Segmentación en tramos de la dinámica de Collatz: relación fundamental, triángulos $T(a)$ y transiciones modulares

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026, revisado en noviembre de 2026

Resumen

Se descompone toda trayectoria de Collatz en *tramos*: cadenas maximales de impares de la forma $4n+3$ cerradas por un impar de la forma $4n+1$, seguidas de una cola 2-ádica. Se demuestra que la altura de un tramo que empieza en A es exactamente $\nu_2(A+1)$, que sus extremos satisfacen la relación $(B+1)/(A+1) = (3/2)^k$, y que el paso de cierre produce siempre un descenso respecto del último impar del tramo. Se lee la segmentación en la familia de triángulos $T(a)$ generada por $2n+1$ y $3n+2$, mediante la coordenada $n+1$: cada natural ocupa una única posición de un único triángulo, la distancia de esa posición a la diagonal es $\nu_2(n+1)$, y cada tramo es una fila o el final de una fila de un solo triángulo. Se describen las transiciones entre tramos mediante congruencias módulo potencias de 2 y se ilustra todo con las trayectorias de 27 y 127. Se señala expresamente que los valores iniciales de tramos consecutivos no forman una sucesión monótona, por lo que la segmentación no permite, por sí sola, conclusiones globales sobre la conjetura.

1. Introducción

La dinámica de Collatz suele describirse término a término. Agrupando los términos según su comportamiento aritmético aparece una segmentación natural en bloques finitos, los *tramos*, cuya evolución interna está completamente determinada por la valuación 2-ádica de su valor inicial desplazado en una unidad. Esta descomposición separa dos mecanismos: la *expansión* dentro del tramo, que es algebraicamente trivial, y la *transición* entre tramos, que concentra toda la dificultad del problema.

Los hechos aritméticos básicos de este escrito (el comportamiento de los impares según su residuo módulo 4 y la identidad $\frac{3n+1}{2} + 1 = \frac{3}{2}(n+1)$) son elementales y conocidos; véanse Terras [3] y el panorama de Lagarias [2]. Este escrito los organiza en torno a tres cuestiones: el control exacto de la altura de un tramo, su lectura en la familia de triángulos $T(a)$ estudiada en [1], cuya notación seguimos, y las transiciones entre tramos.

2. Definiciones

Definición 2.1 (Valuación 2-ádica)**.** Para un entero $m \neq 0$, $\nu_2(m)$ es el mayor $e \geq 0$ tal que $2^e \mid m$.

Definición 2.2 (Aplicación de impares)**.** Para n impar se define

$$U(n) = \frac{3n+1}{2^{\nu_2(3n+1)}},$$

el siguiente impar de la trayectoria de Collatz de n.

Definición 2.3 (Formas modulares)**.** Un impar n es de *forma ascendente* si $n \equiv 3 \pmod 4$ y de *forma de cierre* si $n \equiv 1 \pmod 4$.

Lema 2.4 (Paridad del paso $(3n+1)/2$)**.** *Sea n impar.*

1. *Si $n = 4m+3$, entonces $\frac{3n+1}{2} = 6m+5$ es impar.*
2. *Si $n = 4m+1$, entonces $\frac{3n+1}{2} = 6m+2$ es par, y $\nu_2(3n+1) \geq 2$.*

Demostración. Basta desarrollar:

$$3(4m+3)+1 = 12m+10 = 2(6m+5), \qquad 3(4m+1)+1 = 12m+4 = 4(3m+1).$$

□

Definición 2.5 (Tramo, altura, par de cierre y cola)**.** Sea A un impar positivo. El *tramo* que empieza en A es la sucesión de impares $a_1, \ldots, a_k$ definida por $a_1 = A$ y

$$a_{i+1} = \frac{3a_i + 1}{2} \qquad \text{mientras } a_i \equiv 3 \pmod 4,$$

y que se detiene en el primer índice k con $a_k \equiv 1 \pmod 4$. El número k es la *altura* del tramo y a_k su *impar de cierre*. El *par de cierre* es

$$B = \frac{3a_k + 1}{2},$$

que es par por el Lema 2.4. Con $v = \nu_2(B) \geq 1$, la *cola 2-ádica* es B, $B/2$, …, $B/2^v$, y

$$A' = \frac{B}{2^v} = U(a_k)$$

es el valor inicial del tramo siguiente. Obsérvese que $\nu_2(3a_k+1) = v+1 \geq 2$.

