leq X$, las órbitas con τ grande están obligadas a terminar con S_τ^{cen} muy negativo, y la amplitud $\max S^{\text{cen}} - \min S^{\text{cen}}$ crece por esa sola razón. La normalización puente

$$R_k := S_k^{\text{cen}} - \frac{k}{\tau}\,S_\tau^{\text{cen}}, \qquad A^{\text{puente}} := \frac{\max_k R_k - \min_k R_k}{\sqrt{\tau}}$$

elimina esa deriva. Obsérvese que R_k no cambia si se sustituye S^{cen} por S^{din}, porque ambas difieren en un término lineal en k.

2.5 Iteración truncada módulo potencias de 3

Lema 7. *Para todo $k \geq 1$ y toda posición $i \geq k$, el residuo $m_i \bmod 3^k$ está determinado por las k valoraciones anteriores $(\nu_{i-k}, \ldots, \nu_{i-1})$, y no depende de m_{i-k}.*

Demostración. De $2^{\nu_j} m_{j+1} = 3m_j + 1$ se sigue $m_{j+1} \equiv (3m_j + 1)\,2^{-\nu_j} \pmod{3^s}$, y el lado derecho módulo 3^s solo depende de $m_j \bmod 3^{s-1}$. Aplicándolo con $s = 1, 2, \ldots, k$ a los pasos $i-k, \ldots, i-1$, se obtiene $m_i \bmod 3^k$ a partir de $m_{i-k} \bmod 3^0$, es decir, de nada, y de las valoraciones intermedias. □

2.6 La celda $(2,1,2)$ y sus cuatro clases

Definición 8. *Se dice que la posición $i \geq 5$ es una* visita a la celda *si*

$$\nu_{i-5} \geq 2, \qquad (\nu_{i-4}, \nu_{i-3}, \nu_{i-2}, \nu_{i-1}) = (1,2,1,1), \qquad \nu_i \geq 2.$$

Equivale a que m_i cierre una racha de longitud 2, precedida por una ruptura de valoración 2 y, antes, por una racha maximal de longitud 1; es la celda $(a, L_{-1}, L) = (2,1,2)$ del trabajo previo.

Proposición 9. *Si i es una visita a la celda, entonces*

$$m_i \equiv \begin{cases} 233 & \text{si } \nu_{i-5} \text{ es par}, \\ 152 & \text{si } \nu_{i-5} \text{ es impar}, \end{cases} \pmod{243}, \qquad m_i \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } \nu_i = 2, \\ 5 & \text{si } \nu_i \geq 3, \end{cases} \pmod{8}.$$

En consecuencia, $m_i \bmod 1944$ pertenece a $\{233, 881, 1205, 1853\}$. Los pares de residuos (módulo 243, módulo 8) de estas cuatro clases son, respectivamente, $(233,1)$, $(152,1)$, $(233,5)$ y $(152,5)$.

Demostración. Por el Lema 7 con $k = 5$, $m_i \bmod 243$ depende solo de $(\nu_{i-5}, 1, 2, 1, 1)$, y del primer paso solo interviene $2^{-\nu_{i-5}} \bmod 3 = (-1)^{\nu_{i-5}}$. Si ν_{i-5} es par: $m_{i-4} \equiv 1 \pmod 3$; $m_{i-3} \equiv 4 \cdot 2^{-1} \equiv 2 \pmod 9$; $m_{i-2} \equiv 7 \cdot 4^{-1} \equiv 22 \pmod{27}$; $m_{i-1} \equiv 67 \cdot 2^{-1} \equiv 74 \pmod{81}$; $m_i \equiv 223 \cdot 2^{-1} \equiv 233 \pmod{243}$. Si es impar, la misma cadena da 2, 8, 13, 20, 152. Para el módulo 8: con $m_i \equiv 1 \pmod 4$, $3m_i + 1 \equiv 4 \pmod 8$ si $m_i \equiv 1 \pmod 8$ y $\equiv 0 \pmod 8$ si $m_i \equiv 5 \pmod 8$. La última afirmación es el teorema chino del resto con $1944 = 8 \cdot 243$. □

