Una variación en el algoritmo de la conjetura de Collatz

Contracción determinista, acoplamiento local y caracterización simbólica exacta

Miguel Cerdá Bennassar

Agosto de 2026; revisado en septiembre y noviembre de 2026

Resumen

Se estudia la variante del algoritmo de Collatz que aplica $3m+1$ a los impares $m \equiv 1$ (mód 4) y $3m-1$ a los impares $m \equiv 3$ (mód 4), introducida por el autor en 2019. La regla equivale a elegir, entre $3m-1$ y $3m+1$, el término divisible por 4. Se demuestra que la función de Lyapunov $W(m) = m-1$ satisface $W(V(m)) \leq (3/4)W(m)$, de donde se siguen la convergencia a 1 de toda órbita, una cota explícita para el número de términos impares y una cota $O(\log m)$ para la longitud total de la trayectoria. Se establecen a continuación dos acoplamientos exactos. El primero relaciona, *a nivel de un solo paso*, la variante con la aplicación de Collatz acelerada y sitúa su diferencia en una única valuación 2-ádica. El segundo la relaciona con la permutación considerada por Collatz en 1932: sobre todo impar m, su inversa realiza en un paso el resultado de tres pasos elementales de la variante, y los retornos impares de ambos sistemas difieren exactamente en el factor $3^{\nu_2(3m\pm1)-2}$; la coincidencia local convive con geometrías orbitales opuestas, pues la variante no es invertible y la permutación sí. Se demuestra además que el retorno impar de la permutación es biyectivo y que la variante se obtiene suprimiendo todos los factores de 3 de su resultado. Esta factorización no es una conjugación ni establece por sí sola una semiconjugación. El resultado central es de naturaleza simbólica: el lenguaje de paridades realizable por la variante es exactamente el conjunto de palabras que evitan el factor 11, con entropía topológica $\log \varphi$, y la densidad natural de las clases residuales que realizan cada palabra viene dada por una medida de Markov explícita, no uniforme; ello contrasta con el teorema de paridades de Terras–Lagarias, donde las 2^k palabras de Collatz están en biyección equidistribuida con las clases módulo 2^k. Se señala además un obstáculo de tipo invariante a la conjugación con el retorno de la permutación sobre los impares positivos y con Collatz sobre los impares con signo, y se discute con precisión qué no se sigue de todo ello acerca de la conjetura de Collatz.

Índice

1. La regla y su reformulación **2**

2. Contracción y convergencia **2**

3. Identidad de acoplamiento con la aplicación de Collatz **4**

4. Segundo acoplamiento: la permutación de Collatz de 1932 **5**

4.1. La identidad de tres pasos 5

4.2. Comparación de los retornos impares 6

4.3. El retorno como permutación y la información que elimina la variante 7
4.4. Inyectividad y ausencia de conjugación 9

5. Antisimetría y obstáculo a una conjugación global **9**

6. Reformulación simbólica y comparación de lenguajes **10**

7. Qué no se sigue de todo esto **14**

Verificación numérica **16**

Referencias **16**

1. La regla y su reformulación

Definición 1. Sea $T : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ la aplicación

$$T(m) = \begin{cases} 3m+1, & m \equiv 1 \pmod 4, \\ 3m-1, & m \equiv 3 \pmod 4, \\ m/2, & m \text{ par.} \end{cases}$$

Para x entero no nulo, $\mathrm{odd}(x)$ denota el resultado de suprimir todos los factores 2 de x. La *aplicación comprimida* de la variante es

$$V(m) = \begin{cases} \mathrm{odd}(3m+1), & m \equiv 1 \pmod 4, \\ \mathrm{odd}(3m-1), & m \equiv 3 \pmod 4, \end{cases} \qquad m \text{ impar.}$$

La condición modular no es el contenido de la regla, sino sólo el modo de identificar una elección de signo. Ésta es la formulación que conviene retener.

Proposición 2. *Para todo m impar, exactamente uno de los enteros $3m-1$, $3m+1$ es divisible por 4; y es $3m+1$ si $m \equiv 1 \pmod 4$, y $3m-1$ si $m \equiv 3 \pmod 4$. Por consiguiente V es la aplicación que elige, entre $3m-1$ y $3m+1$, el término divisible por 4, y en particular*

$$\nu_2(3m \pm 1) \geq 2$$

en cada paso, donde el signo es el prescrito por la Definición 1.

Demostración. Como m es impar, $3m$ es impar y $3m-1$, $3m+1$ son pares consecutivos: uno de ellos es $\equiv 2 \pmod 4$ y el otro $\equiv 0 \pmod 4$. Si $m \equiv 1 \pmod 4$ entonces $3m \equiv 3$ y $3m+1 \equiv 0 \pmod 4$; si $m \equiv 3 \pmod 4$ entonces $3m \equiv 1$ y $3m-1 \equiv 0 \pmod 4$. □

2. Contracción y convergencia

Lema 3 (Contracción trasladada)**.** *Para todo impar $m \geq 1$ se cumple*

$$V(m) \leq \frac{3m+1}{4} \qquad y \qquad V(m) - 1 \leq \frac{3}{4}(m-1).$$

Demostración. Por la Proposición 2, el numerador $3m+1$ o $3m-1$ correspondiente es divisible por 4, de modo que al suprimir sus factores 2 se obtiene un valor no superior a la cuarta parte de dicho numerador; en ambos casos $V(m) \le (3m+1)/4$. Restando 1,

$$V(m) - 1 \le \frac{3m+1}{4} - 1 = \frac{3m-3}{4} = \frac{3}{4}(m-1). \qquad \square$$

El punto $m = 1$ es el punto fijo de $x \mapsto (3x+1)/4$, y ésa es la razón de que el término aditivo desaparezca al trasladar. La función de Lyapunov $W(m) = m-1$ satisface $W(V(m)) \le (3/4)W(m)$: hay una contracción determinista hacia el punto fijo 1. No se afirma una contracción de Lipschitz entre dos argumentos arbitrarios. De hecho, $V(5) = 1$ y $V(7) = 5$, por lo que $|V(7) - V(5)| = 4 > (3/4)|7-5|$.

Teorema 4 (Convergencia con cota explícita)**.** *Sea $m_0 \ge 3$ impar y $m_{j+1} = V(m_j)$. Entonces existe $J = \min\{j \ge 0; m_j = 1\}$ y*

$$m_j - 1 \le \left(\tfrac{3}{4}\right)^j (m_0 - 1), \qquad J \le 1 + \frac{\log((m_0-1)/2)}{\log(4/3)},$$

con $1/\log(4/3) \approx 3{,}476$. En consecuencia, toda órbita de T en $\mathbb{Z}^+$ alcanza 1, la variante no admite ciclos no triviales ni órbitas divergentes, y J es el número de transiciones impar $\to$ impar (la lista de términos impares tiene $J+1$ elementos).

Demostración. La primera desigualdad es la iteración del Lema 3. Mientras $m_j \ne 1$, el término m_j es un impar positivo distinto de 1, luego $m_j \ge 3$ y $m_j - 1 \ge 2$; en particular la sucesión (m_j) es estrictamente decreciente mientras no alcance 1, y siendo de enteros positivos ha de alcanzarlo en un número finito de pasos. Aplicando la primera desigualdad a $j = J-1$,

$$2 \le m_{J-1} - 1 \le \left(\tfrac{3}{4}\right)^{J-1} (m_0 - 1),$$

y tomando logaritmos se obtiene $J - 1 \le \log((m_0-1)/2)/\log(4/3)$. Finalmente, todo par alcanza un impar tras un número finito de divisiones por 2, y desde 1 la órbita de T es $1 \to 4 \to 2 \to 1$. $\square$

Comentario 5. La cota es exacta en $m_0 = 3$, donde $J = 1$.