Así, la trayectoria impar de cualquier A se descompone en tramos consecutivos

$$A = A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots, \qquad A_{t+1} = A'_t,$$

hasta alcanzar, si se alcanza, el ciclo trivial ($A_t = 1$ es un tramo de altura 1 con $A'_t = 1$). Un impar de forma de cierre constituye por sí solo un tramo de altura 1.

3. Altura y relación fundamental

Lema 3.1 (Identidad desplazada)**.** *Para todo impar n,*

$$\frac{3n+1}{2} + 1 = \frac{3}{2}(n+1).$$

Demostración. $\frac{3n+1}{2} + 1 = \frac{3n+3}{2} = \frac{3}{2}(n+1)$. □

Teorema 3.2 (Altura de un tramo)**.** *Todo tramo es finito y su altura es*

$$k = \nu_2(A+1).$$

Además, $\nu_2(a_i+1) = k - i + 1$ para $i = 1, \ldots, k$.

Demostración. Para un impar n se tiene $n \equiv 3 \pmod 4$ si y solo si $\nu_2(n+1) \geq 2$, y $n \equiv 1 \pmod 4$ si y solo si $\nu_2(n+1) = 1$. Mientras $a_i \equiv 3 \pmod 4$, el Lema 3.1 da $a_{i+1}+1 = \frac{3}{2}(a_i+1)$, luego $\nu_2(a_{i+1}+1) = \nu_2(a_i+1) - 1$. Partiendo de $\nu_2(a_1+1) = \nu_2(A+1)$, se obtiene $\nu_2(a_i+1) = \nu_2(A+1) - i + 1$ mientras dura el tramo. El primer índice con $\nu_2(a_i+1) = 1$, es decir, con $a_i \equiv 1 \pmod 4$, es $i = \nu_2(A+1)$. □

En particular, el tramo no puede cerrarse mientras sus términos sean de forma ascendente (Lema 2.4) y se cierra forzosamente en un impar de forma de cierre tras exactamente $\nu_2(A+1)$ términos.

Teorema 3.3 (Relación fundamental)**.** *Sea un tramo de altura k con valor inicial A y par de cierre B. Entonces*

$$\frac{B+1}{A+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^k.$$

Demostración. La cadena $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_k \to B$ consta de k pasos de la forma $n \mapsto \frac{3n+1}{2}$. Aplicando el Lema 3.1 en cada uno, $B+1 = \left(\frac{3}{2}\right)^k (a_1+1) = \left(\frac{3}{2}\right)^k (A+1)$. □

Corolario 3.4 (Forma cerrada)**.** *Si $A = m \cdot 2^k - 1$ con m impar, el tramo tiene altura k y*

$$a_i = m \cdot 3^{\,i-1}\, 2^{\,k-i+1} - 1 \quad (1 \le i \le k), \qquad a_k = 2m \cdot 3^{\,k-1} - 1, \qquad B = m \cdot 3^k - 1.$$

Demostración. $\nu_2(A+1) = k$ da la altura por el Teorema 3.2; las fórmulas se obtienen aplicando $i-1$ (respectivamente k) veces el Lema 3.1 a $A+1 = m \cdot 2^k$. □

Observación 3.5. El número $2^k - 1$ es el menor impar con un tramo de altura k. Para $A = 127 = 2^7 - 1$ se obtiene un tramo de altura 7: los seis impares ascendentes $127, 191, 287, 431, 647, 971$, el impar de cierre 1457 y el par de cierre

$$B = 2186 = 3^7 - 1, \qquad \frac{2186+1}{127+1} = \frac{2187}{128} = \left(\frac{3}{2}\right)^7.$$

4. El paso de cierre y el balance de un tramo

Proposición 4.1 (Descenso en el cierre)**.** *Sea a_k el impar de cierre de un tramo, con $a_k > 1$. Entonces*

$$A' = U(a_k) \le \frac{3a_k + 1}{4} < a_k.$$

Si $a_k = 1$, entonces $A' = 1$.