Corolario 10 (Reparto bajo equidistribución)**.** *Para una posición fija $i \geq 5$, en densidad sobre los impares iniciales y condicionado a que i sea una visita a la celda, las clases $233, 1205, 881, 1853 \pmod{1944}$ tienen probabilidades exactas $1/3,\ 1/3,\ 1/6,\ 1/6$.*

Demostración. Por la Proposición 7 de la Nota I, condicionado al patrón, ν_{i-5} y ν_i son independientes con ley geométrica condicionada a ser ≥ 2. Entonces $\mathbb{P}(\nu_{i-5} \text{ par}) = \sum_{k \geq 1} 2^{-2k} \big/ \frac{1}{2} = 2/3$ y $\mathbb{P}(\nu_i = 2) = 1/2$. La Proposición 9 da $\mathbb{P}(233) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(1205) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(881) = \mathbb{P}(1853) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$. □

Observación 11. *El trabajo previo llegó a las mismas cuatro clases por otra vía, combinando una congruencia módulo 162 con la condición de cierre de racha y el criterio del Lema 4. La Proposición 9 es más directa y da además la regla de paridad, que es la que fija el reparto. El corolario vale exactamente en la ventana de equidistribución; para visitas posteriores es una predicción, que la Sección 3.5 confirma numéricamente.*

2.7 Leyes de cilindros

Proposición 12. *Para x impar y $r \geq 1$, $\nu_2(3x+1) = r$ si y solo si $x \equiv 3^{-1}(2^r - 1) \pmod{2^{r+1}}$.*

Demostración. $\nu_2(3x+1) = r$ equivale a $3x + 1 \equiv 2^r \pmod{2^{r+1}}$, y 3 es invertible módulo 2^{r+1}. □

Es el caso de una sola valoración de la Proposición 7 de la Nota I. El trabajo previo desarrolló a partir de ella parametrizaciones afines exactas de los parámetros residuales a lo largo de varias visitas a la celda, una periodicidad de periodo $1458 = 2 \cdot 3^6 = \varphi(3^7)$ (consecuencia de que 2 es raíz primitiva módulo 3^n, hecho clásico) y un conteo exacto $(730, 728)$ de cierta orientación sobre ese ciclo. Esas cuentas son, hasta donde se ha revisado, correctas, pero describen la contabilidad de una parametrización determinista cuyo efecto estadístico, bajo equidistribución, es nulo (Sección 3.6); por eso no se reproducen aquí.

3 Experimentos

3.1 Diseño común

Salvo indicación contraria, los puntos iniciales se eligen tomando una longitud en bits y bits aleatorios, no enteros consecutivos (véase la trampa T2). Cada experimento se compara con el modelo independiente sometido a la misma regla de parada y al mismo condicionamiento. Se usan tres cortes de la cola: hasta $m = 1$; por número de pasos, como en el trabajo previo; y por tamaño, deteniendo la órbita al bajar por primera vez de 2^{10}. Los guiones de cálculo, con semilla fija, están disponibles a petición del lector.

Las simulaciones del modelo usan valoraciones independientes generadas con $\mathbb{P}(\nu = j) = 2^{-j}$. El *modelo* a secas se detiene en el primer k con $S_k^{\mathrm{din}} \geq \log_2 n$, aceptando el sobrepaso que se produzca; omite, por tanto, la corrección ε_k, mientras que la órbita real satisface $S_\tau^{\mathrm{din}} = \log_2 n + \varepsilon_\tau$ (Corolario 13 de la Nota I). El *modelo con +1* conserva esa corrección: itera $x_{k+1} = (3x_k + 1)/2^{\nu_k}$ sobre números reales, con $x_0 = n$, y se detiene en el primer k con $x_k \leq 1$. Cuando se corta por tamaño, ambos se detienen al llegar a $\log_2 n - 10$ en lugar de a $\log_2 n$. El control de fusión recorre las órbitas de la muestra en orden y corta cada una en el primer valor ya visitado por una órbita anterior. El número de órbitas de cada experimento se indica junto a sus resultados.

