La dinámica F_2: escenario extendido, palabras de ramas y tiempos de parada

Miguel Cerdá Bennassar

Enero de 2026; revisado en septiembre de 2026

Resumen

Se estudia la dinámica F_2 introducida en el escrito precedente, sobre el escenario extendido $X = \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$. El cambio de variable $y = 2x$ la convierte en una aplicación entera G de tres ramas afines con divisores fijos, y todo el análisis se desarrolla en esa forma. Por el escrito precedente, G es conjugada, vía $m = 2y + 1$, al retorno impar de F_1, cuyas órbitas contienen las del operador impar de Collatz: G es una aceleración de Collatz con los descensos dentro de cada fibra intercalados.

Se demuestran cuatro resultados. Que los únicos puntos fijos son 0 y -1, que ningún ciclo tiene multiplicador 1 y que no existen ciclos positivos formados sólo por estados semienteros. Que la palabra de las n primeras ramas queda determinada por la clase de y módulo 4^n, y que cada palabra con a ramas impares procede de exactamente 2^a de esas clases, de modo que la medida inducida sobre las palabras es el producto de pesos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Que ningún iterado de G es uniformemente contractivo, pues la clase $y \equiv -1 \pmod{2^n}$ tiene multiplicador $(3/2)^n$. Y que casi todo entero positivo tiene tiempo de parada finito, con la cota explícita $\mathrm{dens}\{\sigma > n\} \leq (0{,}9536)^n$, resultado del tipo de los de Terras y Everett para esta aceleración.

La convergencia global de G al 0 equivale a la conjetura de Collatz, y por tanto no se resuelve aquí. Una sección final compara G con el operador de Collatz acelerado C: no son conjugadas, pero la convergencia global de una equivale a la de la otra.

1. Introducción

En el escrito precedente [1] se introdujeron dos formulaciones, F_1 y F_2, y se estableció que la primera despliega cada paso del operador impar T en un descenso dentro de una fibra seguido de un puente. Se probó además que F_2, pese a fijar los divisores de cada rama, es conjugada al retorno de F_1 a los impares, de modo que su convergencia global equivale a la conjetura de Collatz.

El presente trabajo estudia F_2 en forma entera y demuestra sobre ella los resultados que admite. Las demostraciones no usan la conjugación, pero su lectura correcta sí depende de ella: todo lo que aquí se prueba es una afirmación sobre una aceleración del operador de Collatz. La relación con T se recoge en la Proposición 2.3, y la comparación con el operador acelerado C en la Sección 8.

Comentario 1.1 (Dos correcciones a la versión anterior). La versión anterior de este trabajo afirmaba que F_1 actúa sobre $\mathbb{N}$ sin introducir nuevos tipos de estado. Es falso: $F_1(m) = (m-1)/4$ es un semientero siempre que $m \equiv 3 \pmod 4$, de modo que F_1 opera sobre el mismo escenario extendido X. Afirmaba también que la información sobre el colapso permanece implícita

en F_1; el escrito precedente la hace explícita al probar que la longitud del descenso vale $\lceil v_2(3m+1)/2 \rceil - 1$.

2. El escenario extendido y la forma entera

Definición 2.1 (La dinámica F_2)**.** Sobre $X = \mathbb{Z} \cup \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)$ se define

$$F_2(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{4}, & x \in \mathbb{Z} \text{ par}, \\ \dfrac{x-1}{4}, & x \in \mathbb{Z} \text{ impar}, \\ \dfrac{6x+1}{4}, & x \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Los semienteros son estados legítimos del sistema: materializan en el propio estado una información que de otro modo quedaría en la magnitud de los saltos. Para el análisis, sin embargo, conviene eliminarlos mediante un cambio de escala.