Demostración. Por el Lema 2.4, $e = \nu_2(3a_k+1) \ge 2$, luego $A' = (3a_k+1)/2^e \le (3a_k+1)/4$, y $(3a_k+1)/4 < a_k$ equivale a $a_k > 1$. Para $a_k = 1$: $3 \cdot 1 + 1 = 4$ y $A' = 1$. □

La Proposición 4.1 compara el inicio del tramo siguiente con el *último* impar del tramo actual, no con el primero. El balance completo de un tramo se obtiene combinando los Teoremas 3.2 y 3.3.

Proposición 4.2 (Balance de un tramo)**.** *Con la notación de la Definición 2.5,*

$$A' = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^k (A+1) - 1}{2^v}, \qquad k = \nu_2(A+1), \quad v = \nu_2(B).$$

En consecuencia, $A' < A$ si y solo si $\left(\frac{3}{2}\right)^k (A+1) - 1 < 2^v A$, lo que, para A grande, equivale esencialmente a $3^k < 2^{\,k+v}$.

Demostración. Es inmediato a partir de $B+1 = \left(\frac{3}{2}\right)^k (A+1)$ y $A' = B/2^v$. □

Observación 4.3 (Los inicios de tramo no son monótonos). El crecimiento interno $(3/2)^k$ puede superar ampliamente la contracción 2^{-v} de la cola, de modo que la sucesión $A_0, A_1, A_2, \ldots$ de valores iniciales de tramos *no* es, en general, decreciente. En la trayectoria de 27 (Sección 7) los ocho primeros inicios son

$$27,\ 31,\ 121,\ 91,\ 103,\ 175,\ 445,\ 167,$$

con subidas en $27 \to 31$, $31 \to 121$, $91 \to 103$, $103 \to 175$ y $175 \to 445$. Por tanto, de la Proposición 4.1 no se deduce ninguna conclusión sobre la ausencia de ciclos no triviales ni sobre la convergencia: la cuestión de si $A' < A$ ocurre "con suficiente frecuencia" es exactamente la comparación entre 3^k y 2^{k+v} de la Proposición 4.2, que no es otra cosa que la dificultad original del problema expresada en términos de tramos.

5. Los triángulos $T(a)$

5.1. Construcción

Definición 5.1 (Triángulos $T(a)$)**.** Sean

$$f_{\mathrm{col}}(n) = 2n+1, \qquad f_{\mathrm{diag}}(n) = 3n+2.$$

Para cada *vértice* $a \geq 0$ con $a \equiv 0$ o $a \equiv 4 \pmod 6$, el triángulo $T(a)$ está formado por los números

$$x_{a,R,J} = f_{\mathrm{diag}}^{J}(f_{\mathrm{col}}^{R-J}(a)), \qquad R \geq 0,\ 0 \leq J \leq R.$$

El índice R es la *fila* y J la *posición* dentro de ella, ambos numerados desde 0. La primera columna ($J = 0$) se obtiene iterando f_{col} desde el vértice, y cada diagonal, iterando f_{diag}.

Ejemplo 5.2. Para $a = 0$ la primera columna es $0, 1, 3, 7, 15, \ldots$; la diagonal principal es $0, 2, 8, 26, 80, \ldots$, y la fila 3 es $7, 11, 17, 26$.

