Dinámica proyectada de los pares en el problema de Collatz

Ley de transición, forma cerrada y longitud exacta

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

Se estudia una proyección finita de la dinámica clásica de Collatz que conserva los términos pares, oculta los impares congruentes con 3 (mód 4) y se detiene en el primer impar congruente con 1 (mód 4). Sobre los pares visibles, la proyección queda gobernada por dos transformaciones elementales, $A \mapsto A/2$ y $A \mapsto 3A/2 + 1$, junto con una condición de absorción módulo 8. A partir de esta ley se obtiene una parametrización cerrada de todos los términos del bloque, una fórmula exacta para su longitud y una demostración directa de su finitud. Se obtiene además el mapa exacto entre bloques consecutivos, una clasificación residual de todas sus transiciones y la distribución 2-ádica de las longitudes de cualquier patrón finito de bloques. Se obtiene asimismo un criterio arquimediano exacto que decide el crecimiento del parámetro profundo entre dos bloques mediante la comparación de 3^k con una potencia de 2. Para las transiciones neutras se clasifica por completo el caso $t = 1$ y se obtiene una reducción diofántica explícita del primer caso no unitario $t = 3$. El bloque se descompone en una cola binaria inicial y la duplicación de una racha finita de impares de Collatz. Se incluye además el diccionario que relaciona esta descripción con la segmentación en tramos impares y con la función de descenso por tramos. Se distingue expresamente entre los resultados algebraicos demostrados y su interpretación, compatible con la teoría clásica de vectores de paridad.

1. Introducción

Sea $C : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la aplicación clásica de Collatz,

$$C(n) = \begin{cases} n/2, & n \equiv 0 \pmod 2, \\ 3n+1, & n \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

En una órbita de C, el objeto considerado aquí se obtiene conservando todos los pares, suprimiendo los impares congruentes con 3 (mód 4) y deteniendo la lectura en el primer impar congruente con 1 (mód 4).

El propósito es aislar la estructura algebraica exacta de esta proyección. No se pretende deducir de ella un mecanismo de descenso global ni un criterio nuevo de convergencia para la conjetura de Collatz. Los resultados son locales: describen completamente el bloque proyectado iniciado en un par dado.

El resultado principal es el Teorema 3.2. Si $A_0 = 2^s u$, con u impar, y $k = \nu_2(u+1)$, entonces todos los pares visibles, el impar terminal y la longitud del bloque se expresan de manera explícita en función de s, k y $t = (u+1)/2^k$. En particular, la finitud del bloque no depende de la conjetura de Collatz.

Todos los resultados se expresan bajo la aplicación clásica C. La Sección 7 traduce esta descripción al lenguaje de la segmentación en tramos impares, que usa la aplicación simplificada $T(n) = (3n+1)/2$ sobre los impares; conviene no mezclar ambos convenios, porque difieren en una división por 2 en cada paso impar.

2. Definición y ley de transición

Definición 2.1 (Bloque par proyectado)**.** Sea A_0 un entero positivo par y sea $x_0 = A_0$, $x_{j+1} = C(x_j)$ su órbita clásica. El *bloque par proyectado* iniciado en A_0 es la sucesión

$$\mathcal{P}(A_0) = (A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}; Q),$$

donde $A_0, \ldots, A_{r-1}$ son, en su orden orbital, todos los términos pares anteriores al primer término impar $Q \equiv 1 \pmod 4$. Los impares intermedios, necesariamente congruentes con 3 (mód 4), no se incluyen. El entero r es la *longitud par visible* del bloque.

La definición es una proyección de una porción de la órbita, no una iteración consecutiva de C sobre los elementos mostrados.

Proposición 2.2 (Ley local sobre los pares visibles)**.** *Sea A un término par visible. Entonces ocurre exactamente uno de los casos:*

$$\begin{aligned}
A \equiv 0, 4 \pmod 8 &\implies A_{\text{sig}} = A/2, && \text{que sigue siendo par,}\\
A \equiv 6 \pmod 8 &\implies A_{\text{sig}} = 3A/2 + 1, && \text{tras ocultar } A/2 \equiv 3 \pmod 4,\\
A \equiv 2 \pmod 8 &\implies Q = A/2 \equiv 1 \pmod 4, && \text{y el bloque termina.}
\end{aligned}$$

Demostración. Si $4 \mid A$, entonces $C(A) = A/2$ es par y permanece visible. Si $A \equiv 2 \pmod 4$, el número $u = A/2$ es impar. Para $A \equiv 2 \pmod 8$ se tiene $u \equiv 1 \pmod 4$, que es la condición de cierre. Para $A \equiv 6 \pmod 8$ se tiene $u \equiv 3 \pmod 4$; este impar se oculta y el siguiente término clásico es $C(u) = 3u + 1 = 3A/2 + 1$, que es par y vuelve a ser visible. □

Observación 2.3. La expresión $3A/2+1$ sólo se aplica en la clase $A \equiv 6 \pmod 8$. No define por sí sola una nueva versión global del mapa de Collatz.