Corolario 6 (Longitud total de la trayectoria)**.** *Con la notación anterior, escribamos cada paso como $m_{j+1} = (3m_j + \varepsilon_j)/2^{a_j}$ con $\varepsilon_j = \pm 1$ y $a_j \ge 2$. Entonces*

$$2^{\sum_{j<J} a_j} = m_0\, 3^J \prod_{j<J} \Big(1 + \frac{\varepsilon_j}{3m_j}\Big) \le m_0\, 3^J \Big(\frac{10}{9}\Big)^J,$$

y por tanto $\sum_{j<J} a_j \le \log_2 m_0 + J\log_2(10/3)$. El número total de términos de la trayectoria de T desde m_0 hasta 1, contando los pares, es

$$L := 1 + J + \sum_{j<J} a_j \;\le\; 11 \log m_0, \qquad m_0 \ge 3 \text{ impar},$$

Demostración. La identidad telescópica se obtiene multiplicando las J igualdades

$$2^{a_j} m_{j+1} = 3m_j + \varepsilon_j = 3m_j\Big(1 + \frac{\varepsilon_j}{3m_j}\Big)$$

y usando $m_J = 1$. Como $m_j \geq 3$ para $j < J$, cada factor está acotado por $1 + 1/9 = 10/9$. Pongamos $a = \log(4/3)$ y $b = 1 + \log_2(10/3)$. El Teorema 4 y $(m_0 - 1)/2 \leq m_0/2$ dan

$$L \leq 1 + \frac{\log m_0}{\log 2} + bJ \leq \left(\frac{1}{\log 2} + \frac{b}{a}\right) \log m_0 + 1 + b\left(1 - \frac{\log 2}{a}\right).$$

El coeficiente de $\log m_0$ es aproximadamente $10{,}9565503 < 11$, y el término constante es negativo; resulta la cota anunciada. □

Comentario 7. El contraste con la conjetura de Collatz es aquí especialmente elocuente, pero requiere fijar el reloj. Bajo el modelo geométrico usual de las valuaciones 2-ádicas [3], cada transición entre impares consume en promedio dos divisiones por 2. La estimación heurística del número de pasos es $\frac{2}{\log(4/3)} \log n \approx 6{,}95 \log n$ para el mapa abreviado $x \mapsto x/2$ si x es par y $x \mapsto (3x+1)/2$ si es impar. Para el mapa elemental, que cuenta separadamente el paso $3x+1$ y todas las divisiones, es $\frac{3}{\log(4/3)} \log n \approx 10{,}43 \log n$. Estas estimaciones son heurísticas: no se sabe demostrar una cota $O(\log n)$ válida para todos los enteros de Collatz. En la variante, una cota del mismo orden para el reloj elemental es un corolario determinista.

3. Identidad de acoplamiento con la aplicación de Collatz

Sea $C(m) = \text{odd}(3m+1)$ la aplicación de Collatz acelerada sobre los impares.

Teorema 8 (Acoplamiento exacto)**.** *Para todo impar $m > 0$:*

(i) si $m \equiv 1 \pmod 4$, entonces $C(m) = V(m)$;

(ii) si $m \equiv 3 \pmod 4$, entonces

$$C(m) = 2^{\,\nu_2(3m-1)-1}\, V(m) + 1.$$

Demostración. (i) es inmediato, pues ambas aplicaciones usan el mismo numerador $3m+1$. Para (ii), sea $k = \nu_2(3m-1) - 2 \geq 0$, de modo que $3m - 1 = 2^{k+2} V(m)$. Como $m \equiv 3 \pmod 4$ se tiene $3m + 1 \equiv 2 \pmod 4$, luego $C(m) = (3m+1)/2$. Entonces

$$C(m) = \frac{(3m-1)+2}{2} = \frac{2^{k+2}V(m)+2}{2} = 2^{k+1}V(m) + 1. \qquad \square$$

Ejemplo 9. $m = 7$: $V(7) = 5$, $\nu_2(20) = 2$, y $C(7) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$. $m = 11$: $V(11) = 1$, $\nu_2(32) = 5$, y $C(11) = 2^4 \cdot 1 + 1 = 17$. $m = 15$: $V(15) = 11$, $\nu_2(44) = 2$, y $C(15) = 2 \cdot 11 + 1 = 23$.

Las dos aplicaciones coinciden exactamente sobre la clase residual 1 mód 4, de densidad $1/2$ entre los impares —lo cual es una afirmación sobre argumentos, no sobre la proporción de tiempo que dos órbitas pasan juntas—, y sobre la clase complementaria están ligadas por una identidad exacta cuyo único ingrediente variable es la valuación 2-ádica $\nu_2(3m-1)$.

Conviene subrayar el alcance exacto de este enunciado. El Teorema 8 es una identidad *de un solo paso*, evaluada en un mismo argumento m. Como en general $V(m) \neq C(m)$, el paso siguiente se evalúa ya en dos argumentos distintos, y las órbitas $m \to V(m) \to V^2(m) \to \cdots$ y $m \to C(m) \to C^2(m) \to \cdots$ se separan. En particular, la identidad **no** se itera en la forma $C^j(m) = 2^{(\cdots)} V^j(m) + 1$; tal propiedad sería incomparablemente más fuerte y no se afirma aquí. Tampoco el desacoplamiento admite un tratamiento perturbativo: para $m \equiv 3 \pmod 4$,

$$D(m) = C(m) - V(m) = \big(2^{\nu_2(3m-1)-1} - 1\big) V(m) + 1.$$

Las cotas estrictas $3/4 < D(m)/m < 3/2$ son algebraicas: ninguno de los extremos se alcanza para m finito, pues $V(m) \geq 1$ y $V(m) \leq (3m-1)/4$. El promedio en densidad natural sobre la clase $m \equiv 3 \pmod 4$ vale exactamente 1. En efecto, escribiendo $k = \nu_2\big((3m-1)/4\big)$, de modo que $V(m) = (3m-1)/2^{k+2}$, se obtiene la descomposición exacta

$$\frac{D(m)}{m} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2^{k+2}} + \frac{1}{m}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+2}}\Big).$$

La condición $k = \nu_2\big((3m-1)/4\big)$ define dentro de la clase $m \equiv 3 \pmod 4$ una clase de restos módulo 2^{k+3}, de densidad $2^{-(k+1)}$, luego los dos primeros sumandos promedian $\frac{3}{2} - 3\sum_{k\geq 0} 2^{-(k+1)}2^{-(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$. El tercero está acotado por $3/(4m)$ y su promedio tiende a 0, pues

$$\frac{1}{\#\{m \leq X;\, m \equiv 3(4)\}} \sum_{\substack{m \leq X \\ m \equiv 3(4)}} \frac{1}{m} = O\Big(\frac{\log X}{X}\Big) \longrightarrow 0.$$

Por tanto

$$\lim_{X\to\infty} \operatorname*{media}_{\substack{m \leq X \\ m \equiv 3(4)}} \frac{D(m)}{m} = 1.$$

El desacoplamiento es, pues, del mismo orden de magnitud que m, no una perturbación pequeña.

