El tiempo de parada por tramos: decrecimiento de densidad 1

Miguel Cerdá Bennassar

Capítulo 31, Sección 31.1 — Escrito IV
Junio de 2026; revisado en septiembre de 2026

Resumen

El Escrito III demostró que, bajo la medida de Haar, el drift por paso impar es $3/4 < 1$ para casi todo punto 2-ádico, pero dejó abierto (Problema 6.2 del Escrito III) el paso de la contracción *en media* a la contracción de cada órbita entera. Este escrito extrae de ese problema su *núcleo demostrable*: la densidad de impares cuya órbita cae por debajo de su valor inicial en un número finito de tramos es 1. La demostración pasa por los pasos impares —donde la suma de valuaciones admite una cota de Chernoff exacta sobre prefijos finitos, sin hipótesis de equidistribución— y el enunciado se expresa en tramos, gracias a que la primera caída ocurre siempre en una frontera de tramo. El resultado es el teorema de Terras–Everett, reformulado en las coordenadas de la serie y reproducido con demostración. Queda abierto el doble salto que sigue separando este hecho de la conjetura: de densidad 1 a *todo* n, y de un primer descenso a la convergencia total por iteración.

1. Posición en la serie

El drift del Escrito III es una afirmación promediada: bajo la medida de Haar vale para casi todo punto 2-ádico, pero los enteros forman un conjunto de medida nula y el teorema no dice nada de ninguno en particular. Sin embargo, una parte de esa afirmación *sí* se traslada a los enteros, y es la que este escrito aísla: que casi todo impar (densidad 1) desciende por debajo de sí mismo en pocos tramos. La clave es que este enunciado sólo involucra un *prefijo finito* de la órbita, sobre el que las densidades 2-ádicas son exactas; no requiere la equidistribución a largo plazo que permanece abierta.

2. El tiempo de parada por tramos

Dentro de un tramo los valores crecen, lo que localiza toda caída en sus fronteras.

Lema 2.1 (La primera caída ocurre en una frontera de tramo)**.** *Sea* $n_0 = m \cdot 2^K - 1$ *y* $n_i = (m \cdot 3^i)\, 2^{K-i} - 1$ *la subida del tramo (Escrito II). Entonces* $n_0 < n_1 < \ldots < n_{K-1}$. *En consecuencia, todo valor de la órbita estrictamente menor que el inicio de su tramo es un* inicio de tramo *(una imagen de reseteo): los valores internos de un tramo nunca bajan de su propio arranque.*

Demostración. $n_{i+1} = (3n_i + 1)/2 > n_i$ equivale a $n_i > -1$, cierto. Por tanto la subida es estrictamente creciente y el mínimo de cada tramo es su inicio. □

Definición 2.2 (Tiempo de parada por tramos)**.** Para un impar n, sea $\tau(n)$ el menor número de tramos tras el cual la órbita visita un inicio de tramo $< n$; si no existe, $\tau(n) = \infty$.

Observación 2.3 (Tramos para enunciar, pasos impares para demostrar). Por el Lema 2.1, el primer valor de la órbita menor que n es necesariamente un inicio de tramo; el tiempo de parada por pasos impares y el de la Definición 2.2 detectan, pues, el *mismo evento* en el *mismo punto*, y sólo difieren en el índice. Enunciaremos en tramos —la unidad de la serie— y demostraremos en pasos impares, donde la cota es limpia.

3. El núcleo: valuaciones en prefijos finitos y cota de Chernoff

Escribamos la órbita por pasos impares $n = n^{(0)}, n^{(1)}, \dots$, con $n^{(i+1)} = (3n^{(i)}+1)/2^{\,r_i}$, $r_i = \nu_2(3n^{(i)}+1)$. Tras L pasos,

$$n^{(L)} = \frac{3^L n + c_L}{2^{\,S_L}}, \qquad S_L = \sum_{i<L} r_i, \quad c_L \geq 1.$$

La condición de tamaño $n^{(L)} < n$ se cumple, para n suficientemente grande, en cuanto S_L supere $L \log_2 3$ —con un pequeño margen que absorbe el término aditivo c_L, formalizado en la prueba del Teorema 4.1—. Todo se reduce, pues, a controlar S_L.