Proposición 2.2 (Forma entera)**.** *Sea $y = 2x$. Entonces $x \in X$ si y sólo si $y \in \mathbb{Z}$, y la conjugación por $x \mapsto 2x$ transforma F_2 en $G\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,*

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{3y+1}{2}, & y \text{ impar}, \\ \dfrac{y-2}{4}, & y \equiv 2 \pmod 4, \\ \dfrac{3y}{4}, & y \equiv 0 \pmod 4, \end{cases}$$

cuyas tres ramas corresponden, respectivamente, a los estados semienteros, a los enteros impares y a los enteros pares de X.

Demostración. $X = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, luego $y = 2x$ recorre $\mathbb{Z}$. Si x es entero par, $y \equiv 0 \pmod 4$ y $2F_2(x) = 3x/2 = 3y/4$; si x es entero impar, $y \equiv 2 \pmod 4$ y $2F_2(x) = (x-1)/2 = (y-2)/4$; si x es semientero, y es impar y $2F_2(x) = (6x+1)/2 = (3y+1)/2$. □

Llamamos `a`, `b` y `c` a las tres ramas, de factores

$$\lambda_{\mathtt{a}} = \tfrac{3}{2}, \qquad \lambda_{\mathtt{b}} = \tfrac{1}{4}, \qquad \lambda_{\mathtt{c}} = \tfrac{3}{4}.$$

El rasgo definitorio de G es que estos divisores son *fijos*: el sistema no presenta colapsos de profundidad variable. La profundidad no desaparece, sino que se convierte en duración, como precisa la proposición siguiente.

Proposición 2.3 (Relación con el operador impar)**.** *Sea H el retorno impar de F_1 del escrito precedente, $H(m) = (3m+1)/2$ si $m \equiv 3 \pmod 4$, $H(m) = (3m+1)/4$ si $m \equiv 1 \pmod 8$ y $H(m) = (m-1)/4$ si $m \equiv 5 \pmod 8$. Para todo $y \in \mathbb{Z}$,*

$$2\,G(y) + 1 = H(2y+1),$$

y las ramas `a`, `b` y `c` corresponden a las clases $m \equiv 3 \pmod 4$, $m \equiv 5 \pmod 8$ y $m \equiv 1 \pmod 8$ de $m = 2y+1$. En consecuencia, para $y > 0$ la órbita de y bajo G alcanza el 0 si y sólo si la órbita de $2y+1$ bajo el operador impar T alcanza el 1; y la afirmación de que toda órbita positiva de G alcanza el 0 equivale a la conjetura de Collatz.

Demostración. Si y es impar, $m = 2y + 1 \equiv 3 \pmod 4$ y $H(m) = (6y + 4)/2 = 3y + 2 = 2 \cdot \frac{3y+1}{2} + 1$. Si $y \equiv 0 \pmod 4$, $m \equiv 1 \pmod 8$ y $H(m) = (6y + 4)/4 = 2 \cdot \frac{3y}{4} + 1$. Si $y \equiv 2 \pmod 4$, $m \equiv 5 \pmod 8$ y $H(m) = 2y/4 = 2 \cdot \frac{y-2}{4} + 1$. La segunda parte es el Corolario de equivalencia de [1], con $0 \mapsto 1$. □

Las ramas `a` y `c` son, pues, pasos del operador impar (de valuación $v_2(3m + 1) = 1$ y 2), y la rama `b` es un paso de descenso dentro de una fibra, que no altera el valor de T.

3. Puntos fijos y restricciones sobre los ciclos

Proposición 3.1 (Puntos fijos)**.** *Los únicos puntos fijos de G en $\mathbb{Z}$ son $y = 0$ e $y = -1$; equivalentemente, los de F_2 en X son $x = 0$ y $x = -\frac{1}{2}$. El único punto fijo no negativo es 0.*

Demostración. $(3y + 1)/2 = y$ da $y = -1$, impar, admisible. $(y - 2)/4 = y$ da $y = -2/3$, no entero. $3y/4 = y$ da $y = 0$, que cumple $y \equiv 0 \pmod 4$. □

Por la Proposición 2.3, estos puntos fijos corresponden a los puntos fijos $m = 1$ y $m = -1$ del operador impar. Del mismo modo, el ciclo $\{-5, -7\}$ de T aparece en G como el ciclo $\{-3, -4\}$.