3.2 El Problema 9 de la Nota I

Control. Con ventanas fijas de $N = 16$ pasos impares y semillas de 120 bits, la amplitud normalizada media es 1.8057 en Collatz y 1.8052 en el modelo, con cuantiles idénticos (Kolmogórov–Smirnov, $p = 0.995$). Es lo que garantiza el Corolario 8 de la Nota I y valida el código.

Órbitas completas. La amplitud de órbita completa $A(n)$ de la Nota I da:

semillas	Collatz	modelo	modelo con +1	$\tau/\log_2 n$ (Collatz)
2^{20}	2.253	2.060	2.070	2.429
2^{40}	2.167	2.097	2.105	2.417
2^{80}	2.163	2.130	2.138	2.415
2^{160}	2.185	2.160	2.169	2.412
2^{320}	2.190	2.189	2.193	2.412

El exceso de Collatz decrece con n y desaparece en 2^{320} (Kolmogórov–Smirnov frente al modelo, $p = 0.95$); los valores observados de $\tau/\log_2 n$ se aproximan a $1/(2-\log_2 3) \approx 2.409$. La última valoración de la órbita es 4 en torno al 94% de los casos, 8 en torno al 2% y 10 en torno al 4%, mientras que en el modelo se reparte entre 2 y más de 10. Cortando las órbitas al bajar de 2^{10}, la diferencia con el modelo pasa a -0.020, -0.011 y -0.003 para semillas de 2^{20}, 2^{40} y 2^{80} (esta última con $p = 0.86$). La diferencia observada disminuye al aumentar el tamaño de las semillas y se reduce notablemente al truncar la cola por tamaño; no se afirma aquí ninguna tasa asintótica.

3.3 Amplitud puente, atipicidad y permutaciones

Se define el grado de atipicidad $r = \tau/\tau_{\text{tip}}$, con $\tau_{\text{tip}} = \log_2 n/(2-\log_2 3)$, y el cociente Q entre A^{puente} de la órbita real y su media sobre permutaciones de sus propias valoraciones. Con semillas de 20 a 40 bits y $\tau \geq 50$:

	A^{puente}		Q	
$r \in$	$[0.85, 1)$	$[1.5, 2)$	$[0.85, 1)$	$[1, 1.15)$
Collatz hasta 1	1.747	1.454	1.129	1.171
modelo	1.618	1.412	1.002	1.000
Collatz cortado en 2^{10}	1.595	1.399	1.001	0.997
modelo cortado en 2^{10}	1.614	1.407	1.002	0.989

Con la órbita completa, A^{puente} presenta un máximo cerca de $r \approx 1$ y Q llega a 1.17; en el modelo, A^{puente} decrece de forma monótona con r y $Q \approx 1$. Cortada la cola por tamaño, Collatz coincide con el modelo en todos los bins. La disminución de la amplitud con r es, por tanto, genérica de cualquier paseo condicionado a tardar más de lo normal, y el máximo y el exceso de Q vienen del tramo final. Como confirmación, el exceso de Q se diluye al crecer n: para $r \in [0.85, 1.3)$ vale 1.216, 1.097, 1.024 y 1.007 con semillas de 22–26, 40–44, 80–90 y 200–220 bits.

3.4 Rachas y transiciones entre rachas

Se mide, por órbita, el exceso frente a permutaciones de la fracción de rachas de longitud 3 y de las transiciones $2 \to 3$ y $5 \to 3$ entre rachas consecutivas, con bootstrap por órbita. Con semillas de 80 bits:

	$L = 3$	$2 \to 3$	$5 \to 3$
sin los últimos 25 pasos	$+0.0064$ ($z = 6.4$)	$+0.0272$ ($z = 11.4$)	$+0.0032$ ($z = 0.5$)
corte en 2^{10}*	$+0.0002$ ($z = 0.5$)	$+0.0030$ ($z = 2.8$)	-0.0013 ($z = -0.4$)
modelo, misma parada*	$+0.0013$ ($z = 2.6$)	$+0.0013$ ($z = 1.2$)	$+0.0014$ ($z = 0.4$)

* 12 000 órbitas; la primera fila, 3000.

El exceso aparente desaparece al cortar la cola por tamaño. Lo que queda es del orden de lo que el propio procedimiento produce sobre el modelo, que no tiene ninguna estructura. Un diseño alternativo del trabajo previo, que tomaba 500 pasos desde semillas de 100 bits sin exigir convergencia, daba excesos aún mayores ($z = 98.6$, 51.7 y 33.2); se analiza en la trampa T4.