Lema 3.1 (Ley exacta de las valuaciones en prefijos finitos)**.** *Bajo la medida de Haar μ sobre $\mathbb{Z}_2$ (equivalentemente, la densidad sobre clases residuales módulo 2^m cuando $m \to \infty$), el sistema de Syracuse es medible-isomorfo al desplazamiento de Bernoulli de dos símbolos mediante la codificación por paridades [3]. En esa codificación la sucesión de paridades es i.i.d. Bernoulli$(1/2)$, y las valuaciones $r_i = \nu_2(3n^{(i)}+1)$ son los* tiempos de espera *entre apariciones consecutivas del símbolo impar. Como tiempos de retorno en un shift Bernoulli, las r_i forman una sucesión i.i.d. geométrica de parámetro $1/2$, $\mu(r_i = j) = 2^{-j}$ $(j \geq 1)$, con media 2. En particular, para todo L, la ley conjunta de $(r_0, \dots, r_{L-1})$ es el producto geométrico exacto.*

El mecanismo es, pues, un teorema de renovación dentro de un shift Bernoulli, no un axioma: la independencia de las r_i se hereda de la de las paridades. El caso $L = 1$ se reduce al Lema de densidad del Cap. 15 (clase única módulo 2^{r+1}, densidad 2^{-r}). Y un punto esencial: la independencia es *respecto de la medida μ* —un promedio sobre puntos de arranque—, no a lo largo de una órbita determinista fija. Esta última, la equidistribución orbital, es justo lo que permanece abierto (§5); el presente argumento no la necesita, porque sólo emplea prefijos finitos, donde μ coincide con una densidad exacta de clases residuales.

Lema 3.2 (Cota de Chernoff de cola inferior)**.** *Para cualquier umbral $a \in (\log_2 3,\, 2)$ y $S_L = \sum_{i<L} r_i$,*

$$\mu\big(S_L \leq aL\big) \;\leq\; e^{-c(a)L}, \qquad c(a) = \sup_{\theta>0}\big(\log(2e^{\theta}-1) - \theta a\big) > 0.$$

Para $a = \log_2 3$ se obtiene $c \approx 0{,}0550$.

Demostración. Por el Lema 3.1 las r_i son i.i.d. respecto de μ, de modo que la desigualdad de Chernoff se aplica directamente, sin hipótesis de mezcla ni de martingala: para $\theta > 0$,

$$\mu(S_L \leq aL) \leq e^{\theta a L}\, \mathbb{E}_\mu[e^{-\theta S_L}] = \big(e^{\theta a}\, \mathbb{E}_\mu[e^{-\theta r}]\big)^L, \qquad \mathbb{E}_\mu[e^{-\theta r}] = \sum_{j\geq 1} \frac{e^{-\theta j}}{2^j} = \frac{1}{2e^{\theta}-1}.$$

Optimizando en θ ($e^{\theta^\star} = a/(2(a-1))$) se obtiene $c(a) > 0$ siempre que $a < \mathbb{E}_\mu[r] = 2$. □

4. Decrecimiento de densidad 1

Teorema 4.1 (Descenso de densidad 1)**.** *El conjunto de impares con $\tau(n) < \infty$ tiene densidad 1:* $\operatorname{dens}\{n \in \mathbb{N}_{\text{impar}} : \tau(n) < \infty\} = 1$.

Demostración. Fijemos un margen $\kappa \in (0,\, 2 - \log_2 3)$ y el umbral $a = \log_2 3 + \kappa < 2$. Sea $N_0(\kappa) = \dfrac{1}{3\kappa \log 2}$. Afirmamos que, para todo impar $n > N_0(\kappa)$, si $S_L > aL$ entonces $n^{(L)} < n$. En efecto, mientras la órbita no haya descendido por debajo de n se tiene $n^{(i)} \geq n$ (Lema 2.1), luego

$$\frac{n^{(L)}}{n} = \prod_{i<L} \frac{3 + 1/n^{(i)}}{2^{\,r_i}} \leq \frac{(3 + 1/n)^L}{2^{\,S_L}} = \Big(1 + \tfrac{1}{3n}\Big)^L \frac{3^L}{2^{\,S_L}} \leq e^{L/(3n)}\, 2^{-\kappa L},$$

usando $3^L/2^{S_L} \leq 2^{-\kappa L}$. Para $n > N_0(\kappa)$ se cumple $L/(3n) < \kappa L \log 2$, de modo que $e^{L/(3n)} < 2^{\kappa L}$ y $n^{(L)}/n < 1$.