3. Forma cerrada y finitud

Todo par A_0 se escribe de forma única como

$$A_0 = 2^s u, \qquad s = \nu_2(A_0) \geq 1, \qquad u \text{ impar.}$$

Escribimos además

$$u + 1 = 2^k t, \qquad k = \nu_2(u+1) \geq 1, \qquad t \text{ impar,}$$

y, para $0 \leq i \leq k-1$, definimos $u_i = 3^i 2^{k-i} t - 1$.

Lema 3.1 (Racha impar asociada)**.** *Se tiene $u_0 = u$ y*

$$\frac{3u_i + 1}{2} = u_{i+1} \qquad (0 \leq i \leq k-2).$$

Además,

$$u_i \equiv 3 \pmod 4 \quad (0 \leq i \leq k-2), \qquad u_{k-1} \equiv 1 \pmod 4.$$

Demostración. La recurrencia se obtiene sustituyendo la definición de u_i. Para $i \leq k-2$, el factor 2^{k-i} es divisible por 4, de modo que $u_i \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$. Para $i = k-1$, $u_{k-1} = 2 \cdot 3^{k-1} t - 1 \equiv 1 \pmod 4$. □

Teorema 3.2 (Descripción cerrada del bloque)**.** *Sea $A_0 = 2^s u$, donde u es impar, y sea $u+1 = 2^k t$, donde t es impar. Entonces*

$$\boxed{\mathcal{P}(A_0) = \left(\underbrace{A_0, \frac{A_0}{2}, \ldots, \frac{A_0}{2^{s-1}}}_{s \text{ pares}}, \underbrace{2u_1, 2u_2, \ldots, 2u_{k-1}}_{k-1 \text{ pares}}; u_{k-1} \right),}$$

donde $u_i = 3^i 2^{k-i} t - 1$. Si $k = 1$, el segundo bloque de pares es vacío. En particular,

$$Q = u_{k-1} = 2 \cdot 3^{k-1} t - 1$$

y la longitud par visible es

$$\boxed{r = s + k - 1 = \nu_2(A_0) + \nu_2(u+1) - 1.}$$

Demostración. Las primeras s entradas pares son $A_0, A_0/2, \ldots, 2u$. Al dividir $2u$ aparece $u = u_0$. Si $k = 1$, entonces $u \equiv 1 \pmod 4$ y $u = Q$. Si $k \geq 2$, el Lema 3.1 muestra que $u_0 \equiv 3 \pmod 4$ y se oculta. El siguiente término es $3u_0 + 1 = 2u_1$, par y visible. El argumento se repite para $u_1, \ldots, u_{k-2}$. Finalmente, al dividir $2u_{k-1}$ aparece $Q = u_{k-1} \equiv 1 \pmod 4$. El recuento da $r = s + k - 1$. □

Corolario 3.3 (Finitud incondicional)**.** *Todo bloque par proyectado es finito. Esta afirmación es algebraica y no presupone la conjetura de Collatz.*

Corolario 3.4 (Parametrización)**.** *Fijados $s \geq 1$ y $k \geq 1$, los pares con cola binaria inicial de longitud s y fase proyectada de longitud $k-1$ son exactamente*

$$A_0 = 2^s(2^k t - 1), \qquad t \geq 1 \text{ impar.}$$

4. Ejemplos

Ejemplo 4.1 (Bloque decreciente)**.** Para $A_0 = 20 = 2^2 \cdot 5$ se tiene $s = 2$, $u = 5$ y $k = \nu_2(6) = 1$. Así,

$$\mathcal{P}(20) = (20, 10; 5), \qquad r = 2.$$

Ejemplo 4.2 (Bloque creciente)**.** Para $A_0 = 382 = 2 \cdot 191$ se tiene $s = 1$ y $191 + 1 = 2^6 \cdot 3$. Por tanto $k = 6$, $t = 3$ y $r = 6$. El teorema da

$$\mathcal{P}(382) = (382, 574, 862, 1294, 1942, 2914; 1457).$$

Los impares ocultos son $191, 287, 431, 647, 971$, mientras que $1457 \equiv 1 \pmod 4$ es el cierre.