Para la probabilidad $\mathbb{P}(L' = 3 \mid L = 2)$, el trabajo previo comparaba con $1/16$. Con τ entre 190 y 212, la fracción de valoraciones iguales a 1 en el interior de la órbita es 0.502, 0.541 y 0.575 en los bins $0.8 < r < 1.2$, $1.3 < r < 1.8$ y $2 < r < 3$; la predicción independiente con esa proporción es $p_1^3(1 - p_1) = 0.063$, 0.073 y 0.081. Frente al nulo por permutación, el exceso es +0.006, +0.014 y +0.015 quitando los últimos 25 pasos; +0.002, +0.004 y +0.003 cortando en 2^{10}; y +0.001, +0.001 y −0.003 si además se corta cada órbita al tocar un valor ya visitado por otra (todos con $|z| \le 1.4$).

3.5 El corredor de 233

El entero 233 pertenece a la órbita de 27, que tiene 41 pasos impares, alcanza su máximo en 9232 y llega a 1 a través de $577, 433, 325, 61, 23, 53, 5$. Desde 233 faltan 29 pasos impares. Inmediatamente antes de 233 las valoraciones son $(2, 1, 2, 1, 1)$ (desde 121, pasando por $91, 137, 103, 155$), de modo que 233 es una visita a la celda; e inmediatamente después vienen $175, 263, 395$, una racha de exactamente tres unos. El patrón $L_{-1} = 1$, $L = 2$, $L' = 3$ que el trabajo previo persiguió durante varias notas está, literalmente, en ese tramo de la órbita de 27.

Reparto de las visitas a la celda entre las cuatro clases módulo 1944:

semillas	visitas	233	1205	881	1853	entero 233 literal
30 bits, todas	26 940	61.7%	19.5%	10.2%	8.5%	42.0%
100 bits, todas	40 479	42.8%	28.3%	14.6%	14.2%	14.2%
100 bits, $m \ge 2^{64}$	14 177	33.6%	33.8%	16.2%	16.3%	—
400 bits, $m \ge 2^{64}$	25 475	33.6%	33.3%	16.8%	16.3%	—
1000 bits, $m \ge 2^{64}$	26 609	33.2%	33.0%	16.8%	17.0%	—

Las dos primeras filas reproducen las cifras del trabajo previo (61.0% y 42.7% para la clase 233). Excluyendo las visitas sobre enteros pequeños, el reparto coincide con el Corolario 10 en todas las escalas. La regla de paridad de la Proposición 9 se comprobó en 47 760 visitas sin excepción. El exceso de la clase 233 es, por tanto, el peso del entero 233 de la cola compartida, que se diluye al crecer n. El valor límite que predice la equidistribución para su cuota es $1/3$, en concordancia con los experimentos, y no el 31% que estimó el trabajo previo por extrapolación (trampa T5).

Por qué la cola pesa tanto. El exceso se diluye dentro de cada órbita, pero la probabilidad de recorrer el tronco de 27 no disminuye con el tamaño del punto de partida:

semillas	pasan por 233	pasan por $3077 \to 9232$	pasan por 27
15 bits	30.9%	38.4%	0%
60 bits	31.9%	39.2%	0%
240 bits	31.3%	38.7%	0%
480 bits	30.4%	37.9%	0%

Cerca de un tercio de las órbitas impares pasa por 233 y casi el 40% por 9232, desde semillas de 15 bits hasta semillas de 480, cuyas órbitas recorren más de mil

pasos impares antes de acercarse a los enteros pequeños. El propio 27 no aparece nunca: es múltiplo de 3 y, por el Lema 4, solo puede ser punto de partida; lo que comparten las demás órbitas es su continuación, desde 41. Una explicación heurística es que las órbitas que vienen de lejos entran en la zona de enteros pequeños por pocos puntos, y el punto de entrada depende solo de los últimos pasos, que se comportan como aleatorios; la distribución de entrada converge así a un límite que no recuerda el origen de la órbita.