4. Segundo acoplamiento: la permutación de Collatz de 1932

En una entrada de su cuaderno fechada el 1 de julio de 1932, Collatz consideró la permutación $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ definida por [3, 6]

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{3}, & n \equiv 0 \pmod 3, \\ \dfrac{4n-1}{3}, & n \equiv 1 \pmod 3, \\ \dfrac{4n+1}{3}, & n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

cuya inversa es

$$g^{-1}(m) = \begin{cases} \dfrac{3m}{2}, & m \equiv 0 \pmod 2, \\ \dfrac{3m+1}{4}, & m \equiv 1 \pmod 4, \\ \dfrac{3m-1}{4}, & m \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Las dos ramas impares de g^{-1} realizan exactamente la elección de signo de la Proposición 2: entre $3m-1$ y $3m+1$ toman el término divisible por 4. La regla de signo de la Definición 1 está, por tanto, ya presente en la permutación de 1932, rama por rama. La construcción de la permutación y sus primeras propiedades se exponen en [2], y el conjunto de los mínimos de sus órbitas se estudia en [1]. Esta sección precisa la relación entre ambas dinámicas.

4.1. La identidad de tres pasos

Proposición 10 (Acoplamiento con g^{-1})**.** *Para todo m impar positivo,*

$$g^{-1}(m) = T^3(m).$$

Demostración. Si $m \equiv 1 \pmod 4$, la variante aplica primero $3m+1$; por la Proposición 2, $4 \mid 3m+1$, de modo que los dos pasos siguientes son divisiones por 2:

$$m \longmapsto 3m+1 \longmapsto \frac{3m+1}{2} \longmapsto \frac{3m+1}{4} = g^{-1}(m).$$

Si $m \equiv 3 \pmod 4$, el mismo argumento con $3m-1$ da $T^3(m) = (3m-1)/4 = g^{-1}(m)$. □

Comentario 11. Como $g^{-1}(2k) = 3k$, la permutación g^{-1} envía los pares biyectivamente sobre los múltiplos de 3, y por tanto los impares biyectivamente sobre los enteros positivos no divisibles por 3; esto está ya en la definición de g. Por la Proposición 10, la restricción de T^3 a los impares positivos es una biyección

$$T^3 : \{m \in \mathbb{Z}^+ : \ m \text{ impar}\} \longrightarrow \{n \in \mathbb{Z}^+ : \ 3 \nmid n\},$$

con inversa la restricción de g. En particular, T^3 es inyectiva sobre los impares, aunque T no lo sea (Proposición 19).

La identidad admite una lectura más directa. Sea $S : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ la aplicación que coincide con g^{-1} sobre los impares y con $x \mapsto x/2$ sobre los pares.

Corolario 12. *La aplicación comprimida de la variante es la compresión impar→impar de S:*

$$V(m) = \operatorname{odd}(S(m)), \qquad m \text{ impar}.$$

Es decir, S se obtiene de g^{-1} sustituyendo su rama par $x \mapsto 3x/2$ por $x \mapsto x/2$, y su retorno impar es V. Esta afirmación se refiere al retorno: S no es la aplicación elemental T.

Demostración. Para m impar, $S(m) = (3m \pm 1)/4$ con el signo prescrito, y

$$\operatorname{odd}\big((3m \pm 1)/4\big) = \operatorname{odd}(3m \pm 1) = V(m)$$

. □

Como las ramas pares de T y de g^{-1} son distintas,

$$T(m) = \frac{m}{2}, \qquad g^{-1}(m) = \frac{3m}{2} \qquad (m \text{ par}),$$

la Proposición 10 es una identidad de un solo bloque: no se itera en la forma $(g^{-1})^j(m) = T^{3j}(m)$. Las dos órbitas se separan en cuanto el cociente $(3m \pm 1)/4$ es par.

4.2. Comparación de los retornos impares

Para m impar sea

$$\varepsilon(m) = \begin{cases} +1, & m \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & m \equiv 3 \pmod 4, \end{cases} \qquad 3m + \varepsilon(m) = 2^{r(m)} q,$$

con $r(m) = \nu_2(3m + \varepsilon(m)) \geq 2$ y q impar, de modo que $V(m) = q$. Denotemos por $R_{g^{-1}}(m)$ el primer término impar que se alcanza en un tiempo estrictamente positivo al iterar g^{-1} desde el impar m.

Proposición 13 (Retornos impares)**.** *Para todo m impar positivo,*

$$\boxed{R_{g^{-1}}(m) = 3^{\,r(m)-2}\,V(m).}$$

El tiempo de primer retorno de g^{-1} a los impares es $r(m)-1$, y el de T es $r(m)+1$.

Demostración. El primer paso da $g^{-1}(m) = (3m+\varepsilon(m))/4 = 2^{r(m)-2}q$. Si $r(m) = 2$, este número es impar e igual a q. Si $r(m) > 2$, mientras el término sea par se aplica $x \mapsto 3x/2$, y tras $r(m)-2$ aplicaciones

$$2^{r(m)-2}q \longmapsto 3\cdot 2^{r(m)-3}q \longmapsto \cdots \longmapsto 3^{r(m)-2}q,$$

que es impar. El total de pasos es $1+(r(m)-2) = r(m)-1$. La variante, en cambio, realiza el paso $3m+\varepsilon(m)$ y después $r(m)$ divisiones por 2: $r(m)+1$ pasos. □

Comentario 14 (Dónde se separan las dos dinámicas)*.* Ambas dinámicas leen el mismo dato local $3m+\varepsilon(m) = 2^{r(m)}q$, pero lo emplean de forma distinta. La variante elimina toda la potencia $2^{r(m)}$ y conserva q; g^{-1} elimina los dos factores de 2 obligatorios y convierte cada uno de los $r(m)-2$ restantes en un factor 3:

$r(m)$	$V(m)$	$R_{g^{-1}}(m)$
2	q	q
3	q	$3q$
4	q	3^2q
⋮	⋮	⋮

Los retornos coinciden exactamente cuando $r(m) = 2$. Para la variante, $V(m) \le (3m+1)/4 < m$ si $m > 1$ (Lema 3); para g^{-1} esa cota no se transmite, pues

$$\frac{R_{g^{-1}}(m)}{m} = \frac{3^{r(m)-1}}{2^{r(m)}}\Big(1+\frac{\varepsilon(m)}{3m}\Big),$$

y para $r(m) \ge 3$ se tiene $R_{g^{-1}}(m) > m$ salvo en el único caso $m = 3$, donde $3\cdot 3-1 = 8 = 2^3$ y $R_{g^{-1}}(3) = 3$: es el punto fijo del retorno impar correspondiente al ciclo $\{2,3\}$ de g. Por ejemplo, para $m = 5$ se tiene $3\cdot 5+1 = 2^4$, $V(5) = 1$ y

$$5 \longmapsto 4 \longmapsto 6 \longmapsto 9 = 3^2\cdot 1 = R_{g^{-1}}(5).$$

La diferencia no está en la elección entre $3m+1$ y $3m-1$, que es la misma, sino en el tratamiento de la valuación 2-ádica que excede la divisibilidad obligatoria por 4.

4.3. El retorno como permutación y la información que elimina la variante

En esta subsección escribimos $R = R_{g^{-1}}$ y denotamos por $\mathcal{O}_+$ el conjunto de los impares positivos.

