Cierre modular y estructura 2-ádica interna en la dinámica de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Enero de 2026 (revisión de septiembre de 2026)

Resumen

Se reorganiza el análisis de la dinámica de Collatz en torno a dos hechos estructurales exactos. El primero es un cierre modular: tras el primer impar, ningún término de la trayectoria es múltiplo de 3, de modo que todos caen en el grupo de unidades de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$; se precisa, no obstante, que el refinamiento a módulo 9 no aporta información independiente de la clase módulo 3 y de la valuación 2-ádica, porque 2 tiene orden seis módulo 9.

El segundo es una descripción exacta del tramo impar. Si $n = m2^k - 1$ con m impar y $k = \nu_2(n+1)$, se demuestra que el tramo consta exactamente de k impares, dados por $n_j = 3^j m 2^{k-j} - 1$, de los cuales los $k-1$ primeros son de tipo $4n+3$ con $\nu_2(3n_j+1) = 1$ y el último es de tipo $4n+1$; que el par de cierre es $B = 3^k m - 1$, con $(B+1)/(n+1) = (3/2)^k$; y que la cola par que cierra el tramo tiene longitud exactamente $1 + \nu_2(3^k m - 1)$.

De ello se sigue que los episodios de crecimiento asociados a impares de tipo $4n+3$ no pueden prolongarse indefinidamente. La descomposición inicial determina el tramo en curso con exactitud, pero el tramo siguiente exige la valuación de un número nuevo, de modo que la descripción es recursiva y no resuelve el comportamiento global.

1. Introducción

La conjetura de Collatz se formula a partir de una regla iterativa muy simple, pero su análisis presenta dificultades persistentes debido a la interacción entre el crecimiento multiplicativo y las divisiones iteradas por 2. Buena parte de la literatura aborda esa complejidad mediante argumentos probabilísticos o heurísticos.

Aquí se adopta un enfoque estructural: primero se identifican las restricciones modulares globales, y después se describe con exactitud el mecanismo 2-ádico que gobierna cada tramo impar. El resultado es una descripción local completa, cuyo alcance se delimita al final.

Trabajamos con el operador impar

$$T(n) = \frac{3n+1}{2^{\nu_2(3n+1)}}, \qquad n \text{ impar}.$$

2. Cierre modular

Proposición 2.1 (Cierre modular tras el primer impar)**.** *Sea (n_k) una trayectoria de Collatz que contiene al menos un término impar, y sea n_* su primer impar. Entonces:*

1. *ningún término posterior a n_* es múltiplo de 3; equivalentemente, todos ellos pertenecen al grupo de unidades $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^* = \{1,2,4,5,7,8\}$, y quedan excluidas las clases $\{0,3,6\}$ módulo 9;*

2. *si n es un impar de la trayectoria con $3 \nmid n$, entonces*

$$3n+1 \equiv \begin{cases} 4 \pmod 9, & n \equiv 1,4,7 \pmod 9, \\ 7 \pmod 9, & n \equiv 2,5,8 \pmod 9; \end{cases}$$

3. *la clase módulo* 9 *del impar siguiente es* $T(n) \equiv (3n+1)\,2^{-\nu_2(3n+1)}$*, y como* 2 *tiene orden seis módulo* 9*, dicha clase queda determinada por la de* n *junto con* $\nu_2(3n+1)$ *módulo* 6*.*

Demostración. Si n es impar, $3n+1 \equiv 1 \pmod 3$, luego $3 \nmid 3n+1$; y como 2 es invertible módulo 3, ninguna división por 2 puede introducir un factor 3. Por tanto todos los términos posteriores a n_* son coprimos con 3, lo que equivale a pertenecer a $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$.

Para el segundo punto, si $n \equiv 1, 4, 7 \pmod 9$ entonces $3n \equiv 3 \pmod 9$ y $3n+1 \equiv 4$; si $n \equiv 2, 5, 8 \pmod 9$ entonces $3n \equiv 6 \pmod 9$ y $3n+1 \equiv 7$.

El tercer punto es inmediato, pues $T(n) = (3n+1)/2^{\nu}$ y 2^{-1} es una unidad de orden seis módulo 9. □

Observación 2.2 (Tres precisiones). Conviene enunciar el cierre con exactitud, porque la formulación anterior de este trabajo contenía tres imprecisiones.

