El proceso de records, la deriva orbital y la acotación de las órbitas

Miguel Cerdá Bennassar

Junio de 2026; revisado en septiembre de 2026

Resumen

La Sección 31.5 demostró el *primer* descenso con densidad 1. La iteración —encadenar descensos hasta 1— es lo que resta, y esta sección la formula como un *proceso de records*: la sucesión estrictamente decreciente de mínimos $n > m_1 > m_2 > \cdots$ alcanzados en fronteras de tramo. Se enuncia, con referencia, la cota de descenso relativo de Korec, que lleva el método de prefijos finitos hasta n^θ con $\theta > \log_4 3$; se formula con cuidado la hipótesis de deriva orbital (H_{dr}), distinta de la ergodicidad 2-ádica, y se demuestra que (H_{dr}) equivale a que la órbita sea acotada. La equivalencia muestra que la reformulación por deriva no es un atajo, sino una descripción exacta de la mitad divergente del problema. La Sección 31.8 da una condición suficiente para (H_{dr}) en términos de frecuencias residuales módulo 8.

1. Posición en el capítulo

El Teorema de densidad 1 de la Sección 31.5 es una afirmación sobre el *arranque* n, promediada bajo la medida de Haar. Garantiza un descenso $n \to m_1 < n$, pero m_1 no es un arranque fresco: es una función determinista de la órbita de n. La conjetura equivale a iterar ese descenso hasta 1, y la pregunta es si los descensos sucesivos *re-aleatorizan*. El lenguaje natural es el de un proceso de renovación sobre la trayectoria, y aquí se usa para formular con precisión lo que falta. La Sección 5 recoge además la equivalencia entre deriva orbital y acotación, que en versiones anteriores del capítulo ocupaba una sección propia (31.7).

2. El proceso de records

Definición 2.1 (Records de la órbita)**.** Para un impar n, sea $m_0 = n$ y, recursivamente, m_k el primer inicio de tramo de la órbita estrictamente menor que m_{k-1} (Sección 31.5), mientras exista. Los m_k son los *records* (mínimos sucesivos).

Por ser enteros positivos estrictamente decrecientes, la sucesión $m_0 > m_1 > \cdots$ es finita y termina al estabilizarse el mínimo. La órbita alcanza 1 salvo que se detenga en un ciclo no trivial o no se estabilice (divergencia). Así:

$$\text{Conjetura de Collatz} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{el proceso de records de todo } n \text{ alcanza 1.}$$

Esta es una estructura de *épocas de escalera* de un paseo con deriva negativa: cada record es una nueva cota inferior, y el tamaño logarítmico desciende por saltos. La verificación computacional es compatible con una estructura de renovación: el número de records hasta 1 crece como $\log n$ (Tabla 1), con caída logarítmica media por record $\approx 1{,}02$. Se trata, por ahora, de evidencia experimental, no de una consecuencia demostrada del modelo.

3. Descenso relativo acotado: la cota de Korec

El método de prefijos finitos de la Sección 31.5 alcanza algo más que el descenso por debajo de n: Korec mostró que, extendiéndolo a prefijos de longitud $L \sim c \log n$ —donde la densidad excepcional $e^{-c'L} = n^{-\Theta(1)}$ sigue tendiendo a 0—, se obtiene descenso por debajo de una potencia de n.

Teorema 3.1 (Descenso relativo, Korec [2])**.** *Para todo $\theta > \log_4 3 = \dfrac{\log 3}{\log 4} \approx 0{,}7924$, el conjunto de impares cuya órbita alcanza un valor $< n^\theta$ tiene densidad* 1*.*

El resultado es de Korec [2]; no lo reproducimos aquí. El exponente $\log_4 3$ es donde el argumento de prefijos finitos *satura*: por debajo de n^θ la longitud de prefijo requerida deja de estar controlada por densidades exactas. La frontera de densidad fue después llevada más lejos por Tao [6] ("casi toda órbita alcanza valores casi acotados"), pero siempre *en densidad*, nunca por órbita.

Observación 3.2 (Hasta dónde llega lo demostrable)*.* Los Teoremas de 31.5 y 3.1, y aun el resultado de Tao, comparten techo: son afirmaciones de densidad sobre el arranque. Ninguno controla la *iteración* —qué ocurre cuando, tras $\sim \log n$ descensos, el record es una función intrincada de toda la historia de la órbita—. Ese es el contenido de (H).