Proposición 15 (Inversa explícita del retorno impar)**.** *La aplicación $R : \mathcal{O}_+ \to \mathcal{O}_+$ es biyectiva. Para $y \in \mathcal{O}_+$, escribamos*

$$t = \nu_3(y), \qquad u = y/3^t,$$

y sea $\eta \in \{-1,1\}$ el único signo tal que $\eta \equiv 2^{t+2}u \pmod 3$. Entonces

$$R^{-1}(y) = \frac{2^{t+2}u-\eta}{3}.$$

Demostración. Como $3 \nmid u$, existe un único signo η con la congruencia indicada. El número $x = (2^{t+2}u - \eta)/3$ es un entero positivo impar. Además,

$$3x + \eta = 2^{t+2}u,$$

y la divisibilidad por 4 muestra, por la Proposición 2, que $\eta = \varepsilon(x)$. Puesto que u es impar, se tiene $r(x) = t + 2$ y $V(x) = u$; la Proposición 13 da $R(x) = 3^t u = y$. Esto prueba la sobreyectividad. Si $R(x) = y$, la misma fórmula de retorno y $3 \nmid V(x)$ (pues $3x + \varepsilon(x)$ no es divisible por 3) obligan a $r(x) - 2 = \nu_3(y) = t$ y $V(x) = u$. En consecuencia, $3x + \varepsilon(x) = 2^{t+2}u$ y la divisibilidad por 3 fija el signo de manera única. Se obtiene el mismo x, lo que prueba también la inyectividad y la fórmula de la inversa. □

Corolario 16 (Factorización y fibras de la variante)**.** *Para todo $m \in \mathcal{O}_+$ se tiene*

$$3 \nmid V(m), \qquad \nu_3(R(m)) = r(m) - 2.$$

Definiendo $\pi_3(y) = y/3^{\nu_3(y)}$ para $y \in \mathcal{O}_+$, resulta

$$\boxed{V = \pi_3 \circ R.}$$

La imagen de V es $\{u \in \mathcal{O}_+ : 3 \nmid u\}$ y, para cada uno de esos u,

$$V^{-1}(\{u\}) = \{R^{-1}(3^t u) : t \geq 0\}.$$

En particular, cada elemento de la imagen tiene infinitos antecedentes.

Demostración. El numerador $3m + \varepsilon(m)$ no es divisible por 3, y dividir por potencias de 2 no cambia esta propiedad. Así, $3 \nmid V(m)$. La identidad $R(m) = 3^{r(m)-2}V(m)$ da la igualdad de valuaciones y $\pi_3(R(m)) = V(m)$. Como R es biyectiva, los antecedentes de u son exactamente las inversas por R de los números $3^t u$. Estos números son distintos y tienen todos inversa, lo que prueba las restantes afirmaciones. □

Comentario 17 (Alcance dinámico de la factorización). La igualdad $V = \pi_3 \circ R$ es una factorización de aplicaciones: el retorno conserva, como valuación ternaria de su resultado, el exceso $r(m)-2$ de valuación binaria del numerador; la variante lo elimina. No es una conjugación ni demuestra una semiconjugación entre las iteraciones de V y de R. En particular, π_3 no define automáticamente una dinámica cociente: $\pi_3(5) = \pi_3(15) = 5$, pero $\pi_3(R(5)) = V(5) = 1$ y $\pi_3(R(15)) = V(15) = 11$. La supresión de factores de 3 no es, por tanto, compatible con identificar esos argumentos antes de aplicar el retorno.

Comentario 18 (Compresión de las órbitas de la permutación). El retorno R recorre los impares de cada órbita de g en sentido inverso. Toda órbita contiene impares: desde un término par, las ramas $2n/3$ reducen la valuación ternaria hasta llegar a un par no divisible por 3, y la siguiente rama lo envía a un impar. En el sentido de g^{-1}, las ramas $3n/2$ reducen la valuación binaria de cualquier término par hasta alcanzar un impar. Por tanto, los ciclos de g se corresponden con los ciclos de R, eliminando los términos pares e invirtiendo el sentido. Por ejemplo, el ciclo $\{4, 5, 7, 9, 6\}$ da el retorno $5 \mapsto 9 \mapsto 7 \mapsto 5$. Esta compresión no transmite a g la convergencia de V ni proporciona por sí sola estimaciones de discrepancia para los filtros bilaterales de [1], que aproximan los mínimos de las órbitas de g.

4.4. Inyectividad y ausencia de conjugación

Proposición 19. *(i) T y V no son inyectivas, mientras que g^{-1} es biyectiva y su retorno impar $R_{g^{-1}}$ es también biyectivo.*

(ii) No existe ninguna biyección h de $\mathbb{Z}^+$ con $h \circ T = g^{-1} \circ h$, ni ninguna biyección h de los impares positivos con $h \circ V = R_{g^{-1}} \circ h$.

Demostración. (i) Se tiene $T(1) = T(8) = 4$ y $V(1) = V(5) = 1$. Para $R_{g^{-1}}$, supongamos $R_{g^{-1}}(m) = R_{g^{-1}}(m')$ con tiempos de retorno $t \le t'$. Aplicando g^t se obtiene $m = (g^{-1})^{t'-t}(m')$. Si $t < t'$, el impar m se alcanzaría desde m' en $t' - t$ pasos, con $0 < t' - t < t'$, en contra de la definición de t'; luego $t = t'$ y $m = m'$. La sobreyectividad del retorno está demostrada en la Proposición 15.

(ii) Si $h \circ T = g^{-1} \circ h$ con h biyectiva, entonces $T = h^{-1} \circ g^{-1} \circ h$ sería inyectiva. El mismo argumento vale para V y $R_{g^{-1}}$. □

Esta obstrucción es independiente de la del Corolario 23, que se apoya en el recuento de ciclos.

Comentario 20 (Geometría orbital). La no inyectividad de T permite que órbitas distintas se fusionen, y el Teorema 4 muestra que todas lo hacen en el ciclo $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Para una permutación, en cambio, dos órbitas distintas no pueden fusionarse, y si $g^i(n) = g^j(n)$ con $0 \le i < j$, entonces $n = g^{j-i}(n)$. Toda órbita de g es, por tanto, o bien un ciclo finito, o bien una sucesión biinfinita

$$\ldots, g^{-2}(n), g^{-1}(n), n, g(n), g^2(n), \ldots$$

de términos distintos; en este segundo caso, al tratarse de enteros positivos distintos, sus términos tienden a infinito en ambas direcciones.

Para la permutación de 1932 se conocen cuatro ciclos positivos,

$$\{1\}, \quad \{2,3\}, \quad \{4,5,7,9,6\}, \quad \{44,59,79,105,70,93,62,83,111,74,99,66\},$$

[3, 6, 2]. Las cuestiones abiertas son si existen otros ciclos y si existe alguna órbita no periódica; la de 8 es la más pequeña cuyo carácter no está decidido.

Así, sobre cada impar, un paso de g^{-1} tiene el mismo resultado que tres pasos elementales de T, y sin embargo sus geometrías orbitales son opuestas: una dinámica no invertible con un único atractor, frente a una dinámica invertible cuyas componentes son ciclos o cadenas biinfinitas.

