

Las secuencias cíclicas programadas como conjugadas afines de la función de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

Se llamaron *secuencias cíclicas programadas* a las generadas por funciones dependientes de la paridad construidas para desembocar en un ciclo prefijado de tres términos, cuyas raíces digitales pertenecen a una misma clase módulo 3; por ejemplo, el ciclo $13 \rightarrow 7 \rightarrow 4$ con las reglas $3n + 1$ en los pares y $(n + 1)/2$ en los impares, o el ciclo $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$ con $n/2$ en los pares y $3n + 3$ en los impares. Se demuestra que todas ellas forman una única familia $\{f_c\}_{c \in \mathbb{Z}}$ y que cada f_c es conjugada a la función de Collatz mediante el cambio de variable $n = 3m + c$. El ciclo de f_c es la imagen del ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, lo que explica la relación $A - C = 9$ entre sus términos extremos, y la clase módulo 3 de sus raíces digitales es la de c . En consecuencia, la afirmación de que toda órbita de f_c que parte de $n > c$ alcanza su ciclo es equivalente a la conjetura de Collatz: la convergencia de estas secuencias no está programada, sino que es exactamente tan conjetural como la de Collatz. Se describe además con precisión el conjunto de valores iniciales que no alcanzan el ciclo.

1. Introducción

Entre las variantes de la función de Collatz estudiadas en este capítulo figuran unas funciones dependientes de la paridad que parecían construidas para forzar la convergencia a un ciclo prefijado de tres términos: por ejemplo,

$$n \mapsto \begin{cases} 3n + 1, & n \text{ par,} \\ (n + 1)/2, & n \text{ impar,} \end{cases} \quad \text{con el ciclo} \quad 13 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 13,$$

cuyos términos tienen raíces digitales 4, 7 y 4, o bien

$$n \mapsto \begin{cases} n/2, & n \text{ par,} \\ 3n + 3, & n \text{ impar,} \end{cases} \quad \text{con el ciclo} \quad 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 12,$$

cuyos términos tienen raíces digitales 3 y 6. Se construyeron así familias enteras de funciones con ciclos (A, B, C) que cumplen $A - C = 9$, y se agruparon según la clase módulo 3 de sus raíces digitales.

El objeto de este escrito es explicar esa estructura. Todas estas funciones son una sola familia f_c , indexada por un entero c , y cada f_c no es un sistema nuevo, sino la función de Collatz escrita en otra coordenada. De ahí se siguen de inmediato la forma de sus ciclos, el papel de las raíces digitales y, sobre todo, el alcance real de su convergencia.

2. La familia f_c

Sea $\mathcal{C}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la función de Collatz,

$$\mathcal{C}(m) = \begin{cases} m/2, & m \text{ par,} \\ 3m + 1, & m \text{ impar.} \end{cases}$$

Definición 2.1. Para cada $c \in \mathbb{Z}$ se define $f_c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ por

$$f_c(n) = \begin{cases} \frac{n+c}{2}, & n \equiv c \pmod{2}, \\ 3n+3-2c, & n \not\equiv c \pmod{2}. \end{cases}$$

Según la paridad de c , la regla que se aplica a los pares y la que se aplica a los impares se intercambian:

$$\begin{aligned} c \text{ par : } f_c(n) &= \begin{cases} \frac{n}{2} + \frac{c}{2}, & n \text{ par}, \\ 3n+3-2c, & n \text{ impar}; \end{cases} \\ c \text{ impar : } f_c(n) &= \begin{cases} 3n+3-2c, & n \text{ par}, \\ \frac{n+c}{2}, & n \text{ impar}. \end{cases} \end{aligned}$$

Los dos ejemplos de la introducción son f_1 y f_0 . La Tabla 1 recoge los primeros miembros de la familia.

Cuadro 1: Primeros miembros de la familia f_c y su ciclo principal $(A, B, C) = (c+12, c+6, c+3)$.

c	n par	n impar	ciclo (A, B, C)
-3	$3n+9$	$(n-3)/2$	$(9, 3, 0)$
-2	$n/2-1$	$3n+7$	$(10, 4, 1)$
-1	$3n+5$	$(n-1)/2$	$(11, 5, 2)$
0	$n/2$	$3n+3$	$(12, 6, 3)$
1	$3n+1$	$(n+1)/2$	$(13, 7, 4)$
2	$n/2+1$	$3n-1$	$(14, 8, 5)$
3	$3n-3$	$(n+3)/2$	$(15, 9, 6)$
4	$n/2+2$	$3n-5$	$(16, 10, 7)$

3. La conjugación con la función de Collatz

Teorema 3.1 (Conjugación). Sea $h_c(m) = 3m + c$. Para todo $c \in \mathbb{Z}$ y todo $m \in \mathbb{Z}$,

$$f_c(h_c(m)) = h_c(\mathcal{C}(m)).$$

En particular, la clase $R_c = \{n \in \mathbb{Z} : n \equiv c \pmod{3}\}$ es invariante por f_c , y h_c es una biyección de $\mathbb{Z}$ sobre R_c que conjuga $\mathcal{C}$ con la restricción de f_c a R_c .