Esto se enmarca en una cuestión conocida. Si $\pi_a(x)$ cuenta los $n \le x$ cuya trayectoria pasa por a, Applegate y Lagarias demostraron que $\pi_a(x) \ge x^{0.81}$ para todo $a \not\equiv 0 \pmod 3$ [2], y Krasikov y Lagarias elevaron el exponente a 0.84 para $a = 1$ [5]. Lo natural es esperar que $\pi_a(x)$ sea del orden de x, con una constante propia de cada a; las cifras anteriores son estimaciones numéricas de esa constante entre los impares, en torno a 0.31 para $a = 233$ y 0.39 para $a = 9232$. No se ha comprobado si estas constantes han sido estimadas sistemáticamente en la literatura.

3.6 La memoria entre visitas consecutivas

El trabajo previo estudió la asociación entre visitas consecutivas a la celda separadas por seis pasos, y en particular entre la clase de la primera visita y el bit H que indica si la segunda es $\equiv 5 \pmod 8$, encontrando informaciones mutuas de 0.002 a 0.018 bits con valores p de Monte Carlo muy pequeños.

Proposición 13. *Para posiciones fijas, en densidad sobre los impares iniciales y condicionado a que haya visitas a la celda en las posiciones i e $i+6$, el bit $H = [\nu_{i+6} \ge 3]$ es independiente de cualquier función de $(\nu_0, \dots, \nu_{i+5})$; en particular, de la clase de m_i módulo 1944, de ν_i y de $m_{i+1} \bmod 16$.*

Demostración. La clase de m_i módulo 243 depende de ν_{i-5} (Proposición 9) y la clase módulo 8 de ν_i. Por la Proposición 7 de la Nota I, un patrón inicial de valoraciones de suma J fija la clase del impar módulo 2^{J+1}; en particular, $m_{i+1} \bmod 16$ queda determinado por las valoraciones que lo siguen hasta acumular suma 3, que con el patrón impuesto son $\nu_{i+1} \ge 2$ y $\nu_{i+2} = 1$. Todas son anteriores a la posición $i+6$, y por la Proposición 7 de la Nota I, ν_{i+6} es independiente de ellas con ley geométrica condicionada a ser ≥ 2. □

Bajo equidistribución, la información mutua es exactamente cero. La proposición se refiere, sin embargo, a posiciones fijas y densidad sobre los puntos iniciales; no cubre por sí sola las visitas seleccionadas a lo largo de órbitas completas, que están condicionadas por la llegada a 1 y por la duración de la órbita. Una memoria real exigiría que, en las visitas posteriores a la ventana de equidistribución, las valoraciones dejaran de comportarse como independientes, justo lo que el resto de los experimentos no detecta fuera de la cola. En una muestra de 60 000 órbitas de 100 bits, solo el 3.8% de esas transiciones tiene destino menor que 2^{20} y el 5.5% tiene un destino visitado también por otra órbita; la fracción de transiciones duplicadas crece con el tamaño de la muestra, y el trabajo previo usó hasta 1.8 millones de órbitas. La predicción es que, eliminando las transiciones cuyo destino ya visitó otra órbita y limitándose a $m \ge 2^{40}$, la asociación desaparece.

Contraste. Se tomaron semillas aleatorias de 100 bits, con aritmética entera exacta, y se registraron todas las transiciones, es decir, los pares de visitas a la celda en las posiciones i e $i+6$. Para cada una de las tres variables de la Proposición 13 se formó la tabla de contingencia con H y se calcularon la información mutua y el estadístico G de razón de verosimilitudes, que bajo independencia sigue aproximadamente una ley χ^2 con 3 grados de libertad para la clase módulo 1944 y con 2 para $\nu_i \in \{2, 3, \geq 4\}$ y para m_{i+1} mod 16, que solo toma tres valores en las transiciones. Los resultados son los siguientes:

			clase mód. 1944		ν_i	m_{i+1} mod 16
muestra	órbitas	transiciones	IM (bits)	p	p	p
todas las transiciones	1 800 000	22 798	0.00089	$4 \cdot 10^{-6}$	0.068	0.007
$m \geq 2^{40}$, mismas órbitas	1 800 000	15 979	0.00034	0.056	0.13	0.25
$m \geq 2^{40}$	10 000 000	89 247	0.00004	0.16	0.37	0.48
$m \geq 2^{40}$, réplica	10 000 000	89 532	< 0.00001	0.95	0.25	0.44

En las filas con $m \geq 2^{40}$ se exige que lo sean tanto m_i como m_{i+6}; la réplica usa otro estado inicial del generador y es independiente de las demás muestras.