Comentario 21 (Tres usos del mismo paso afín). El Teorema 8 y las Proposiciones 10–13 sitúan a la variante junto a dos sistemas considerados por Collatz. Frente a la aplicación acelerada C, las elecciones de signo coinciden sólo en la clase $m \equiv 1 \pmod 4$, y en la clase complementaria la diferencia está controlada por $\nu_2(3m-1)$. Frente a g^{-1}, la elección de signo es la misma para todo impar, y la diferencia está sólo en el tratamiento posterior de los factores de 2. Ninguna de estas identidades es una conjugación; lo que muestran son tres maneras distintas de usar la información 2-ádica contenida en un paso afín de pendiente 3.

5. Antisimetría y obstáculo a una conjugación global

Proposición 22. *Extendida a los impares de $\mathbb{Z}$ por la misma regla modular, V es una función impar:*

$$V(-m) = -V(m).$$

Demostración. Si $m \equiv 1 \pmod 4$, entonces $-m \equiv 3 \pmod 4$ y $3(-m) - 1 = -(3m+1)$; si $m \equiv 3 \pmod 4$, entonces $-m \equiv 1 \pmod 4$ y $3(-m) + 1 = -(3m-1)$. En ambos casos el numerador cambia de signo, y suprimir factores 2 conmuta con el cambio de signo. □

Así, la variante es la simetrización de las reglas $3x+1$ y $3x-1$ respecto de $m \mapsto -m$; recuérdese que el problema $3x-1$ sobre los enteros positivos es equivalente al problema $3x+1$ sobre los negativos [3].

Corolario 23. *Sobre los impares de $\mathbb{Z}$, la aplicación V posee exactamente dos ciclos, $\{1\}$ y $\{-1\}$, mientras que C posee al menos cuatro (los asociados a 1, -1, -5 y -17). En consecuencia no existe ninguna biyección h de los impares de $\mathbb{Z}$ con $h \circ V = C \circ h$.*

Demostración. El Teorema 4 da el ciclo $\{1\}$ como único atractor en los positivos, y la Proposición 22 traslada el enunciado a los negativos. C posee los cuatro ciclos indicados [3], que es cuanto el argumento requiere; no se afirma que sean todos. Una conjugación preserva el número de ciclos. □

Comentario 24. Sobre los impares positivos el obstáculo es de otra naturaleza, pero no menor: si existiese h sobreyectiva sobre los impares positivos con $h \circ V = C \circ h$, entonces $h(1)$ sería un punto fijo de C entre los impares positivos, y el único es 1 —de $\operatorname{odd}(3x+1) = x$ se sigue $x(2^a - 3) = 1$, luego $x = 1$—, de modo que $h(1) = 1$ y $h(V^k(m)) = C^k(h(m))$ transferiría a C la convergencia demostrada de V, es decir, demostraría la conjetura de Collatz. No cabe, pues, esperar una construcción sencilla.

6. Reformulación simbólica y comparación de lenguajes

La identidad del Teorema 8 no se itera. El objeto que sí lo hace es la codificación de las órbitas por su vector de paridades.

Conviene fijar con precisión qué se codifica, porque el objeto cambia respecto de las secciones anteriores. Sea

$$\widetilde{T}_V(x) = \begin{cases} (3x \pm 1)/2, & x \text{ impar}, \\ x/2, & x \text{ par}, \end{cases}$$

con el signo prescrito por x mód 4 como en la Definición 1. Esta aplicación está definida sobre *todos* los enteros, no sólo sobre los impares, y la aplicación comprimida V de la Definición 1 es su compresión impar $\to$ impar. La codificación es la *convención* clásica de vectores de paridad de Terras y Lagarias [5, 3] —cada paso aporta un símbolo, 1 si el término es impar y 0 si es par, de modo que el símbolo 1 lleva ya incorporada una división por 2—, pero la aplicación codificada es $\widetilde{T}_V$ y no la de Collatz. En lo que sigue, $\mathcal{L}_V$ denota el lenguaje de paridades de $\widetilde{T}_V$; no es el itinerario de V, cuya codificación por paridad sería trivialmente $111\ldots$ por ser V una aplicación de impares en impares. Con esta convención, una palabra de longitud N con r símbolos 1 corresponde al factor multiplicativo $3^r/2^N$.

Lema 25 (Determinación)**.** *Numeramos los pasos desde $i = 0$. Con la convención anterior, n mód 2^k determina $\widetilde{T}_V^i(n)$ mód 2^{k-i} para todo $0 \le i \le k$. En particular determina la palabra de paridades de longitud k asociada a n, y determina el signo empleado en el paso i-ésimo siempre que $i \le k-2$.*

Demostración. Basta el caso $i = 1$ e inducción. Si n es par, $\widetilde{T}_V(n) = n/2$ y sustituir n por $n + 2^k$ altera el resultado en 2^{k-1}. Si n es impar, la rama la fija n mód 4, que n mód 2^k

determina para $k \geq 2$, y entonces $\widetilde{T}_V(n) = (3n \pm 1)/2$ varía en $3 \cdot 2^{k-1}$, múltiplo de 2^{k-1}. La última afirmación se sigue porque el signo del paso i-ésimo depende de $\widetilde{T}_V^i(n)$ mód 4, disponible cuando $k - i \geq 2$. □

Proposición 26. *Los itinerarios de la variante no contienen dos símbolos* 1 *consecutivos. En consecuencia, una palabra admisible de longitud N contiene a lo sumo $r \leq \lceil N/2 \rceil$ símbolos* 1*, cota alcanzada por la palabra alternante* $1010\ldots$*; en particular*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{r}{N} \leq \frac{1}{2}.$$

Demostración. Por la Proposición 2, si m es impar entonces $4 \mid 3m \pm 1$ con el signo prescrito, luego $(3m \pm 1)/2$ es par: todo símbolo 1 va seguido de un 0. □

Teorema 27 (Caracterización del lenguaje)**.** *Sea $\mathcal{L}_V$ el conjunto de palabras de paridad realizables por la variante y Σ_{11} el conjunto de palabras binarias que evitan el factor* 11*. Entonces*

$$\mathcal{L}_V = \Sigma_{11},$$

es decir, el lenguaje de la variante coincide con el del shift de la razón áurea [4]: hay F_{k+2} palabras admisibles de longitud k, de modo que $\#\mathcal{L}_V(k) \sim \varphi^{k+2}/\sqrt{5}$: la tasa exponencial del recuento es φ y la entropía, su logaritmo, $h = \lim_k \frac{1}{k} \log \#\mathcal{L}_V(k) = \log \varphi \approx 0{,}481$. El enunciado es sobre palabras finitas: ningún entero positivo realiza una sucesión infinita arbitraria, pues su órbita alcanza 1 *y su itinerario termina en $(10)^\infty$; la aplicación $\widetilde{T}_V$ se extiende a $\mathbb{Z}_2$ por la misma regla. Las clases $2\mathbb{Z}_2$, $1 + 4\mathbb{Z}_2$ y $3 + 4\mathbb{Z}_2$ son abiertas y cerradas; sobre ellas, respectivamente, las aplicaciones $x \mapsto x/2$, $x \mapsto (3x+1)/2$ y $x \mapsto (3x-1)/2$ toman valores en $\mathbb{Z}_2$ y son continuas, de modo que la aplicación definida por ramas es continua. Sobre $\mathbb{Z}_2$ la compacidad de los cilindros encajados sí da la realización de toda sucesión infinita sin* 11*. Además, la densidad natural del conjunto de enteros que realizan una palabra ω de longitud k es*

$$\mu(\omega) = 2^{-(1+z(\omega))}, \qquad z(\omega) = \#\{\, 0 \leq i \leq k-2 ; \omega_i = 0 \,\},$$