Demostración. Sea $n = 3m + c$. Entonces $n - c = 3m$ tiene la paridad de m . Si m es par, $n \equiv c \pmod{2}$ y

$$f_c(n) = \frac{3m+2c}{2} = 3 \cdot \frac{m}{2} + c = h_c(\mathcal{C}(m)).$$

Si m es impar, $n \not\equiv c \pmod{2}$ y

$$f_c(n) = 3(3m+c) + 3 - 2c = 9m + 3 + c = 3(3m+1) + c = h_c(\mathcal{C}(m)). \quad \square$$

Fuera de R_c la dinámica tampoco es nueva. Con la traslación $y = n - c$, la función f_c se convierte en

$$g(y) = \begin{cases} y/2, & y \text{ par}, \\ 3(y+1), & y \text{ impar}, \end{cases}$$

que es f_0 y no depende de c : $f_c(y+c) = g(y) + c$ para todo y .

Lema 3.2 (Entrada en R_c). *Toda órbita de f_c entra en R_c , a lo sumo en el primer paso en que $n \not\equiv c \pmod{2}$, y ya no sale de ella.*

Demostración. En la coordenada $y = n - c$, la regla impar da $3(y + 1)$, múltiplo de 3, es decir, un punto de R_c . Si la órbita no pasa nunca por un y impar, sus términos se dividen indefinidamente por 2, lo que solo es posible para $y = 0$, es decir, $n = c \in R_c$. La invariancia es el Teorema 3.1. $\square$

4. Ciclos, raíces digitales y convergencia

Corolario 4.1 (Ciclos). *Los ciclos de f_c son exactamente las imágenes por h_c de los ciclos de $\mathcal{C}$ en $\mathbb{Z}$. En particular:*

(I) *el ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ de $\mathcal{C}$ da el ciclo principal*

$$(A, B, C) = (c + 12, c + 6, c + 3),$$

de modo que $A - C = 9$ para todo c ;

(II) *el punto fijo 0 de $\mathcal{C}$ da el punto fijo $n = c$ de f_c ;*

(III) *los ciclos conocidos de $\mathcal{C}$ en los enteros negativos, que contienen a -1 , a -5 y a -17 y tienen longitudes 2, 5 y 18, dan ciclos de f_c formados por enteros menores que c .*

Demostración. Por el Lema 3.2, todo ciclo de f_c está contenido en R_c , y por el Teorema 3.1 los ciclos de f_c en R_c son las imágenes de los de $\mathcal{C}$. Los valores concretos se obtienen aplicando $h_c(m) = 3m + c$. $\square$

Observación 4.2 (Raíces digitales). Como todo término de una órbita de f_c , a partir de su entrada en R_c , es congruente con c módulo 3, sus raíces digitales pertenecen a una sola de las clases $\{3, 6, 9\}$, $\{1, 4, 7\}$ o $\{2, 5, 8\}$, según que c sea congruente con 0, 1 o 2 módulo 3. Los *grupos modulares* en que se clasificaban estas secuencias son, por tanto, las tres clases de c módulo 3.

Teorema 4.3 (Alcance de la convergencia). *Sea $c \in \mathbb{Z}$.*

(a) *Ninguna órbita de f_c que parta de $n \leq c$ alcanza el ciclo principal $(c + 12, c + 6, c + 3)$.*

(b) *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(1) *toda órbita de f_c que parte de $n > c$ alcanza el ciclo principal;*

(2) *toda órbita de $\mathcal{C}$ que parte de $m \geq 1$ alcanza el ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (conjetura de Collatz).*

Demostración. Se trabaja en la coordenada $y = n - c$, en la que f_c es g .

(a) Si $y \leq 0$, los términos siguientes cumplen también $y \leq 0$: la regla par da $y/2 \leq 0$, y la regla impar, aplicada a $y \leq -1$, da $3(y + 1) \leq 0$. Como el ciclo principal corresponde a $y = 3, 6, 9 > 0$, no se alcanza.