Con todas las transiciones de 1.8 millones de órbitas, como en el trabajo previo, reaparece una asociación del orden de una milésima de bit, muy significativa en apariencia. En esas mismas órbitas, limitándose a $m \geq 2^{40}$, la asociación con la clase deja de ser significativa: la mayor parte procedía de las 6 819 transiciones con valores menores. El control de fusión resulta innecesario en la práctica por encima de ese umbral: aplicado a los valores de $(2^{40}, 2^{48}]$ en una muestra de 2 millones de órbitas, solo cortó 205. En esa submuestra, que comparte sus semillas con las primeras órbitas de la serie de 10 millones, la clase dio $p = 0.014$; la desviación se diluye en la serie completa y no aparece en la réplica, y entre los contrastes realizados un valor así es compatible con el azar. Con 10 millones de órbitas, la información mutua queda por debajo de 10^{-4} bits en las dos muestras independientes y ningún contraste se aparta de la independencia; la proporción de $H = 1$ es 0.501 y 0.498, frente al valor 1/2 que predice la equidistribución. Con ese tamaño de muestra, una información mutua de 0.0005 bits daría $G \approx 62$, de modo que el contraste habría detectado asociaciones bastante menores que las del trabajo previo. La regla de paridad de la Proposición 9 se cumplió sin excepción en unos 40 millones de visitas distintas.

La predicción se confirma: la memoria entre visitas consecutivas procede de las transiciones sobre enteros pequeños, repetidas en muchas órbitas, y desaparece fuera de esa región (trampas T2 y T6).

4 Seis trampas metodológicas

T1. Cortar la cola por número de pasos. El tramo final determinista sobre enteros pequeños tiene longitud variable: 233 está a 29 pasos del final, y una órbita que entra por la cola de 27 recorre todavía decenas de pasos. Quitar los últimos 15 o 25 pasos dejaba dentro buena parte de ese tramo, y todas las señales de rachas y transiciones sobrevivían por eso. *Control:* cortar por tamaño, al bajar por primera vez de un umbral como 2^{10}.

T2. Fusión de órbitas. Las órbitas se funden en un tronco común; con semillas de 30 bits, el entero 233 es por sí solo el 42% de las visitas a la celda. Muestrear enteros consecutivos agrava el problema: en una muestra así del trabajo previo, solo el 6.6% de las visitas eran a valores únicos. Las observaciones repetidas no son independientes. *Control:* muestrear por bits aleatorios, cortar cada órbita al tocar un valor ya visitado por otra y, cuando proceda, limitarse a $m \geq 2^K$.

T3. Nulo que no respeta el condicionamiento. Clasificar las órbitas por r las condiciona: las órbitas largas tienen más valoraciones iguales a 1 ($p_1 = 0.575$ en el bin $2 < r < 3$). Comparar con $1/16$ en lugar de con $p_1^3(1 - p_1)$ fabricaba un exceso que crecía con r. Del mismo modo, $4/\sqrt{\pi}$ es la referencia para ventanas fijas, no para órbitas detenidas. *Control:* comparar con el modelo sometido a la misma parada y al mismo condicionamiento, o con permutaciones de cada órbita.

T4. Rellenar con el punto fijo. Una órbita de 100 bits llega a 1 en unos 241 pasos impares; en la muestra examinada, todas lo hicieron antes del paso 475. Tomar 500 pasos "sin exigir convergencia" añadía unos 260 pasos en el punto fijo, con $\nu = 2$, y dejaba la cola completa en mitad de la secuencia. Al permutar, esos doses acortaban artificialmente las rachas del nulo: de ahí excesos con z cercano a 100. Sobre las mismas órbitas cortadas en 2^{10}, todo vuelve a cero. *Control:* detener siempre la órbita en 1 o en un umbral.