Proposición 3.2 (Ningún ciclo tiene multiplicador 1)**.** *Sea γ un ciclo de G de longitud $n \geq 1$ que recorre a veces la rama* `a`*, b veces* `b` *y c veces* `c`*. Su multiplicador $\alpha = (3/2)^a(1/4)^b(3/4)^c$ cumple $\alpha \neq 1$. En consecuencia, cada palabra de ramas de longitud n admite a lo sumo un punto periódico.*

Demostración. $\alpha = 1$ equivale a $3^{a+c} = 2^{a+2b+2c}$, lo que por unicidad de la factorización exige $a + c = 0$ y $a + 2b + 2c = 0$, es decir $a = b = c = 0$. La composición de las n ramas es una aplicación afín $y \mapsto \alpha y + \beta$ con $\alpha \neq 1$, que tiene un único punto fijo. □

Corolario 3.3 (No hay ciclos positivos de estados semienteros)**.** *Ningún ciclo de G contenido en los enteros positivos recorre únicamente la rama* `a`*.*

Demostración. Con $b = c = 0$ se tiene $\alpha = (3/2)^a > 1$ para $a \geq 1$, luego $1 - \alpha < 0$; y el término independiente de la composición, $\beta = \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{2}(3/2)^{a-i}$, es positivo. El punto fijo $\beta/(1 - \alpha)$ es entonces negativo. □

4. Las palabras de ramas y su medida exacta

Sea $w(y, n) \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^n$ la palabra formada por las ramas que G aplica a lo largo de los n primeros pasos de la órbita de y.

Teorema 4.1 (Determinación y distribución de las palabras)**.** *Para todo $n \geq 1$:*

1. *$w(y, n)$ depende únicamente de la clase de y módulo 4^n;*
2. *toda palabra de longitud n se realiza, y si contiene a veces la rama* `a`*, procede de exactamente 2^a clases módulo 4^n.*

En consecuencia, la medida que la equidistribución sobre las clases módulo 4^n induce en el conjunto de palabras es exactamente el producto de pesos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Demostración. Inducción sobre n. Para $n = 1$, la clase de y módulo 4 determina la rama; de las cuatro clases, dos son impares, una es $\equiv 2$ y otra $\equiv 0$, con cardinales 2, 1 y 1, es decir 2^a en cada caso.

Para el paso inductivo basta describir cómo se reparten las clases módulo 4^{n+1} al aplicar un paso. Si y es impar, recorre $2 \cdot 4^n$ clases módulo $4^{n+1} = 2^{2n+2}$; como 3 es invertible módulo 2^{2n+2} y $3y + 1$ es par, el valor $(3y + 1)/2$ queda determinado módulo 2^{2n+1}, de modo que cada clase de $G(y)$ módulo 4^n proviene de exactamente dos clases de y. Si $y \equiv 2 \pmod 4$, escribiendo $y = 4z + 2$ resulta $G(y) = z$, y z recorre biyectivamente las clases módulo 4^n. Si $y \equiv 0 \pmod 4$, escribiendo $y = 4z$ resulta $G(y) = 3z$, y $z \mapsto 3z$ es biyectiva módulo 4^n por ser 3 invertible.

Así, la primera rama queda determinada por y módulo 4, el resto de la palabra por $G(y)$ módulo 4^n, y los cardinales se multiplican por 2, 1 y 1 respectivamente, lo que da 2^a y prueba ambos puntos. La comprobación exhaustiva para $n \le 6$ no arroja ninguna desviación. □

Comentario 4.2. El teorema convierte cualquier pregunta sobre los n primeros pasos de G en una pregunta sobre n variables independientes de ley $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Las dos secciones siguientes son consecuencia suya.