Primera: al dividir por potencias de 2, la clase módulo 3 *sí* cambia. Lo que se conserva es la no divisibilidad por 3. De hecho $T(n) \equiv (-1)^{\nu_2(3n+1)} \pmod 3$, de modo que la clase alterna entre 1 y 2 según la paridad del exponente de colapso.

Segunda: el punto (2) exige $3 \nmid n$ y no vale para el primer impar cuando éste es múltiplo de 3. Por ejemplo, para $n = 3$ se tiene $3n+1 = 10 \equiv 1 \pmod 9$, que no es ni 4 ni 7; lo mismo ocurre con $n = 9$, 21 y 33.

Tercera: el conjunto $\{1, 5, 7, 8, 4, 2\}$ que la versión anterior denominaba ciclo modular φ_6 es exactamente $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$. Afirmar que la trayectoria reentra en él es, por tanto, repetir el punto (1). No hay un ciclo rígido recorrido por la órbita: la posición dentro de $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ avanza tantos lugares como indique $\nu_2(3n+1)$, cantidad que varía de un paso a otro.

Observación 2.3 (Alcance del cierre). De la Observación 2.2 se sigue que el marco módulo 9 no aporta información independiente: equivale a la clase módulo 3 —es decir, a la coprimalidad con 3— superpuesta a la valuación 2-ádica, que es la que fija el desplazamiento dentro del grupo de unidades. Toda la variabilidad de la dinámica se concentra, pues, en $\nu_2(3n+1)$, y el resto de este trabajo se dedica a describirla.

3. Descomposición 2-ádica de los impares

Definición 3.1. Todo impar $n \geq 1$ admite una descomposición única

$$n = m2^k - 1,$$

con m impar y $k = \nu_2(n+1) \geq 1$.

En efecto, $n+1$ es par y su factorización $n+1 = m2^k$ con m impar es única.

4. Estructura exacta del tramo impar

Teorema 4.1 (Estructura del tramo)**.** *Sea* $n_0 = m2^k - 1$ *con* m *impar y* $k \geq 1$*, y sea* $n_{j+1} = T(n_j)$*. Entonces, para* $j = 0, 1, \ldots, k-1$*,*

$$n_j = 3^j m\, 2^{\,k-j} - 1,$$

y además:

1. *para* $j = 0, \ldots, k-2$ *se tiene* $n_j \equiv 3 \pmod 4$ *y* $\nu_2(3n_j+1) = 1$ exactamente*;*
2. $n_{k-1} \equiv 1 \pmod 4$ *y* $\nu_2(3n_{k-1}+1) \geq 2$*.*

El tramo consta, por tanto, de exactamente k impares, de los cuales los $k-1$ primeros son de tipo $4n+3$ y el último de tipo $4n+1$. Para $k=1$ el tramo se reduce a un único impar de tipo $4n+1$.

Demostración. Procedemos por inducción. Supuesto $n_j = 3^j m 2^{k-j} - 1$ con $j \le k-1$, se tiene

$$3n_j + 1 = 3^{j+1} m\, 2^{k-j} - 2 = 2(3^{j+1} m\, 2^{k-j-1} - 1).$$

Si $j \le k-2$, entonces $k-j-1 \ge 1$ y el paréntesis es impar, luego $\nu_2(3n_j+1) = 1$ exactamente y $n_{j+1} = 3^{j+1} m 2^{k-j-1} - 1$, lo que continúa la fórmula. Además $n_j = 3^j m 2^{k-j} - 1$ con $k-j \ge 2$ da $n_j \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$.

Si $j = k-1$, entonces $k-j-1 = 0$ y el paréntesis es $3^k m - 1$, que es par por ser $3^k m$ impar; luego $\nu_2(3n_{k-1}+1) \ge 2$. Y $n_{k-1} = 3^{k-1} m \cdot 2 - 1$ con $3^{k-1} m$ impar da $n_{k-1} \equiv 1 \pmod 4$. □

Corolario 4.2 (Par de cierre y cociente del tramo)**.** *Con la notación del Teorema 4.1, el valor par que cierra el tramo es*

$$B = \frac{3n_{k-1}+1}{2} = 3^k m - 1, \qquad y \qquad \frac{B+1}{n_0+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^k.$$

Demostración. De la demostración anterior, $3n_{k-1} + 1 = 2(3^k m - 1)$. Y $B + 1 = 3^k m = (3/2)^k m 2^k = (3/2)^k (n_0 + 1)$. □

Corolario 4.3 (Longitud de la cola par)**.** *La cola par que cierra el tramo tiene longitud exactamente*

$$\nu_2(3n_{k-1}+1) = 1 + \nu_2(3^k m - 1),$$

y el impar con que comienza el tramo siguiente es la parte impar de $3^k m - 1$.