Ejemplo 4.3 (Cola binaria seguida de crecimiento)**.** Para $A_0 = 1528 = 2^3 \cdot 191$, el núcleo impar es el mismo que en el ejemplo anterior, pero $s = 3$. Así,

$$\mathcal{P}(1528) = (1528, 764, 382, 574, 862, 1294, 1942, 2914; 1457)$$

y $r = 3 + 6 - 1 = 8$.

5. Estructura y monotonía

El Teorema 3.2 separa canónicamente el bloque en:

(I) una *cola binaria* de $s = \nu_2(A_0)$ pares, obtenida por divisiones sucesivas por 2;

(II) una *fase impar proyectada* de $k-1$ pares, obtenida al duplicar los términos posteriores de la racha $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$.

La cola binaria es estrictamente decreciente. Durante la fase proyectada,

$$2u_{i+1} = 3u_i + 1 > 2u_i$$

para todo i, de modo que esa fase es estrictamente creciente. Los bloques aparentemente irregulares concatenan una fase decreciente y otra creciente.

Proposición 5.1 (Relación entre cierre e inicio)**.** *Con la notación anterior,*

$$\frac{Q+1}{A_0+2^s} = \frac{2\cdot 3^{k-1}t}{2^s\cdot 2^k t} = \frac{3^{k-1}}{2^{s+k-1}}.$$

Demostración. Basta sustituir $Q+1 = 2\cdot 3^{k-1}t$ y $A_0+2^s = 2^s(u+1) = 2^{s+k}t$. □

6. Dinámica entre bloques consecutivos

Consideremos un bloque con parámetros

$$A_0 = 2^s(2^k t - 1), \qquad s,k \geq 1, \qquad t \text{ impar.}$$

Por el Teorema 3.2, su cierre es

$$Q = 2\cdot 3^{k-1}t - 1.$$

Como $Q \equiv 1 \pmod 4$, la aplicación clásica de Collatz produce primero el par visible

$$A_0^+ = 3Q+1 = 2(3^k t - 1).$$

Introducimos también la cantidad auxiliar

$$B = \frac{3Q+1}{2} = 3^k t - 1.$$

El bloque siguiente empieza en A_0^+, no en B.

Proposición 6.1 (Pérdida de la cola inicial)**.** *El bloque siguiente depende únicamente del par (k,t) y no del parámetro $s = \nu_2(A_0)$ del bloque anterior. Más precisamente,*

$$\boxed{A_0^+ = 2(3^k t - 1).}$$

Demostración. La fórmula se obtiene sustituyendo $Q = 2\cdot 3^{k-1}t - 1$ en $3Q+1$. El parámetro s no aparece en el resultado. □

Descomponemos ahora B de forma única como

$$3^k t - 1 = 2^a u^+, \qquad u^+ = 2^b t^+ - 1,$$

donde $a,b \geq 1$ y t^+ es impar.

Teorema 6.2 (Transición exacta entre bloques)**.** *Los parámetros del bloque siguiente vienen determinados por*

$$\boxed{A_0^+ = 2^{a+1}(2^b t^+ - 1),}$$

por lo que los parámetros reales del bloque sucesor son

$$s^+ = a + 1, \qquad k^+ = b,$$

con

$$a = \nu_2(3^k t - 1),$$
$$b = \nu_2\left(\frac{3^k t - 1}{2^a} + 1\right),$$

y

$$t^+ = \frac{\dfrac{3^k t - 1}{2^a} + 1}{2^b}.$$

En consecuencia, la dinámica de bloques admite la reducción de estado

$$(k, t) \longmapsto (s^+, k^+, t^+) = (a + 1, b, t^+).$$

Demostración. La primera valuación extrae la potencia exacta de 2 de B. Puesto que $A_0^+ = 2B$, la valuación del inicio visible aumenta en una unidad. El cociente impar es u^+, y la segunda valuación descompone $u^+ + 1$ como $2^b t^+$. □

Proposición 6.3 (Cola estructural de los bloques sucesores)**.** *Todo bloque que no sea el primero de la órbita considerada satisface*

$$\boxed{s \geq 2.}$$

Demostración. Todo inicio sucesor es $3Q+1$ con $Q \equiv 1 \pmod 4$, luego $3Q+1 \equiv 0 \pmod 4$. Equivalentemente, $s^+ = a + 1 \geq 2$. □

Por ejemplo, para $A_0 = 382$ se obtiene $Q = 1457$ y $A_0^+ = 4372 = 2^2 \cdot 1093$. En cambio, $B = 2186$ tiene valuación $a = 1$: la unidad adicional pertenece al inicio visible real.