5.2. La coordenada $n+1$

Las dos funciones generadoras se vuelven multiplicaciones al desplazar en una unidad:

$$f_{\mathrm{col}}(n) + 1 = 2(n+1), \qquad f_{\mathrm{diag}}(n) + 1 = 3(n+1).$$

Por tanto

$$x_{a,R,J} + 1 = 2^{\,R-J}\, 3^{\,J}\, (a+1).$$

Además, $a \equiv 0, 4 \pmod 6$ equivale a $a+1 \equiv 1, 5 \pmod 6$, es decir, a que $a+1$ sea coprimo con 6.

Proposición 5.3 (Coordenadas en la familia)**.** *Todo entero $n \geq 0$ ocupa exactamente una posición en exactamente un triángulo. Concretamente, si*

$$n+1 = 2^{\alpha}\, 3^{\beta}\, u, \qquad \gcd(u, 6) = 1,$$

entonces $n = x_{u-1,\,\alpha+\beta,\,\beta}$: el número n está en el triángulo $T(u-1)$, en la fila $R = \alpha + \beta$ y en la posición $J = \beta = \nu_3(n+1)$.

Demostración. La descomposición $n + 1 = 2^{\alpha} 3^{\beta} u$ con u coprimo con 6 existe y es única por la factorización en primos. Como $u \equiv 1, 5 \pmod 6$, $a = u - 1$ es un vértice admisible, y $x_{a,\alpha+\beta,\beta} + 1 = 2^{\alpha} 3^{\beta} u = n + 1$. Recíprocamente, si $n = x_{a',R',J'}$, entonces $n + 1 = 2^{R'-J'} 3^{J'} (a' + 1)$ con $a' + 1$ coprimo con 6, y la unicidad de la descomposición fuerza $J' = \beta$, $R' = \alpha + \beta$ y $a' = u - 1$. □

Corolario 5.4 (Distancia a la diagonal)**.** *La distancia $R - J$ de un número a la diagonal de su triángulo es $\nu_2(n+1)$. Por tanto, en cualquier triángulo:*

- *la diagonal ($J = R$) contiene exactamente los números pares, que son los últimos elementos de las filas;*
- *la subdiagonal ($J = R - 1$) contiene exactamente los impares de forma de cierre $4n + 1$;*
- *las posiciones con $R - J \geq 2$ contienen exactamente los impares de forma ascendente $4n + 3$, y para un impar ascendente n la distancia $R - J$ es la altura del tramo que empieza en n.*

Demostración. Por la Proposición 5.3, $R - J = \alpha = \nu_2(n+1)$, que vale 0 si n es par, 1 si $n \equiv 1 \pmod 4$ y es ≥ 2 si $n \equiv 3 \pmod 4$. La última afirmación es el Teorema 3.2. □

Observación 5.5. Los vértices no son elecciones arbitrarias: son precisamente los enteros que no están en la imagen de f_{col} (que produce los impares) ni en la de f_{diag} (que produce los $\equiv 2 \pmod 3$). La familia es, por tanto, una partición de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ en triángulos, uno por cada u coprimo con 6; no sustituye al árbol inverso de Collatz, sino que proporciona un sistema de coordenadas en el que leer los tramos.

5.3. Cada tramo vive en una sola fila

Teorema 5.6 (Tramo y fila)**.** *Sea un tramo de altura k que empieza en A, y sea $A + 1 = 2^k 3^{j_0} u$ con $\gcd(u, 6) = 1$. Entonces todos los impares $a_1, \ldots, a_k$ del tramo y su par de cierre B pertenecen a la fila $R = k + j_0$ del triángulo $T(u-1)$, con*

$$a_i \text{ en la posición } j_0 + i - 1, \qquad B \text{ en la posición } j_0 + k = R.$$

Cada paso $n \mapsto \frac{3n+1}{2}$ del tramo es el avance $J \mapsto J + 1$ dentro de la fila. En particular, el tramo es la fila completa si $j_0 = 0$, y el final de la fila desde la posición j_0 si $j_0 \geq 1$.