Demostración. Inmediato de $3n_{k-1} + 1 = 2(3^k m - 1)$. □

Ejemplo 4.4. La tabla recoge cuatro tramos completos.

n_0	(m,k)	Tramo	B	Cola	Siguiente impar
7	$(1,3)$	$7, 11, 17$	26	2	13
27	$(7,2)$	$27, 41$	62	2	31
31	$(1,5)$	$31, 47, 71, 107, 161$	242	2	121
255	$(1,8)$	$255, 383, 575, 863, 1295, 1943, 2915, 4373$	6560	6	205

La comprobación exhaustiva del Teorema 4.1 y de sus dos corolarios, para todo m impar menor que 600 y $1 \le k \le 8$, no arroja ninguna excepción.

Observación 4.5 (Formulación equivalente). Escribiendo $x_j = n_j + 1$, la relación $\nu_2(3n_j+1) = 1$ equivale a $x_{j+1} = \frac{3}{2} x_j$, de donde $n_t + 1 = (3/2)^t (n_0 + 1)$ mientras duren los pasos unitarios. En esa coordenada, el Teorema 4.1 dice simplemente que el número de pasos unitarios consecutivos a partir de n_0 es $\nu_2(n_0+1) - 1$, es decir, que la racha de crecimiento tiene longitud prescrita por la valuación de $n_0 + 1$.

Observación 4.6 (Complementariedad con la profundidad del colapso). La cantidad $\nu_2(n+1)$ que gobierna la longitud del tramo no debe confundirse con $v_2(3n+1)$, que gobierna la profundidad del colapso y que otro escrito de este archivo utiliza para medir el descenso dentro de una fibra. Ambas son complementarias en sentido estricto:

$$n \equiv 3 \pmod 4 \iff \nu_2(n+1) \ge 2 \ \text{ y } \ v_2(3n+1) = 1,$$

$$n \equiv 1 \pmod 4 \iff \nu_2(n+1) = 1 \ \text{ y } \ v_2(3n+1) \ge 2.$$

Nunca son ambas mayores que uno ni valen ambas uno, de modo que cada impar está dentro de una racha o la cierra, pero no las dos cosas. El Teorema 4.1 describe la primera situación y el Corolario 4.3 la segunda, lo que explica que las dos magnitudes se compongan: la racha dura k impares y la cola que la cierra mide $1 + \nu_2(3^k m - 1)$.

5. Consecuencia dinámica

Corolario 5.1 (Los episodios de crecimiento son finitos)**.** *Los impares de tipo* $4n+3$ *no pueden concatenarse indefinidamente en la órbita impar: toda cadena de ellos que comience en* n_0 *tiene longitud exactamente* $\nu_2(n_0+1)-1$ *y termina en un impar de tipo* $4n+1$*, para el cual* $\nu_2(3n+1)\geq 2$*.*

Demostración. Es el Teorema 4.1. □

Observación 5.2. El corolario describe un mecanismo interno de regulación: el crecimiento asociado a los pasos con $\nu_2 = 1$ está acotado en número por la estructura 2-ádica del propio término inicial. Conviene subrayar que se trata de una cota sobre la *longitud* de la racha, no de una igualdad cuantitativa entre expansión y contracción. En particular, nada de lo anterior implica que el balance multiplicativo de un tramo sea desfavorable: por el Corolario 4.2, el tramo multiplica $n+1$ por $(3/2)^k$, que es mayor que uno. La contracción proviene únicamente de la cola par, cuya longitud da el Corolario 4.3.

6. Alcance

Los resultados anteriores describen un tramo con exactitud completa: dado $n = m2^k - 1$, quedan determinados los k impares del tramo, su tipo módulo 4, el par de cierre $B = 3^k m - 1$, el cociente $(3/2)^k$ y la longitud $1 + \nu_2(3^k m - 1)$ de la cola par.

Conviene, sin embargo, no extender esa exactitud más allá de donde llega. La descomposición inicial determina el tramo *en curso*, no la trayectoria completa: el tramo siguiente comienza en la parte impar de $3^k m - 1$, y su propia longitud es la valuación de ese número más uno, cantidad que no se lee de (m, k) sino que exige un cálculo nuevo. La descripción es, por tanto, recursiva. Afirmar que la organización global de la trayectoria queda fijada desde el valor inicial sería confundir la exactitud local con una resolución del problema.