5. Ausencia de contracción uniforme

Teorema 5.1 (Ningún iterado contrae uniformemente)**.** *Para todo $n \ge 1$,*

$$\sup_{y>0} \frac{G^n(y)}{y} \;\ge\; \left(\tfrac{3}{2}\right)^n.$$

En particular, no existen $\rho < 1$ y $n \ge 1$ tales que $G^n(y) \le \rho\, y$ para todo $y > 0$.

Demostración. Sea y impar con $v_2(y + 1) \ge n$, es decir $y \equiv -1 \pmod{2^n}$. El valor $(3y + 1)/2$ es impar si y sólo si $y \equiv 3 \pmod 4$, esto es, si y sólo si $v_2(y+1) \ge 2$; e iterando, los n primeros pasos recorren la rama `a`. Como $y \mapsto (3y + 1)/2$ equivale a $y + 1 \mapsto \frac{3}{2}(y + 1)$, se obtiene

$$G^n(y) = (y + 1)\left(\tfrac{3}{2}\right)^n - 1,$$

cuyo cociente por y tiende a $(3/2)^n$ cuando $y \to \infty$ dentro de esa clase. □

Comentario 5.2. El teorema descarta el método más directo de probar la convergencia global: no hay función de Lyapunov lineal ni iterado uniformemente contractivo. La clase responsable, $y \equiv -1 \pmod{2^n}$, tiene densidad 2^{-n}: el obstáculo es raro, pero no desaparece al crecer n.

6. Tiempos de parada

Definición 6.1 (Tiempo de parada)**.** Para $y > 0$ se define

$$\sigma(y) = \min\{\, n \ge 1 : G^n(y) < y \,\},$$

con $\sigma(y) = \infty$ si el conjunto es vacío.

Lema 6.2 (Forma afín de un tramo)**.** *Si $w(y,n) = w$ tiene multiplicador $\alpha_w = \lambda_{w_1}\cdots\lambda_{w_n}$, entonces $G^n(y) = \alpha_w\, y + \beta_w$, con β_w dependiente sólo de w.*

Demostración. Cada rama es afín, y la composición de aplicaciones afines es afín con multiplicador el producto de los multiplicadores. □

Teorema 6.3 (Casi todo entero tiene tiempo de parada finito)**.** *Sea Z la variable aleatoria que toma los valores $\log\frac{3}{2}$, $\log\frac{1}{4}$ y $\log\frac{3}{4}$ con probabilidades $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$, y sea*

$$\theta = \inf_{t>0} \mathbb{E}\big[e^{tZ}\big] = \inf_{t>0}\Big(\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{3}{2}\big)^t + \tfrac{1}{4}\big(\tfrac{1}{4}\big)^t + \tfrac{1}{4}\big(\tfrac{3}{4}\big)^t\Big) = 0{,}9536\ldots$$

Entonces, para todo $n \geq 1$, el conjunto $\{y > 0 : \sigma(y) > n\}$ tiene densidad natural a lo sumo θ^n. En particular, $\sigma(y) < \infty$ en un conjunto de densidad 1.

Demostración. Fijemos n y una clase C módulo 4^n. Por el Teorema 4.1 la palabra w es constante en C, y por el Lema 6.2 se tiene $G^k(y) = \alpha_k y + \beta_k$ para $k \leq n$, con α_k y β_k constantes en C. Si algún $\alpha_k < 1$, entonces $G^k(y) < y$ para todo $y \in C$ mayor que $\beta_k/(1-\alpha_k)$, es decir, salvo un número finito de elementos de C. Por tanto

$$\operatorname{dens}\{\sigma > n\} = \frac{\#\{\, C :\ \alpha_k \geq 1 \text{ para todo } k \leq n\,\}}{4^n}.$$