4. La hipótesis de equidistribución orbital

Conviene formular (H) con cuidado, porque dos versiones naturales son inútiles. *No* sirve postular la existencia de una medida invariante absolutamente continua: el mapa de Syracuse ya preserva Haar sobre $\mathbb{Z}_2$ y es ergódico (Sección 31.5 y [3]), de modo que tal medida *existe* y es trivial; pero los enteros positivos son μ-nulos en $\mathbb{Z}_2$, y toda la dificultad de Collatz vive en ese hueco de medida cero. La hipótesis debe ser sobre las órbitas *enteras*, no sobre $\mathbb{Z}_2$, y conviene enunciarla como un promedio temporal a lo largo de la trayectoria.

Definición 4.1 (Equidistribución y deriva orbitales)**.** Para la órbita por pasos impares de n, con valuaciones $r_i = \nu_2(3n^{(i)} + 1)$:

(H_{eq}) *(equidistribución orbital)* la distribución empírica de $(r_i)_{i<L}$ converge, cuando $L \to \infty$, a la geométrica 2^{-j} —es decir, el promedio temporal a lo largo de la órbita iguala el promedio espacial bajo μ que la renovación del shift de Bernoulli (Sección 31.5) garantiza en promedio sobre arranques; igualdad que la ergodicidad en $\mathbb{Z}_2$ *no* asegura para los enteros (Observación 4.2)—;

(H_{dr}) *(deriva orbital negativa)* $\displaystyle\liminf_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{i<L} r_i > \log_2 3.$

(H_{eq}) implica (H_{dr}), pues la media geométrica es $2 > \log_2 3$.

Observación 4.2 (Por qué (H) no es la ergodicidad 2-ádica)*.* La ergodicidad de Birkhoff da el promedio temporal = espacial para μ-casi todo punto de $\mathbb{Z}_2$; pero "casi todo" excluye, en principio, precisamente al conjunto μ-nulo de los enteros. (H) afirma que los enteros *no* son excepcionales para esa igualdad. Es la diferencia exacta entre lo demostrado (ergodicidad en $\mathbb{Z}_2$) y lo abierto (Collatz).

5. Deriva orbital y acotación

Lema 5.1 (Deriva de un ciclo)**.** *Sea $a_0 \to a_1 \to \cdots \to a_{p-1} \to a_0$ un ciclo del mapa de Syracuse, de periodo p (pasos impares) y valuación total $S = \sum_{i<p} r_i$. Entonces $2^S > 3^p$ y, por tanto, $S/p > \log_2 3$.*

Demostración. Iterando p veces, $a_0 = (3^p a_0 + C)/2^S$ con $C \geq 1$ entero, pues cada paso aporta un término positivo procedente del "+1". Luego $2^S a_0 = 3^p a_0 + C > 3^p a_0$, de donde $2^S > 3^p$. Para el ciclo trivial, $p = 1$, $S = 2$ y $4 > 3$. □

Teorema 5.2 (Deriva orbital y acotación)**.** *Para la órbita de todo entero positivo impar n son equivalentes:*

1. *la órbita cumple (H_{dr});*
2. *la órbita es acotada;*
3. *la órbita es finalmente periódica.*

Demostración. (2)⇔(3): una órbita acotada de enteros toma un número finito de valores y es finalmente periódica; el recíproco es inmediato.

(1)⇒(2): supongamos que la órbita no es acotada. Entonces no repite ningún valor, luego visita cada entero a lo sumo una vez y $n^{(i)} \to \infty$. De la identidad exacta

$$n^{(L)} = n \prod_{i<L} \frac{3 + 1/n^{(i)}}{2^{r_i}}$$

se sigue

$$\log n^{(L)} = \log n + L \log 3 - \Big(\sum_{i<L} r_i\Big) \log 2 + \sum_{i<L} \log\Big(1 + \frac{1}{3n^{(i)}}\Big),$$

y el último sumatorio es $o(L)$, porque sus términos tienden a 0. Por (H_{dr}) existen $\varepsilon > 0$ y L_0 con $\sum_{i<L} r_i \geq L(\log_2 3 + 2\varepsilon)$ para $L \geq L_0$, de donde $\log n^{(L)} \leq \log n - \varepsilon L \log 2$ para L grande, y $n^{(L)} \to 0$, lo que es imposible.

(3)⇒(1): si la órbita entra, tras un transitorio finito, en un ciclo de periodo p y valuación total S, entonces $\frac{1}{L}\sum_{i<L} r_i \to S/p$, y $S/p > \log_2 3$ por el Lema 5.1. □

Observación 5.3 (La deriva no es un atajo)*.* El Teorema 5.2 muestra que (H_{dr}) no es una hipótesis más débil que la acotación desde la que se pudiera progresar con comodidad: es equivalente a ella. Demostrar (H_{dr}) para todo n es exactamente demostrar que ninguna órbita diverge. Su valor es de diagnóstico: identifica que el contenido que falta está en el comportamiento de las valuaciones a lo largo de la órbita, no en el balance de tamaño.