(b) Si $y > 0$, los términos siguientes son positivos, pues $y/2 > 0$ para y par positivo y $3(y + 1) > 0$. Por el Lema 3.2, la órbita entra en un múltiplo positivo de 3, $y = 3m$ con $m \geq 1$, y a partir de ahí sigue la órbita de m bajo $\mathcal{C}$ (Teorema 3.1). Alcanza el ciclo principal si y solo si esa órbita alcanza $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Recíprocamente, todo $m \geq 1$ se obtiene así, tomando $n = 3m + c > c$. $\square$

Observación 4.4. El Teorema 4.3 precisa el llamado dominio de convergencia de estas funciones. En términos del último elemento del ciclo, $C = c + 3$, los valores iniciales $n \geq 0$ que no alcanzan el ciclo son exactamente $0, 1, \dots, C - 3$ (supuesta la conjetura de Collatz para los restantes). El valor $n = c = C - 3$ es el punto fijo de f_c , que corresponde al punto fijo 0 de $\mathcal{C}$; los valores menores que c corresponden a la dinámica de $\mathcal{C}$ en los enteros negativos.

Observación 4.5 (Conjugación por traslación). El caso más sencillo de este fenómeno es el de un cambio de variable de factor 1. Para $m \in \mathbb{Z}$, la función

$$f(k, m) = \begin{cases} \frac{k - m}{2}, & k \equiv m \pmod{2}, \\ \frac{3k + 1 + m}{2}, & k \not\equiv m \pmod{2}, \end{cases}$$

cumple $f(k, m) + m = g(k + m)$, donde g es la función de Collatz simplificada ($g(E) = E/2$ si E es par y $g(E) = (3E + 1)/2$ si es impar). La dinámica depende solo del total $E = k + m$; el parámetro m decide cómo se reparte ese total y, con ello, dónde se ve la órbita y en qué ciclo termina, $\{2 - m, 1 - m\}$. Por ejemplo, las secuencias con $k + m = 266$ son las distintas maneras de repartir 266 en dos sumandos: todas tienen 22 términos, como la órbita del 266, porque todas son esa misma órbita desplazada en $-m$. El caso $m = 0$ es la propia función simplificada, y el caso $m = 1$ es el llamado Sistema 3-1-0. Como en el Teorema 4.3, la convergencia de todas estas órbitas equivale a la conjetura de Collatz.

5. Ejemplos

Ejemplo 5.1 ($c = 1$, ciclo $13 \rightarrow 7 \rightarrow 4$). La órbita de 27 bajo f_1 empieza $27 \rightarrow 14 \rightarrow 43$, y $43 \equiv 1 \pmod{3}$ ya está en R_1 . A partir de ahí,

$$\begin{aligned} 43 \rightarrow 22 \rightarrow 67 \rightarrow 34 \rightarrow 103 \rightarrow 52 \rightarrow 157 \rightarrow 79 \rightarrow 40 \rightarrow 121 \\ \rightarrow 61 \rightarrow 31 \rightarrow 16 \rightarrow 49 \rightarrow 25 \rightarrow 13 \rightarrow 7 \rightarrow 4, \end{aligned}$$

y aplicando $m = (n - 1)/3$ se obtiene

$$\begin{aligned} 14 \rightarrow 7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \\ \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1, \end{aligned}$$

que es exactamente la órbita de 14 bajo la función de Collatz.

Ejemplo 5.2 ($c = 0$, ciclo $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$). La órbita de 9 bajo f_0 es

$$9 \rightarrow 30 \rightarrow 15 \rightarrow 48 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 12,$$

y dividiendo por 3 resulta $3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$, la órbita de 3 bajo la función de Collatz.

6. Conclusión

Las secuencias cíclicas programadas no constituyen una familia de sistemas con convergencia diseñada. Cada función f_c es la función de Collatz conjugada por el cambio de variable $n = 3m + c$: su ciclo principal es la imagen del ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, la relación $A - C = 9$ es la diferencia $3 \cdot 4 - 3 \cdot 1$, y las clases de raíces digitales son las clases de c módulo 3. En consecuencia, que toda órbita de f_c que parte de $n > c$ alcance su ciclo es equivalente a la conjetura de Collatz, y ningún valor $n \leq c$ lo alcanza. La construcción no programa la convergencia: traslada a otra coordenada exactamente la misma dificultad.

Referencias

- [1] J. C. Lagarias, *The $3x + 1$ problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.
- [2] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem*, American Mathematical Society, 2010.