6.1. Clasificación residual de las transiciones

Teorema 6.4 (Clase residual de una transición)**.** *Fijemos $k \geq 1$ y dos enteros $a, b \geq 1$. Para t impar, el bloque siguiente satisface*

$$s^+ = a + 1, \qquad k^+ = b$$

si y sólo si

$$\boxed{t \equiv 3^{-k}\left(1 - 2^a + 2^{a+b}\right) \pmod{2^{a+b+1}}.}$$

Aquí 3^{-k} denota el inverso de 3^k módulo 2^{a+b+1}.

Demostración. La ecuación de transición puede escribirse como

$$3^k t = 1 - 2^a + 2^{a+b} t^+.$$

Si $s^+ = a + 1$, $k^+ = b$ y t^+ es impar, entonces

$$3^k t \equiv 1 - 2^a + 2^{a+b} \pmod{2^{a+b+1}},$$

lo cual da la congruencia anunciada porque 3^k es invertible módulo una potencia de 2.

Recíprocamente, supongamos que se cumple esa congruencia. Entonces existe un impar w tal que

$$3^k t = 1 - 2^a + 2^{a+b} w.$$

Por tanto,

$$3^k t - 1 = 2^a (2^b w - 1).$$

El factor $2^b w - 1$ es impar, de modo que $\nu_2(3^k t - 1) = a$. Además,

$$(2^b w - 1) + 1 = 2^b w$$

tiene valuación exacta b. En consecuencia, $s^+ = a + 1$, $k^+ = b$ y $t^+ = w$. □

Corolario 6.5 (Densidad de una transición)**.** *Para k fijo, la densidad relativa entre los enteros impares t que producen $(s^+, k^+) = (a + 1, b)$ es*

$$\boxed{\delta_k(a, b) = 2^{-(a+b)}.}$$

Esta densidad no depende de k.

Demostración. Módulo 2^{a+b+1} existen 2^{a+b} clases impares y el Teorema 6.4 selecciona exactamente una. □

6.2. Distribución exacta de la longitud siguiente

Sea

$$L^+ = s^+ + k^+ - 1 = a + b$$

la longitud par visible del bloque siguiente.

Corolario 6.6 (Ley de la longitud)**.** *Se tiene $\Pr(L^+ = 1) = 0$. Para todo $m \geq 2$, la densidad relativa entre los parámetros impares t que producen $L^+ = m$ es*

$$\boxed{\Pr(L^+ = m) = \frac{m - 1}{2^m}.}$$

Su función generadora, esperanza y varianza son, respectivamente,

$$\sum_{m \geq 2} \frac{m - 1}{2^m} z^m = \frac{z^2}{(2 - z)^2}, \qquad \mathbb{E}(L^+) = 4, \qquad \mathrm{Var}(L^+) = 4.$$

Demostración. La igualdad $L^+ = m$ equivale a

$$(a, b) = (1, m - 1), (2, m - 2), \ldots, (m - 1, 1).$$

Hay $m - 1$ posibilidades y cada una tiene densidad 2^{-m} por el Corolario 6.5. Las demás fórmulas se obtienen a partir de la serie $\sum_{m \geq 1} m x^m = x/(1 - x)^2$. □

6.3. Criterio arquimediano de crecimiento

La ecuación auxiliar del Teorema 6.2 puede reescribirse como

$$2^{a+b} t^+ = 3^k t + 2^a - 1.$$

Poniendo $L^+ = a + b = s^+ + k^+ - 1$, resulta

$$\boxed{t^+ - t = \frac{(3^k - 2^{L^+}) t + 2^a - 1}{2^{L^+}}.}$$

Teorema 6.7 (Criterio exacto de crecimiento)**.** *En toda transición entre bloques se cumple*

$$\boxed{t^+ > t \quad \Longleftrightarrow \quad 3^k > 2^{L^+}.}$$

Si $3^k < 2^{L^+}$*, entonces* $t^+ \le t$*, y la igualdad sólo puede ocurrir cuando*

$$\boxed{t\left(2^{a+b} - 3^k\right) = 2^a - 1.}$$

Demostración. Si $3^k > 2^{L^+}$, el numerador de la expresión de $t^+ - t$ es positivo.

