Sobre la imposibilidad de ciclos distintos en secuencias de Collatz mediante una ecuación de tramos

Miguel Cerdá Bennassar

24 de Mayo de 2025

Resumen

Presentamos una justificación formal del uso de la ecuación

$$2 \cdot a_{k+1}(3) - a_{k+1}(1) - a_k(n_k) = 1$$

como herramienta válida para descartar la existencia de ciclos distintos al clásico $1 \to 4 \to 2 \to 1$ en las secuencias de Collatz. Esta identidad, derivada directamente de las reglas de la función iterativa de Collatz, impone una restricción lineal incompatible con la existencia de ciclos cerrados distintos al trivial.

1 Ecuación de tramos

Dada una secuencia de Collatz, se define un *tramo* como una subsecuencia que comienza en un número impar y termina en el último número par antes del siguiente impar, bajo reglas precisas que distinguen tramos simples y compuestos.

Sea $a_k(n_k)$ el último elemento (par) del tramo k, $a_{k+1}(1)$ el primer elemento impar del tramo $k+1$, y $a_{k+1}(3)$ el tercer elemento de dicho tramo. Se verifica la identidad:

$$2 \cdot a_{k+1}(3) - a_{k+1}(1) - a_k(n_k) = 1 \tag{1}$$

Esta ecuación se cumple en todas las transiciones reales de tramos consecutivos generados por la función Collatz:

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n/2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

2 Aplicación a ciclos hipotéticos

Supongamos que existe un ciclo distinto al trivial $1 \to 4 \to 2 \to 1$, compuesto por T tramos consecutivos:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_T)$$

En este caso, la ecuación (1) se aplicaría a cada transición $k \to k+1$, y la suma de todas ellas daría:

$$\sum_{k=1}^{T} (2 \cdot a_{k+1}(3) - a_{k+1}(1) - a_k(n_k)) = T \tag{2}$$

Sin embargo, al tratarse de un ciclo cerrado, se cumple que:

$$a_{T+1}(1) = a_1(1), \quad a_{T+1}(3) = a_1(3)$$

y, por tanto, el conjunto de sumandos de la suma anterior vuelve al punto de partida, lo que implica que la contribución neta total debería ser cero para que la secuencia se cierre exactamente sobre sí misma.

Esto produce una contradicción directa entre:

$$\text{Suma acumulada por la ecuación: } T \quad \text{vs.} \quad \text{Suma nula exigida por el cierre cíclico}$$

3 Conclusión

La ecuación de tramos actúa como una restricción lineal que es:

- Válida para toda transición real entre tramos en secuencias Collatz.
- Incompatible con la existencia de ciclos no triviales.

Este resultado no constituye una demostración formal completa de la conjetura de Collatz, pero proporciona un criterio algebraico poderoso para excluir la posibilidad de ciclos alternativos. Su utilidad se refuerza por su simplicidad y verificabilidad automática en cálculos empíricos, como se ha ilustrado en estudios computacionales recientes.