T5. Extrapolar con un modelo ajustado. La cuota de la clase 233 caía de 61% a 43% entre 30 y 100 bits; una ley de potencias con límite libre, ajustada a esos datos, predecía un límite del 31% con un intervalo de confianza que excluía el 25%. La equidistribución predice $1/3$ (Corolario 10), y las frecuencias medidas a escalas mucho mayores, excluida la cola, concuerdan con ese valor. Un buen ajuste dentro del rango observado no garantiza el límite, y los intervalos condicionados a una familia de modelos no protegen contra el error de la familia. *Control:* buscar el límite teórico y comprobarlo directamente a escalas mucho mayores, eliminando el término que se diluye.

T6. Nulos de Monte Carlo sobre datos duplicados. Los contrastes de permutación o de Monte Carlo suponen observaciones independientes. Cuando varias órbitas comparten un tramo, la misma transición aparece varias veces, y un efecto minúsculo, del orden de milésimas de bit, puede resultar "extremadamente significativo". El problema empeora al aumentar la muestra, porque crecen las coincidencias. *Control:* eliminar duplicados antes de contrastar y comprobar el resultado en una muestra independiente.

5 Conclusión

El experimento propuesto en la Nota I tiene una respuesta clara. Fuera del tramo final de la órbita sobre enteros pequeños, la amplitud de las sumas de valoraciones, su forma puente, su dependencia del orden temporal y las estadísticas de rachas coinciden con las del paseo independiente con la misma regla de parada. Las desviaciones observadas proceden de ese tramo final y disminuyen al crecer n. Tampoco la

memoria entre visitas consecutivas a la celda resiste los controles: la asociación que encontró el trabajo previo procede de las transiciones sobre enteros pequeños y, por encima de 2^{40}, desaparece en dos muestras independientes de 10 millones de órbitas, como predice la equidistribución en posiciones fijas (Sección 3.6).

Sobreviven varios resultados exactos: la deriva determinista y su corrección puente, la clasificación del último impar antes de 1, la longitud de las rachas, la iteración truncada módulo 3^k y, como aplicación, la regla de paridad que fija la clase módulo 1944 en la celda $(2, 1, 2)$ y su reparto exacto en densidad $(1/3, 1/3, 1/6, 1/6)$. Sobrevive también una lección metodológica: durante treinta y tres notas se estudió con mucho rigor local un objeto dominado, sin saberlo, por un tramo de la órbita de 27 compartido por muchas trayectorias. Las seis trampas de la Sección 4 son las que permitieron que eso ocurriera, y los controles que las acompañan son los que lo deshacen.

La comparación con el problema de Mahler sigue donde la dejó la Nota I. Con las estadísticas estudiadas no aparece nada comparable con las amplitudes módulo 1 de Flatto, Lagarias y Pollington [3]; una continuación necesitaría una idea nueva en el lado de Mahler.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Dos mecanismos de reducción en dinámicas asociadas a* $3/2$*: módulo 1 en Mahler y valoración 2-ádica en Collatz*, nota exploratoria, collatz.es (2026).

[2] D. Applegate, J. C. Lagarias, *Density bounds for the* $3x+1$ *problem. II. Krasikov inequalities*, Math. Comp. **64** (1995), 427–438.

[3] L. Flatto, J. C. Lagarias, A. D. Pollington, *On the range of fractional parts* $\{\xi(p/q)^n\}$, Acta Arith. **70** (1995), 125–147.

[4] A. V. Kontorovich, J. C. Lagarias, *Stochastic models for the* $3x+1$ *and* $5x+1$ *problems*, en: J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x+1$ *Problem*, Amer. Math. Soc., Providence, 2010, 131–188.

[5] I. Krasikov, J. C. Lagarias, *Bounds for the* $3x+1$ *problem using difference inequalities*, Acta Arith. **109** (2003), 237–258.

[6] J. C. Lagarias, *The* $3x+1$ *problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.

[7] J. C. Lagarias, A. Weiss, *The* $3x+1$ *problem: two stochastic models*, Ann. Appl. Probab. **2** (1992), 229–261.

[8] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. **30** (1976), 241–252.