Demostración. Por el Lema 3.1, cada paso multiplica $n + 1$ por $3/2$: resta 1 al exponente de 2, suma 1 al de 3 y deja u invariante, de modo que la fila $R = \alpha + \beta$ no cambia y la posición $J = \beta$ aumenta en una unidad. Se aplica la Proposición 5.3. □

Así, un tramo avanza a lo largo de una fila hasta su último elemento, el par de cierre, que está en la diagonal. Es la *cola 2-ádica* la que, en general, traslada la trayectoria a otro triángulo, y es ahí donde reside toda la complejidad de la dinámica. El teorema expresa, en esta notación, el resultado de [1] según el cual cada columna de la Tabla de Impares es una fila de la familia $T(a)$ o el final de una fila.

Ejemplo 5.7 (Trayectoria de 127)**.** El primer tramo ($A + 1 = 128 = 2^7$, $u = 1$) recorre la fila 7 del triángulo $T(0)$ hasta $B = 2186 = 3^7 - 1$, en la posición 7. La cola $2186 \to 1093$ lleva a 1093, con $1094 = 2 \cdot 547$: triángulo $T(546)$, fila 1, posición 0; es un tramo de altura 1, con par de cierre 1640 ($1641 = 3 \cdot 547$, misma fila). La cola $1640 \to 820 \to 410 \to 205$ ($v = 3$) lleva a 205, con $206 = 2 \cdot 103$: triángulo $T(102)$. Los términos 820 y 410 no forman un tramo: son los pasos intermedios de una cola.

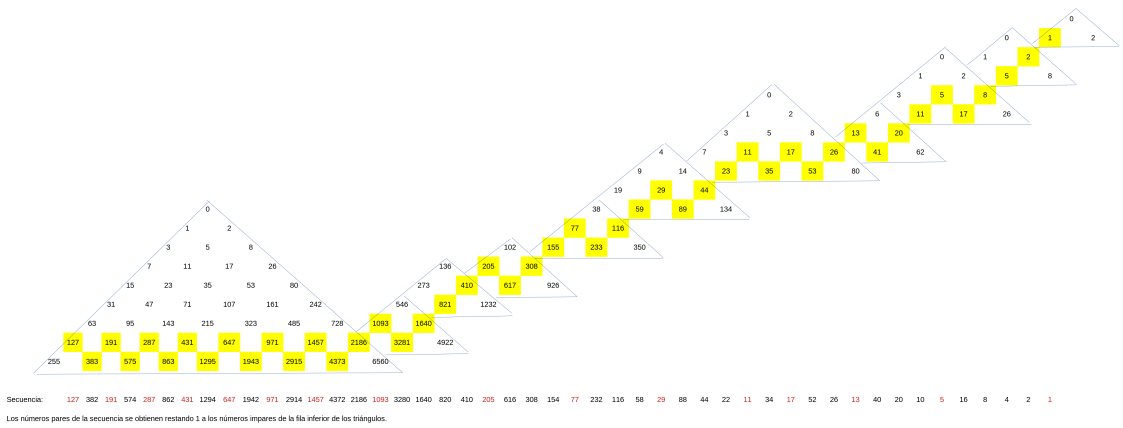

Figura 1: Trayectoria de 127 en los triángulos $T(a)$, generados mediante las funciones $2n+1$ y $3n+2$: cada tramo avanza a lo largo de una fila y cada cola traslada la trayectoria a otro triángulo.

6. Transiciones entre tramos

La altura del tramo siguiente es $\nu_2(A'+1)$ (Teorema 3.2), de modo que queda determinada por el residuo de A' módulo potencias de 2, y este, a su vez, por el del impar de cierre.