Observación 5.4 (Las dos mitades de la conjetura)*.* La conjetura de Collatz equivale a la conjunción de (A) toda órbita es acotada y (B) el único ciclo es $\{1\}$: si toda órbita es acotada, es finalmente periódica, y si además $\{1\}$ es el único ciclo, toda órbita alcanza 1. Por el Teorema 5.2, (A) equivale a (H_{dr}) para todo n. La mitad (B) es independiente de (H_{dr}): los ciclos de un solo circuito son los del Teorema de Steiner [4], extendido a m-circuitos para m pequeño por Simons y de Weger [5], y sus ecuaciones involucran a la vez m, K y s (Observación 4.5 de la Sección 31.3). En general, (B) sigue abierta.

Problema 5.5 (Abierto)**.** Demostrar (H_{dr}) para la órbita de todo entero positivo o, equivalentemente, que ninguna órbita diverge. La Sección 31.8 da una condición suficiente en términos de las frecuencias con que la órbita visita las clases residuales módulo 8.

Observación 5.6 (Lugar en el programa)*.* La estructura de tramo (31.3) da las coordenadas y la ley exacta de los pares (K_t, s_t) bajo Haar; el drift (31.4) describe su balance medio; el descenso de densidad 1 (31.5) demuestra el primer paso; y esta sección muestra que la iteración de los descensos es exactamente la acotación de la órbita, equivalente a (H_{dr}). La Sección 31.8 reduce (H_{dr}) a una desigualdad de frecuencias residuales a lo largo de la órbita.

A. Cómputo de la Tabla 1

El Algoritmo 1 itera el mapa de tramo Φ desde cada impar de arranque y cuenta los records (mínimos sucesivos de los inicios de tramo) hasta alcanzar 1. La primitiva auxiliar es $\nu_2(x) = \max\{e \geq 0 : 2^e \mid x\}$, con $\mathrm{odd}(x) = x/2^{\nu_2(x)}$; la aritmética es entera y exacta.

Algoritmo 1 Número de records hasta 1.

Entrada: impar de arranque n
Salida: número de records de la órbita de n

$K \leftarrow \nu_2(n+1)$; $\quad m \leftarrow (n+1)/2^K$
$\acute{\text{m}}\text{in} \leftarrow n$; $\quad \text{rec} \leftarrow 0$
mientras $(m, K) \neq (1, 1)$ **hacer**
  $s \leftarrow \nu_2(m \cdot 3^K - 1)$; $\quad R \leftarrow (m \cdot 3^K - 1)/2^s$
  $K' \leftarrow \nu_2(R+1)$; $\quad m' \leftarrow (R+1)/2^{K'}$
  si $R < \acute{\text{m}}\text{in}$ **entonces**
    $\acute{\text{m}}\text{in} \leftarrow R$; $\quad \text{rec} \leftarrow \text{rec} + 1$
  fin si
  $(m, K) \leftarrow (m', K')$
fin mientras
devolver rec

arranques en	#records (medio)	$\ln n$ (centro)	caída media por record
$[10^4, 2 \cdot 10^4)$	9,29	9,62	1,035
$[10^5, 2 \cdot 10^5)$	11,55	11,92	1,032
$[10^6, 2 \cdot 10^6)$	13,91	14,22	1,023
$[10^7, 2 \cdot 10^7)$	16,16	16,52	1,023
$[10^8, 2 \cdot 10^8)$	18,45	18,83	1,020
$[10^9, 2 \cdot 10^9)$	20,67	21,13	1,022

Tabla 1: Número medio de records hasta 1, sobre 8000 impares uniformes en cada intervalo. Crece linealmente en $\ln n$, lo que es compatible con un proceso de renovación; la caída logarítmica media por record, cociente entre la tercera y la segunda columna, es próxima a 1,02. Datos experimentales.

Referencias

[1] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. **30** (1976), 241–252.

[2] I. Korec, *A density estimate for the* $3x+1$ *problem*, Math. Slovaca **44** (1994), no. 1, 85–89.

[3] J. C. Lagarias, *The* $3x+1$ *problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), no. 1, 3–23.

[4] R. P. Steiner, *A theorem on the Syracuse problem*, Proc. 7th Manitoba Conference on Numerical Mathematics (1977), Utilitas Mathematica, Winnipeg, 553–559.

[5] J. Simons, B. de Weger, *Theoretical and computational bounds for m-cycles of the* $3n+1$ *problem*, Acta Arith. **117** (2005), no. 1, 51–70.

[6] T. Tao, *Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values*, Forum Math. Pi **10** (2022), e12.