Por contrarrecíproco, si $\tau(n) > L$ y $n > N_0(\kappa)$, entonces $S_L \leq aL$; luego, por el Lema 3.2, $\operatorname{dens}\big(\{\tau > L\} \cap \{n > N_0(\kappa)\}\big) \leq e^{-c(a)L}$. Como esto vale para todo L, $\operatorname{dens}\big(\{\tau = \infty\} \cap \{n > N_0(\kappa)\}\big) = 0$; y $\{n \leq N_0(\kappa)\}$ es finito, de densidad nula. Por tanto $\operatorname{dens}\{\tau = \infty\} = 0$. El descenso ocurre, además, en una frontera de tramo (Lema 2.1), de modo que el tiempo de parada por tramos es finito. □

Observación 4.2 (Sobre el margen κ y la corrección aditiva)*.* El margen $\kappa > 0$ es el que absorbe el término aditivo: gracias a $2^{S_L} \geq 3^L 2^{\kappa L}$, la cota $N_0(\kappa) = 1/(3\kappa \log 2)$ es *uniforme en* L, y el único conjunto excepcional es el finito $\{n \leq N_0(\kappa)\}$. No se invoca, pues, ninguna desigualdad asintótica delicada en la banda crítica $S_L \approx L \log_2 3$: el margen la evita por construcción, al precio de una tasa $c(a)$ algo menor que la de $a = \log_2 3$.

Observación 4.3 (Qué es exacto y qué no)*.* El drift del Escrito III está demostrado para casi todo punto 2-ádico, pero para las órbitas de los enteros sigue siendo una hipótesis. El Teorema 4.1, en cambio, es un enunciado sobre los enteros y **no** es heurístico: descansa sólo en densidades de clases residuales sobre prefijos finitos (Lema 3.1), que son exactas, y en una cota de Chernoff. Es el núcleo riguroso del drift trasladado a los enteros: lo que en el Escrito III es, para las órbitas enteras, una media respaldada por el cómputo, aquí es un teorema de densidad.

5. El problema abierto: de densidad 1 a todo n, y la iteración

Problema 5.1 (Los dos saltos que restan — ABIERTO)**.** El Teorema 4.1 demuestra el *primer descenso* para casi todo n. Para llegar a la conjetura de Collatz faltan dos pasos, ninguno cubierto por el argumento de densidad: (i) de densidad 1 a *todo* n, es decir, eliminar el conjunto excepcional; y (ii) de un descenso a la *convergencia total*, encadenando paradas sucesivas $\tau(n), \tau(n^{(\tau)}), \ldots$ hasta alcanzar 1. El salto (ii) requiere controlar la órbita a largo plazo —la equidistribución a lo largo de una trayectoria individual, no sólo sobre prefijos finitos— y reintroduce exactamente la dificultad que el conteo exacto evitaba.

Observación 5.2 (Lugar en el programa)*.* Este escrito aísla el núcleo riguroso del drift para los enteros —el descenso de densidad 1— y deja al descubierto el único obstáculo restante para la divergencia: la *iteración*. El primer descenso ya no es conjetura; lo que falta es que los descensos sucesivos no se agoten. El Escrito V formula esa iteración como un proceso de records y muestra que equivale a la acotación de la órbita.

A. Cómputo de la Tabla 1

El Algoritmo 1 itera el mapa de tramo Φ desde cada impar de arranque y registra el número de tramos hasta el primer inicio de tramo inferior al valor inicial. La primitiva auxiliar es la valuación $\nu_2(x) = \max\{e \geq 0 : 2^e \mid x\}$, con $\mathrm{odd}(x) = x/2^{\nu_2(x)}$; toda la aritmética es entera y exacta.

Algoritmo 1 Tiempo de parada por tramos $\tau(n)$ y su distribución acumulada.

Entrada: cota de arranque M (en la Tabla 1, $M = 2 \cdot 10^6$)
Salida: densidad acumulada de $\{\tau \leq t\}$

```
acum[·] ← 0;   total ← 0
para n ← 3, 5, 7, ..., M hacer
    K ← ν2(n+1);   m ← (n+1)/2^K;   t ← 0
    mientras (m, K) ≠ (1, 1) hacer
        s ← ν2(m·3^K − 1);   R ← (m·3^K − 1)/2^s
        K' ← ν2(R+1);   m' ← (R+1)/2^K';   t ← t+1
        si R < n entonces
            acum[t] ← acum[t] + 1; salir
        fin si
        (m, K) ← (m', K')
    fin mientras
    total ← total + 1
fin para
devolver densidad acumulada Σ_{t'≤t} acum[t']/total
```

$\tau \leq t$ (tramos)	densidad acumulada
1	0,714
2	0,860
3	0,912
4	0,940
5	0,958
8	0,984

Tabla 1: Densidad acumulada del tiempo de parada por tramos τ, por enumeración directa de los impares de $[3,\, 2 \cdot 10^6]$. La densidad tiende a 1 (Teorema 4.1); el descenso es rápido, con el 71,4 % ya en el primer tramo.

Referencias

[1] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. **30** (1976), 241–252.

[2] C. J. Everett, *Iteration of the number-theoretic function $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+2$*, Adv. Math. **25** (1977), no. 1, 42–45.

[3] J. C. Lagarias, *The $3x + 1$ problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), no. 1, 3–23.