es decir, la ley de una cadena de Markov de distribución inicial $(1/2, 1/2)$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta distribución inicial no *es la estacionaria de P, que es $\pi = (2/3, 1/3)$. Escribiendo $p_j = \Pr(\omega_j = 1)$ se tiene $p_0 = 1/2$ y $p_{j+1} = (1 - p_j)/2$, de donde*

$$p_j = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^j,$$

con lo que la probabilidad marginal $\Pr(\omega_j = 1)$ tiende a $1/3$; siendo la cadena irreducible y aperiódica, la ley fuerte de los grandes números da además que la frecuencia empírica de unos converge a $1/3$ para μ-casi toda sucesión simbólica, equivalentemente para la medida de Haar en $\mathbb{Z}_2$. Esto no *es una afirmación sobre las órbitas de enteros positivos: la de cualquier entero positivo alcanza* 1 *y su itinerario termina en $(10)^\infty$, cuya frecuencia de unos es $1/2$. El valor $1/3$ describe la estadística de los cilindros residuales al crecer la profundidad, no la frecuencia temporal final de una órbita concreta. La desviación a longitud finita es exactamente el transitorio inicial: para $k = 16$, $\frac{1}{16}\sum_{j=0}^{15} p_j \approx 0{,}340277672$.*

Demostración. La inclusión $\mathcal{L}_V \subseteq \Sigma_{11}$ es la Proposición 26. Para la recíproca procedemos por inducción sobre la longitud. En el caso base $k = 1$ la palabra es la paridad de n, de modo

que las dos palabras de longitud 1 son realizables, por las clases 0 y 1 módulo 2, cada una de densidad $1/2$; esto fija la condición inicial de la fórmula de μ. El paso inductivo muestra que toda clase a mód 2^k que realiza una palabra $\omega \in \Sigma_{11}$ se refina en las clases módulo 2^{k+1} que realizan sus extensiones admisibles. Distinguimos dos casos, y conviene señalar que la separación es necesaria: una única expresión afín válida sobre toda la clase *no* está disponible cuando ω termina en 1. Así, para $k = 1$ y $\omega = (1)$, la clase de los impares emplea el signo $+1$ si $n \equiv 1 \pmod 4$ y el signo -1 si $n \equiv 3 \pmod 4$.

Caso $\omega_{k-1} = 0$. Todos los pasos impares de los k primeros ocurren en posiciones $i \le k-2$, pues la posición $k-1$ es par. Por el Lema 25, los signos de todos ellos quedan fijados por a mód 2^k, de modo que la composición de los k pasos es una misma aplicación afín sobre toda la clase:

$$\widetilde{T}_V^k(a + 2^k t) = A + 3^r t, \qquad r = \#\{i; \omega_i = 1\},$$

para cierta constante A que depende de la clase a, no sólo de ω. Como 3^r es impar, la paridad de $\widetilde{T}_V^k$ cambia con t mód 2: las dos subclases a y $a + 2^k$ módulo 2^{k+1} realizan las extensiones $\omega 0$ y $\omega 1$ en algún orden, una cada una.

Caso $\omega_{k-1} = 1$. Aquí no se precisa fórmula afín alguna. Por la Proposición 2, $4 \mid 3m \pm 1$ con el signo prescrito, luego $\widetilde{T}_V^k(n)$ es par cualquiera que sea el signo empleado en el último paso: ambas subclases módulo 2^{k+1} realizan $\omega 0$ y ninguna realiza $\omega 1$.

Puesto que desde una palabra terminada en 0 existen ambas extensiones y desde una terminada en 1 existe exactamente la extensión por 0, la inducción produce el árbol completo de Σ_{11}, con $\#\mathcal{L}_V(k) = F_{k+2}$ y tasa exponencial φ. Contando clases, el mismo argumento da $\mu(\omega 0) = \mu(\omega 1) = \mu(\omega)/2$ si ω termina en 0 y $\mu(\omega 0) = \mu(\omega)$ si termina en 1, que es la fórmula del enunciado. □

Corolario 28. *Las densidades $\mu(\omega)$ no son uniformes. Frente al teorema de Terras–Lagarias [5, 3], según el cual en Collatz la aplicación $\{n \bmod 2^k\} \to \{0,1\}^k$ —definida sobre* todas *las clases módulo 2^k, no sólo las impares— es una* biyección *sobre las 2^k palabras, equiprobables todas, en la variante la aplicación análoga es sobreyectiva sobre las F_{k+2} palabras admisibles con multiplicidades desiguales. La elección adaptativa del signo no sólo recorta el lenguaje: destruye también la equidistribución de las clases residuales sobre él.*

Comentario 29 (Régimen subcrítico). El factor multiplicativo $3^r/2^N$ es contractivo cuando $\rho = r/N < \log 2/\log 3 \approx 0{,}6309$. Conviene distinguir tres cantidades que es fácil confundir: la densidad de un prefijo finito, la frecuencia asintótica y la deriva logarítmica media. La Proposición 26 da, para prefijos, $\rho \le \lceil N/2 \rceil / N$, cota que *excede* el umbral en $N = 1$ y $N = 3$ —la palabra 101 es admisible y tiene $\rho = 2/3$— y queda por debajo de él para todo $N \ge 4$. Asintóticamente $\limsup \rho \le 1/2$, y la frecuencia típica bajo la medida μ es $1/3$. El régimen es, pues, subcrítico salvo en prefijos muy cortos, y estrictamente subcrítico en el límite. Debe subrayarse que esto *no* constituye una segunda demostración independiente de la convergencia: las aplicaciones son afines, $3m \pm 1$, y el criterio de densidad sólo gobierna la parte multiplicativa. El tratamiento riguroso de los términos aditivos ± 1 lo proporcionan el Lema 3 y la cota $(10/9)^J$ del Corolario 6. La lectura correcta de esta sección es, por tanto, estructural: explica *por qué* funciona la demostración aritmética, según el encadenamiento

$$\text{signo adaptativo} \implies \nu_2 \ge 2 \implies \mathcal{L}_V = \Sigma_{11} \implies \limsup_{N\to\infty} \rho_N \le \tfrac{1}{2} < \tfrac{\log 2}{\log 3}.$$

Comentario 30 (Codificación elemental y diccionario). Es frecuente emplear en su lugar la codificación elemental, en la que cada operación es un símbolo: I para el paso $m \mapsto 3m \pm 1$ y P para cada división por 2. Las dos convenciones son equivalentes, pero *no* comparten constantes,

y conviene no mezclarlas. Para trayectorias completas detenidas al alcanzar 1, o para prefijos con cortes compatibles que no separen un paso impar de su primera división por 2, si ρ_A y ρ_B denotan las densidades respectivas de símbolos impares, entonces $\rho_A = \rho_B/(1-\rho_B)$, transformación no lineal que lleva un umbral en el otro pero no conserva los márgenes relativos. En la codificación elemental, la variante prohíbe II y también IPI (entre dos I hay al menos dos P), el número de palabras admisibles satisface $N_k = N_{k-1} + N_{k-3}$ y la entropía es $\log\lambda \approx 0{,}382$ con $\lambda^3 = \lambda^2 + 1$, $\lambda \approx 1{,}4656$; la densidad admisible satisface $\rho_B \le \lceil N/3 \rceil / N$, con $\limsup \rho_B \le 1/3$, y el umbral crítico es $\log 2/\log 6 \approx 0{,}3869$. También aquí la cota finita supera el umbral en prefijos cortos —$IPPI$ es admisible y tiene $\rho_B = 1/2$—, de modo que la comparación con el umbral es asintótica y no uniforme sobre prefijos. Obsérvese la trampa: $\log\varphi$ aparece en ambas convenciones, pero en sistemas distintos —es la entropía de la variante en la convención acelerada y la de Collatz en la elemental, que también prohíbe II—. Los valores observados para $3 \le m_0 \le 2\cdot 10^5$ son $\rho_A \le 0{,}4490$ y $\rho_B \le 0{,}3099$, ambos alcanzados en $m_0 = 16\,311$.