Por el Teorema 4.1, esa proporción es la probabilidad de que el paseo $S_k = Z_1 + \cdots + Z_k$, con incrementos independientes de ley Z, cumpla $S_k \geq 0$ para todo $k \leq n$; en particular está acotada por $\mathbb{P}(S_n \geq 0)$. La desigualdad de Chernoff da $\mathbb{P}(S_n \geq 0) \leq \big(\inf_{t>0}\mathbb{E}[e^{tZ}]\big)^n = \theta^n$, y el ínfimo se alcanza en $t^* = 0{,}465\ldots$, con valor $\theta = 0{,}9536\ldots$ □

Comentario 6.4. Resultados de este tipo son clásicos para el operador de Collatz: Terras [4] y Everett [2] probaron que casi todo entero tiene tiempo de parada finito, y el argumento anterior es la versión para G de su método. El tiempo de parada de G no coincide con el de T, porque G intercala los pasos de descenso, de modo que el Teorema 6.3 no se deduce directamente de aquellos ni los implica.

Comentario 6.5. La deriva media es $\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log\frac{3}{4} = -0{,}2158$, un factor 0,806 por paso. La cota del Teorema 6.3 es holgada: la fracción real de clases que ya han descendido al cabo de n pasos vale 0,8125 para $n = 4$, 0,8848 para $n = 6$, 0,9109 para $n = 8$ y 0,9343 para $n = 10$.

7. Comportamiento global

Observación 7.1 (Convergencia observada). Se ha iterado G desde 202 000 estados positivos: todos los enteros $1 \leq y \leq 200\,000$ y dos mil valores al azar en $[10^8, 10^{15}]$. En todos los casos la órbita alcanza el 0, en a lo sumo 406 pasos y con una media de 56,8. Una búsqueda independiente de ciclos sobre $1 \leq y \leq 3\cdot 10^5$ no encuentra ninguno distinto del punto fijo 0.

Por la Proposición 2.3, esta observación no aporta información nueva: equivale a comprobar la conjetura de Collatz para los impares $m = 2y+1$ del rango indicado, que está muy por debajo de las verificaciones conocidas de la conjetura [3]. Se conserva como comprobación de la implementación.

Los teoremas anteriores no bastan para concluir la convergencia global. El Teorema 6.3 da un descenso por debajo del valor inicial para casi todo y, pero no controla el conjunto excepcional

a lo largo de la iteración; y el Teorema 5.1 excluye el método uniforme. Que G alcance el 0 desde todo entero positivo no es una cuestión abierta propia de G: es la conjetura de Collatz.

Comentario 7.2 (Sobre la codificación simbólica). La versión anterior de este trabajo proponía estudiar F_2 mediante la codificación $\phi(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$ y $\phi(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, y desarrollar a partir de ella un lenguaje simbólico con palabras prohibidas, recurrencia y una lectura ergódica. Ese programa no es independiente del problema de Collatz. Si la conjetura es cierta, toda órbita positiva alcanza el 0, que es fijo y entero, y toda sucesión simbólica es una palabra finita seguida de $000\ldots$: no hay trayectorias no periódicas y el objeto no es un subshift con recurrencia en el sentido de [5]. Si no lo es, las órbitas excepcionales de G corresponden a órbitas excepcionales de T, y describir su codificación es tan difícil como el problema original. En ambos casos la información que ϕ registra es más pobre que la del Teorema 4.1, que distingue las tres ramas en lugar de dos clases de estado.

8. Comparación con la dinámica clásica

Los teoremas anteriores se han demostrado sin usar la conjugación con el operador impar. Cabe ahora situar G respecto del operador de Collatz acelerado, $C(y) = (3y + 1)/2$ si y es impar y $C(y) = y/2$ si es par, delimitando con precisión qué comparten.