Observación 6.1 (Independencia 2-ádica y su alcance)*.* Cabría pensar que la recursión resulta difícil porque la longitud de la racha y la profundidad del colapso que la cierra están relacionadas entre sí. No lo están, en un sentido que conviene precisar, y que hay que separar cuidadosamente de lo que ocurre a lo largo de una órbita.

(a) Independencia respecto de la medida 2-ádica. La correspondencia $n \leftrightarrow (m, k)$ dada por $n+1 = m2^k$ es biyectiva, y respecto de la medida 2-ádica natural sobre los impares se tiene $\Pr(k = r) = 2^{-r}$ para $r \geq 1$. Fijado k, la aplicación $m \mapsto 3^k m$ es una permutación de las clases impares módulo 2^j para todo j, por ser 3^k una unidad. En consecuencia $t = \nu_2(3^k m - 1)$ tiene distribución $\Pr(t = s \mid k) = 2^{-s}$, la misma para todo k, y por tanto

$$\Pr(k = r,\ t = s) = 2^{-r}\, 2^{-s}, \qquad r, s \geq 1.$$

Ambas magnitudes son geométricas de razón $1/2$ e independientes. Esta es una afirmación aritmética sobre la medida indicada; equivale a leer, en coordenadas de tramo, la medida producto que la equidistribución induce sobre el vector de valuaciones, y no es por tanto un hecho nuevo.

(b) Observación experimental sobre órbitas. Se han seguido quince mil órbitas desde valores iniciales impares elegidos al azar en $[10^{11}, 10^{14}]$, registrando todos sus tramos hasta alcanzar el 1; en total 824 272 tramos. Sobre esa muestra completa, la prueba χ^2 de independencia entre k y la profundidad de cierre da 8421, y la de independencia entre longitudes de tramos consecutivos da 4602, ambas con nueve grados de libertad. Reteniendo únicamente los tramos cuyo impar inicial supera 10^6, que son 488 852, los mismos estadísticos bajan a 3,1 y 14,5, por debajo del valor crítico al cinco por ciento; con el umbral en 10^9 se obtienen 9,2 y 2,5.

La desviación se concentra, pues, en los tramos de valor pequeño. No se afirma aquí más que eso: no se ha medido la desviación por posición dentro de la órbita, ni se ha contrastado ninguna explicación de su origen. En particular, la conjetura natural de que proceda del condicionamiento a alcanzar el 1 queda sin verificar.

(c) El obstáculo. Ni siquiera una independencia empírica perfecta resolvería nada, y conviene ser explícito sobre por qué. El paso de (a) a una afirmación sobre órbitas no es legítimo: al iterar no se extraen impares al azar, sino que se aplica repetidamente una transformación determinista, a saber, $n_0 = m2^k - 1 \mapsto \mathrm{odd}(3^k m - 1)$, cuya imagen fija el k del tramo siguiente. Sustituir esa sucesión determinista por muestras independientes es precisamente la hipótesis que no se puede justificar.

De ahí que las estimaciones de deriva de uso habitual sean correctas como modelo y no ascendibles a demostración por esta vía. El problema queda reducido, como se dijo, a la sucesión de valuaciones $\nu_2(3^k m - 1)$ de un tramo al siguiente, sobre la cual ni los resultados de las secciones anteriores ni los datos citados dicen nada.

De hecho, es precisamente ahí donde reside la dificultad de la conjetura. El cierre modular de la Sección 2 no restringe nada más allá de la coprimalidad con 3 (Observación 2.3), y la estructura de tramos reduce el problema a la sucesión de valuaciones $\nu_2(3^k m - 1)$ de un tramo al siguiente, según precisa la Observación 6.1.

7. Comentario final

El cierre modular fija el recinto de la dinámica tras el primer impar —los términos son coprimos con 3— y no añade restricciones adicionales. Dentro de ese recinto, la estructura de los tramos impares es enteramente explícita y está gobernada por la descomposición $n = m2^k - 1$: la racha de impares de tipo $4n + 3$ dura $k - 1$ pasos, el tramo tiene k impares y cierra en $3^k m - 1$.

El mecanismo que impide que las rachas de crecimiento se prolonguen indefinidamente no es estadístico ni heurístico, sino una consecuencia aritmética de esa descomposición. Lo que queda fuera de su alcance es el encadenamiento de tramos sucesivos, que es donde la dinámica recupera toda su dificultad.