Ejemplo 31 (Una misma órbita en las dos convenciones)**.** La órbita de $m_0 = 7$ ilustra la diferencia. En la convención elemental (B), cada operación es un símbolo:

$$7 \underset{I}{\to} 20 \underset{P}{\to} 10 \underset{P}{\to} 5 \underset{I}{\to} 16 \underset{P}{\to} 8 \underset{P}{\to} 4 \underset{P}{\to} 2 \underset{P}{\to} 1$$

es decir $\omega_B = IPP\,IPPPP$, con $u = 2$ símbolos I y $c = 6$ símbolos P, luego $\rho_B = 2/8 = 0{,}25$. La palabra evita II y también IPI, como exige la Observación 30.

En la convención acelerada (A), el símbolo impar consume ya una división y la órbita se comprime:

$$7 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1, \qquad \omega_A = 101000,$$

con $r = 2$ unos sobre $N = 6$ pasos, luego $\rho_A = 2/6 = 1/3$. La palabra evita 11, como exige la Proposición 26. Se comprueba la relación entre densidades:

$$\rho_A = \frac{\rho_B}{1-\rho_B} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}.$$

Ambas lecturas describen la misma órbita; lo que cambia es si las divisiones por 2 que acompañan al paso impar se cuentan aparte o van incorporadas al símbolo. De ahí que los umbrales críticos difieran (0,3869 frente a 0,6309) sin que ninguna de las dos lecturas sea más correcta que la otra.

Éste es el contraste esencial con la conjetura de Collatz. Por el teorema de Terras–Lagarias, todo vector de paridades de longitud k se realiza en Collatz, y en exactamente una clase de restos módulo 2^k: su lenguaje finito es el del shift completo, $\mathcal{L}_C = \{0,1\}^*$, de entropía $\log 2$, y contiene palabras de densidad arbitrariamente próxima a 1, muy por encima del umbral $\log 2/\log 3$. La dificultad consiste precisamente en excluir que la realización aritmética de esos itinerarios permita una órbita no convergente. Lo que la variante modifica no es un coeficiente ni una valuación aislada, sino el propio espacio de itinerarios admisibles, y lo modifica de forma que una densidad asintótica igual o superior al umbral queda excluida por construcción:

$$\limsup_{N\to\infty} \rho_N \le \frac{1}{2} < \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Para prefijos cortos, en cambio, el umbral sí puede superarse —la palabra 101 es admisible—, como se precisó en la Observación 29.

Problema 32 (Geometría de las fibras residuales)**.** La comparación de lenguajes está resuelta por el Teorema 27 y el Corolario 28: $\mathcal{L}_V = \Sigma_{11} \subsetneq \{0,1\}^*$, con multiplicidades $2^k\mu(\omega)$ frente a la equidistribución de Collatz. Queda la geometría del conjunto

$$R_k(\omega) = \{\, a \text{ mód } 2^k ; \text{la palabra de longitud } k \text{ de } a \text{ es } \omega \,\},$$

cuyo cardinal ya conocemos. Una formulación precisa del problema es decidir si existe un autómata finito, con un número de estados independiente de k, que reconozca la relación entre los k bits del representante $0 \le a < 2^k$, leídos del menos al más significativo, y los k símbolos de ω, leídos en orden temporal. El alfabeto de entrada está formado por los pares de esos símbolos; los argumentos se representan con exactamente k bits, incluidos los ceros de mayor peso. No basta para este objetivo una recursión cuyo número de estados crezca con la profundidad: la construcción por refinamiento de clases ya proporciona una descripción recursiva general.

Se dispone de evidencia negativa, obtenida por enumeración exhaustiva de todas las fibras hasta $k = 14$. Con las definiciones usuales —subcubo de coordenadas, subespacio afín sobre $\mathbb{F}_2$, *coset* de un subgrupo de $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ y progresión aritmética en sentido ordinario— el resultado es que ninguna de esas descripciones es universal, aunque todas se cumplen para algunas fibras. Las fibras de uno o dos elementos son afines y son progresiones aritméticas; una fibra de dos elementos sólo es un coset si sus residuos difieren en 2^{k-1} módulo 2^k. En estas comparaciones, los residuos se representan por sus enteros entre 0 y $2^k - 1$, y la estructura afín se refiere a sus vectores binarios en $\mathbb{F}_2^k$:

k	#fibras	no subcubo	no afín	no coset	no p. a.
8	55	52	4 (7,3 %)	52	40
10	144	141	48 (33,3 %)	141	125
12	377	374	220 (58,4 %)	374	354
14	987	984	752 (76,2 %)	984	960

Los primeros fallos aparecen en $k = 3$ para la descripción por subcubos y por *cosets* —por ejemplo $R_3(100) = \{3, 5\}$, que es progresión aritmética pero no *coset*, pues el paso debería ser 4—, en $k = 4$ para las progresiones aritméticas y en $k = 8$ para la estructura afín.

Este último caso merece atención. *Toda* fibra es subespacio afín sobre $\mathbb{F}_2$ mientras $k \le 7$; la primera excepción, en orden lexicográfico, es $R_8(10100100)$. La regularidad se degrada después con rapidez, como muestra la tabla. Conviene subrayar que la palabra de máxima densidad no es la responsable:

$$R_8(10101010) = \{1, 31, 41, 55, 73, 87, 97, 127, 129, 159, 169, 183, 201, 215, 225, 255\}$$

sí es afín. La afinidad observada hasta $k = 7$ no persiste, por tanto, en general. Estos cálculos descartan las cuatro descripciones simples anteriores como leyes universales. No deciden la cuestión del reconocimiento por un autómata finito uniforme formulada arriba, ni excluyen otras representaciones compactas cuya complejidad se especifique de antemano. Una mera recursión no constituye aquí una respuesta nueva, pues ya está disponible en la prueba del Teorema 27.