Proposición 6.1 (Transiciones módulo 16)**.** *Sea $n \equiv 1 \pmod 4$ un impar de cierre. Entonces:*

1. *si $n \equiv 1 \pmod{16}$: $\nu_2(3n+1) = 2$ y $U(n) \equiv 1 \pmod 4$; el tramo siguiente tiene altura exactamente 1;*
2. *si $n \equiv 9 \pmod{16}$: $\nu_2(3n+1) = 2$ y $U(n) \equiv 3 \pmod 4$; el tramo siguiente tiene altura al menos 2;*
3. *si $n \equiv 13 \pmod{16}$: $\nu_2(3n+1) = 3$;*
4. *si $n \equiv 5 \pmod{16}$: $\nu_2(3n+1) \geq 4$.*

Demostración. Con $n = 16t + r$:

$$\begin{aligned} r = 1: &\quad 3n+1 = 4(12t+1), \quad U(n) = 12t+1 \equiv 1 \pmod 4; \\ r = 9: &\quad 3n+1 = 4(12t+7), \quad U(n) = 12t+7 \equiv 3 \pmod 4; \\ r = 13: &\quad 3n+1 = 8(6t+5), \quad 6t+5 \text{ impar}; \\ r = 5: &\quad 3n+1 = 16(3t+1). \end{aligned}$$

Las alturas se siguen del Teorema 3.2. □

Residuo de n mód. 16	$\nu_2(3n+1)$	Tramo siguiente
1	2	altura exactamente 1
9	2	altura ≥ 2
13	3	depende de n mód. 32
5	≥ 4	depende de residuos superiores

Cuadro 1: Transiciones desde un impar de cierre $n \equiv 1 \pmod 4$.

Proposición 6.2 (Transición general)**.** *Sean $e \geq 1$ y $s \geq 1$. Para n impar, la condición $\nu_2(3n+1) = e$ depende solo de n* mód 2^{e+1} *y, cuando se cumple, el residuo de $U(n)$ módulo 2^s depende solo de n* mód 2^{e+s}*. En particular, la condición "el tramo siguiente tiene altura $\geq s$", es decir, $U(n) \equiv -1 \pmod{2^s}$, está determinada por n* mód 2^{e+s}*.*

Demostración. El residuo de $3n+1$ módulo 2^{e+s} depende solo del de n. La condición $\nu_2(3n+1) = e$ se lee en $3n+1$ mód 2^{e+1}, y, si se cumple, el residuo de $(3n+1)/2^e$ módulo 2^s se lee en $3n+1$ mód 2^{e+s}. □

Observación 6.3. Las transiciones son deterministas, pero cada tramo *consume* información binaria: predecir la altura de los tramos sucesivos exige conocer residuos de A módulo potencias de 2 cada vez mayores. El determinismo modular describe con exactitud cada transición individual, pero no proporciona por sí solo información sobre el comportamiento a largo plazo de la trayectoria.

7. Ilustración: la trayectoria de 27

La Tabla 2 recoge los ocho primeros tramos de la trayectoria de 27. En todos ellos se verifica la Proposición 4.1 ($a_k > A'$), la altura coincide con $\nu_2(A+1)$ y A y B están en la misma fila del mismo triángulo $T(a)$, $a = u - 1$, como predice el Teorema 5.6. A la vez, la columna A muestra que los inicios de tramo no forman una sucesión monótona (Observación 4.3).

A	$k = \nu_2(A+1)$	a_k	B	$\nu_2(3a_k+1)$	A'	$a = u - 1$
27	2	41	62	2	31	6
31	5	161	242	2	121	0
121	1	121	182	2	91	60
91	2	137	206	2	103	22
103	3	233	350	2	175	12
175	4	593	890	2	445	10
445	1	445	668	3	167	222
167	3	377	566	2	283	6

Cuadro 2: Ocho primeros tramos de la trayectoria de 27.