Proposición 8.1 (Coincidencia de la rama expansiva)**.** *La rama* `a` *de G coincide con el paso impar de C. En consecuencia, si y es impar y $r = v_2(y + 1)$, ambas dinámicas recorren los mismos r primeros valores y alcanzan el mismo entero par $(y + 1)(3/2)^r - 1$.*

Demostración. Ambas ramas son $y \mapsto (3y + 1)/2$, y la longitud de la racha impar es $v_2(y + 1)$ en cualquiera de las dos, por el argumento del Teorema 5.1. □

Las ramas contractivas, en cambio, son distintas: G divide por 4 o multiplica por $3/4$, mientras que C divide por 2. La diferencia es cuantitativamente apreciable. La deriva media por paso vale $-0{,}2158$ para G y $-0{,}1438$ para C; el factor de Chernoff del Teorema 6.3 vale $\theta = 0{,}9536$ para G y $0{,}9659$ para C.

Cuadro 1: Fracción de enteros impares $y < 2 \cdot 10^5$ con $\sigma(y) \le k$. Para C, el valor $y = 1$ tiene $\sigma = \infty$ por el ciclo $1 \to 2 \to 1$; no altera las cifras.

k	G	C
2	0,250	0,500
5	0,703	0,750
12	0,902	0,890
20	0,960	0,948

G arranca más lenta, porque necesita al menos dos pasos para descender, y adelanta a C a partir de $k \approx 10$.

Comentario 8.2 (Qué se transfiere y qué no). Dos precisiones en direcciones opuestas.

G y C no son la misma dinámica ni son conjugadas: sólo comparten la rama expansiva, y sus ramas contractivas difieren. Los resultados cuantitativos, como los tiempos de parada o la deriva, no se transfieren de una a otra. Pero la convergencia global sí: por la Proposición 2.3, la convergencia de G al 0 desde todo estado positivo equivale a la conjetura de Collatz, y ésta

equivale a la convergencia de C al ciclo $\{1, 2\}$. Una demostración para G sería una demostración de la conjetura, y recíprocamente.

El obstáculo del Teorema 5.1 sí es común, y no por importación: se ha obtenido aquí a partir de la estructura de G. Su origen está en la rama compartida, de modo que cualquier intento de controlar G mediante un iterado uniformemente contractivo tropieza con la misma clase $y \equiv -1 \pmod{2^n}$ que en la dinámica clásica.

En resumen, G desciende más deprisa por paso que C y admite los teoremas de las secciones anteriores, pero no es un problema más sencillo: es la misma conjetura expresada con divisores fijos, en la que la profundidad variable del colapso se ha convertido en un número variable de pasos.

9. Conclusiones

La dinámica F_2, leída en la variable $y = 2x$, es una aplicación entera de tres ramas afines con divisores fijos. De ella se ha demostrado aquí que sus únicos puntos fijos son 0 y -1; que ningún ciclo tiene multiplicador 1 y que no hay ciclos positivos puramente semienteros; que la palabra de las n primeras ramas está determinada módulo 4^n, con medida inducida exactamente $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$; que ningún iterado contrae uniformemente, por causa de la clase $y \equiv -1 \pmod{2^n}$; y que casi todo entero positivo tiene tiempo de parada finito, con densidad del complemento acotada por $(0{,}9536)^n$.

Por la conjugación establecida en el escrito precedente, G es una aceleración del operador de Collatz, y su convergencia global al 0 equivale a la conjetura. Los Teoremas 5.1 y 6.3 delimitan entre ambos el terreno en esta formulación: hay descenso para casi todo dato inicial, y no lo hay de manera uniforme. Es la misma frontera que se conoce para la dinámica clásica.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Dos formulaciones de una dinámica tipo Collatz*, collatz.es, 2026.

[2] C. J. Everett, Iteration of the number-theoretic function $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+2$, *Advances in Mathematics* **25** (1977), 42–45.

[3] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x+1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010.

[4] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arithmetica* **30** (1976), 241–252.

[5] D. Lind, B. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, 1995.