7. Qué no se sigue de todo esto

Conviene enunciarlo sin ambigüedad. La variante se demuestra con facilidad porque impone a la valuación 2-ádica la cota determinista $\nu_2 \ge 2$. Conviene ser exacto: la valuación $a_j = \nu_2(3m_j + \varepsilon_j)$

sigue fluctuando en la variante; lo que desaparece es la posibilidad $a_j = 1$. La elección adaptativa del signo no fija la valuación, la trunca inferiormente, y esa truncación basta para convertir una contracción estadísticamente esperada en una contracción determinista. Una deriva logarítmica media favorable no basta para resolver la conjetura de Collatz, aunque sí sostiene los resultados conocidos de tipo "casi toda órbita" [5]. Conviene precisar en qué sentido lo es: bajo el modelo geométrico $\Pr(\nu_2(3m+1) = k) = 2^{-k}$, la media *aritmética* del factor $3/2^k$ vale exactamente 1, y el conocido $3/4$ es el factor geométrico asociado a la deriva logarítmica:

$$\mathbb{E}\big[\log(3/2^k)\big] = \log 3 - 2\log 2 = \log(3/4).$$

El obstáculo que permanece es obtener, para toda órbita y sin suponer independencia probabilística, un control determinista suficiente sobre la sucesión correlacionada de valuaciones

$$\nu_2(3m_j + 1).$$

La comparación entre ambos sistemas se produce, pues, en dos escalas distintas:

	Variante	Collatz
paso local	$\nu_2(3m \pm 1) \geq 2$	$\nu_2(3m+1)$ fluctuante
lenguaje	Σ_{11}	$\{0,1\}^*$
entropía	$\log \varphi$	$\log 2$
clases residuales	multiplicidades no uniformes	biyección equidistribuida

El Teorema 8 describe la primera fila y el Teorema 27 con su Corolario 28 las tres restantes; ninguno de ellos afirma que controlar ν_2 en un paso baste, por sí solo, para resolver la conjetura. La variante no constituye por tanto una aproximación a una demostración de la conjetura. Lo que establece es más modesto y más defendible: una modificación concreta que impone $a_j \geq 2$ produce contracción determinista y restringe el lenguaje de itinerarios, de modo que aísla un mecanismo ausente en Collatz. No se sigue de ello que la dificultad de la conjetura esté *precisamente* localizada ahí: podrían existir formulaciones equivalentes del problema en que la obstrucción se manifieste de otro modo.

Conviene ser explícito sobre este último punto, porque la tentación contraria es natural. Podría pensarse que V sirve de control positivo, y que todo método general propuesto para Collatz debería al menos reproducir su convergencia. Ese test tiene poca capacidad discriminante: la función $W(m) = m - 1$ satisface $W(V(m)) \leq (3/4)W(m)$, como demuestra el Lema 3. Por ello, un método que permita usar esta función de Lyapunov dispone ya de una prueba inmediata. Un método construido sobre la aritmética específica de $3m+1$ puede, en cambio, no estar definido para una regla de signo adaptativo sin que ello lo invalide.

Los controles negativos pueden detectar argumentos que demuestran demasiado, siempre que se formule con precisión qué conclusión refutan. El primero es $3m - 1$ sobre los enteros positivos, con divisiones por 2 y compresión a los impares, que posee al menos los tres ciclos [3]

$$\{1\}, \qquad \{5, 7\}, \qquad \{17, 25, 37, 41, 55, 61, 91\}.$$

Por tanto, un argumento que excluya todos los ciclos no triviales y permanezca válido, con las mismas hipótesis, al sustituir $+1$ por -1 queda refutado. Este control es especialmente útil porque, bajo el mismo modelo geométrico, $3m - 1$ comparte con Collatz la deriva logarítmica $\log(3/4)$.

El segundo control es $5m + 1$. La afirmación de que todos sus enteros positivos alcanzan 1 es falsa: para el mapa elemental existe el ciclo explícito

$$13 \to 66 \to 33 \to 166 \to 83 \to 416 \to 208$$
$$\to 104 \to 52 \to 26 \to 13,$$

que no contiene 1. Separadamente, la deriva del modelo geométrico es $\log 5 - 2\log 2 = \log(5/4) > 0$. Esta predicción expansiva no demuestra por sí sola que exista una órbita divergente, ni refuta una afirmación distinta, como la llegada a algún ciclo. Para detectar una prueba defectuosa debe compararse su conclusión exacta con el ciclo explícito o con otra obstrucción demostrada; no basta usar el signo de una deriva heurística como si fuera un teorema orbital.

Verificación numérica

Como control independiente de las demostraciones, los enunciados efectivos anteriores han sido comprobados computacionalmente para todos los impares $3 \le m_0 \le 1\,999\,999$: el descenso estricto y el Lema 3 en cada paso, la cota del Teorema 4 (con razón máxima $J/\text{cota} = 1$, alcanzada en $m_0 = 3$), la cota del Corolario 6 (razón máxima observada $L/\log m_0 = 104/\log(1\,158\,615) \approx 7{,}448397$, en $m_0 = 1\,158\,615$, donde $J = 32$ y $\sum a_j = 71$, frente a la cota 11), la identidad del Teorema 8 en ambas clases y la antisimetría de la Proposición 22, evaluada en los correspondientes argumentos negativos. El recuento global de ciclos de V se deduce de las demostraciones de convergencia y antisimetría; los ciclos indicados de C son los citados en el Corolario 23. En el mismo rango de impares se comprobaron la identidad $g^{-1}(m) = T^3(m)$ de la Proposición 10, la fórmula $R_{g^{-1}}(m) = 3^{r(m)-2}V(m)$ y los tiempos de retorno de la Proposición 13, y que $R_{g^{-1}}(m) > m$ para todo m con $r(m) \ge 3$ salvo $m = 3$. La inversa explícita de la Proposición 15 se contrastó en ambos sentidos para los primeros 100 000 impares positivos; estas comprobaciones son finitas y no sustituyen la prueba de la biyección.

Los enunciados sobre el lenguaje se comprobaron de otro modo, por ser afirmaciones sobre clases residuales y no sobre condiciones iniciales: para cada $k \le 16$ se recorrieron exhaustivamente las 2^k clases módulo 2^k, obteniéndose exactamente F_{k+2} palabras y las multiplicidades predichas por μ (error nulo), y para cada $k \le 14$ los cuatro tests estructurales sobre las fibras $R_k(\omega)$ del Problema 32.

Para $3 \le m_0 \le 2 \cdot 10^5$ se comprobaron además la ausencia de dos impares consecutivos en los itinerarios (Proposición 26), el rango y el promedio de $D(m)/m$, cuyo valor en la clase $m \equiv 3$ (mód 4) es 1,00004, y las densidades ρ_A y ρ_B de la Observación 30. En este rango menor, el máximo de $L/\log m_0$ es $72/\log 16\,311 \approx 7{,}422990$, en $m_0 = 16\,311$; no debe confundirse con el máximo del rango ampliado.

El suplemento computacional contiene el programa `verificar_variante.py`, que reproduce todas las comprobaciones anteriores, y sus resultados: un resumen con las cifras citadas en esta sección y la tabla de las cuatro pruebas sobre las fibras del Problema 32. Los enunciados generales se comprueban mediante aserciones que detienen la ejecución ante la primera discrepancia. El programa utiliza aritmética entera para los itinerarios y las identidades; los logaritmos de las cotas y de los cocientes numéricos se evalúan en coma flotante. Las demostraciones de las cotas no dependen de esa evaluación numérica.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Filtros bilaterales y discrepancia aritmética en la permutación original de Collatz*, Zenodo, 2026. 10.5281/zenodo.24056105.

[2] M. Cerdá Bennassar, *La permutación original de Collatz de 1932: dinámica 3-ádica y ciclos*, Zenodo, 2026. DOI: 10.5281/zenodo.23909519.

[3] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem and its generalizations, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 3–23.

[4] D. Lind y B. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, 1995.

[5] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arith.* **30** (1976), 241–252.

[6] S. R. Garcia y S. J. Miller, *100 Years of Math Milestones: The Pi Mu Epsilon Centennial Collection*, American Mathematical Society, 2019; entrada "1932. The $3x+1$ Problem", problema del centenario propuesto por J. C. Lagarias.