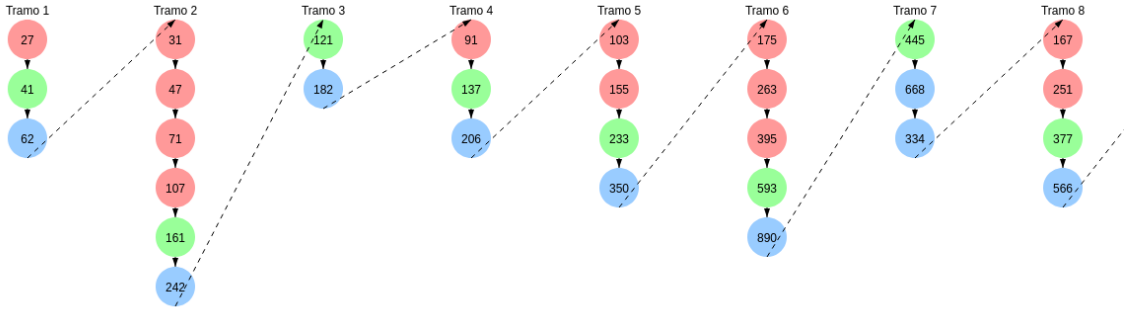

Figura 2: Segmentación en tramos de la trayectoria iniciada en 27: ocho primeros tramos. Los colores distinguen impares de tipo $4n+3$ (rojo), impares de tipo $4n+1$ (verde) y términos pares con sus colas 2-ádicas (azul).

8. Tramos colosales

El Teorema 3.2 no impone cota a la altura de un tramo: $A = m \cdot 2^k - 1$ con m impar da un tramo de altura k, que puede ser arbitrariamente grande (por ejemplo, $k = 10^9$). Recorrer ese tramo término a término es impracticable, pero no es necesario: el Corolario 3.4 da en forma cerrada todos sus términos, su impar de cierre $a_k = 2m \cdot 3^{k-1} - 1$ y su par de cierre $B = m \cdot 3^k - 1$. Un tramo colosal no es, por tanto, una indeterminación dinámica, sino un bloque algebraicamente cerrado, situado en una única fila del triángulo $T(u-1)$, donde u es la parte de m coprima con 3.

Lo que la forma cerrada no resuelve es la transición: el valor $v = \nu_2(B)$ de la cola, y con él la altura del tramo siguiente, depende de la aritmética de $m \cdot 3^k - 1$ módulo potencias de 2.

9. Conclusiones

1. Toda trayectoria de Collatz se descompone en tramos: cadenas de impares ascendentes cerradas por un impar $4n+1$, seguidas de una cola 2-ádica.

2. La altura de un tramo es exactamente $\nu_2(A+1)$, y sus extremos cumplen $(B+1)/(A+1) = (3/2)^k$; los tramos de cualquier altura admiten forma cerrada.

3. El paso de cierre produce siempre un descenso respecto del impar de cierre, $A' \leq (3a_k+1)/4 < a_k$; en cambio, los inicios de tramo no son monótonos, y el balance de un tramo completo depende de la comparación entre 3^k y 2^{k+v}.

4. En la coordenada $n+1$, la familia de triángulos $T(a)$ generada por $2n+1$ y $3n+2$ es la descomposición $n+1 = 2^\alpha 3^\beta u$ con $\gcd(u,6) = 1$: cada entero ocupa una única posición de un único triángulo, a distancia $\nu_2(n+1)$ de la diagonal, y cada tramo es una fila o el final de una fila.

5. Las transiciones entre tramos, que son las que cambian de triángulo, están determinadas por congruencias módulo potencias de 2, pero consumen información binaria en cada paso.

La segmentación en tramos desplaza la complejidad de la dinámica de Collatz desde la evolución interna, que queda completamente resuelta, hacia la concatenación de tramos a través de las colas 2-ádicas. Este escrito no pretende resolver esa segunda parte, que coincide con la dificultad original del problema, sino ofrecer un marco preciso en el que formularla.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Tramos impares y pares de Collatz: tablas y triángulos 2-ádicos*, Zenodo, 2026, https://doi.org/10.5281/zenodo.23857015.

[2] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem and its generalizations, *American Mathematical Monthly* **92** (1985), 3–23.

[3] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arithmetica* **30** (1976), 241–252.