Supongamos ahora que $3^k < 2^{L^+}$. Si $t^+ > t$, tendríamos

$$2^{L^+}(t^+ - t) = 2^a - 1 - (2^{L^+} - 3^k)t.$$

El miembro derecho sería positivo, pero también satisfaría

$$0 < 2^a - 1 - (2^{L^+} - 3^k)t < 2^a < 2^{L^+}.$$

Esto es imposible, porque el miembro izquierdo es un múltiplo positivo de 2^{L^+}. Por consiguiente, $t^+ \le t$. La igualdad se obtiene anulando el numerador. Finalmente, $3^k = 2^{L^+}$ es imposible. □

Corolario 6.8 (Criterio mediante la longitud siguiente)**.** *Sea* $L^+ = s^+ + k^+ - 1$ *la longitud par visible del bloque siguiente. Entonces*

$$\boxed{t^+ > t \quad \Longleftrightarrow \quad L^+ < k\log_2 3 \quad \Longleftrightarrow \quad L^+ \le \lfloor k\log_2 3 \rfloor.}$$

Demostración. La primera equivalencia es el Teorema 6.7 tras tomar logaritmos y usar $L^+ = a + b$. Como $\log_2 3$ es irracional, $k\log_2 3$ no es entero, lo que proporciona la segunda equivalencia. □

Corolario 6.9 (Densidad condicionada de crecimiento)**.** *Sea*

$$r_k = \lfloor k\log_2 3 \rfloor.$$

La densidad relativa entre los parámetros impares t *que satisfacen* $t^+ > t$*, condicionado el valor de* k*, es*

$$\boxed{\Pr(t^+ > t \mid k) = 1 - \frac{r_k + 1}{2^{r_k}}.}$$

Demostración. Por el Corolario 6.8, hay crecimiento exactamente para $2 \le L^+ \le r_k$. Aplicando el Corolario 6.6,

$$\Pr(t^+ > t \mid k) = \sum_{m=2}^{r_k} \frac{m-1}{2^m} = 1 - \frac{r_k + 1}{2^{r_k}}.$$

Para $k = 1$ se tiene $r_1 = 1$ y el rango de la suma es vacío; la fórmula cerrada da también 0, de acuerdo con el hecho de que $3 < 2^{L^+}$ para todo $L^+ \ge 2$. □

k	$r_k = \lfloor k\log_2 3 \rfloor$	$\Pr(t^+ > t \mid k)$
1	1	0
2	3	1/2
3	4	11/16
4	6	57/64
5	7	15/16
6	9	251/256

Proposición 6.10 (Aproximación multiplicativa)**.** *En toda transición se tiene*

$$\frac{t^+}{t} = \frac{3^k}{2^{a+b}} + \frac{2^a - 1}{2^{a+b}t},$$

y, en particular,

$$\boxed{\frac{3^k}{2^{a+b}} < \frac{t^+}{t} < \frac{3^k}{2^{a+b}} + \frac{1}{2^b t}.}$$

Demostración. La identidad se obtiene dividiendo $2^{a+b}t^+ = 3^k t + 2^a - 1$ por $2^{a+b}t$. Para la cota superior se usa $0 < 2^a - 1 < 2^a$. □

6.4. Transiciones neutras

El caso $t^+ = t$ conduce, en las coordenadas auxiliares $a = s^+ - 1$ y $b = k^+$, a la ecuación diofántica

$$\boxed{t\left(2^{a+b} - 3^k\right) = 2^a - 1,} \tag{1}$$

con $k, a, b \geq 1$ y t impar positivo. No es en general la ecuación de un solo circuito, pues no se exige $b = k$; expresa únicamente que el parámetro profundo t permanece constante mientras puede cambiar el parámetro k.

Si se impone además $b = k$, coincide con la ecuación clásica de los 1-circuitos. El teorema de Steiner afirma que su única solución positiva es $(a, k, t) = (1, 1, 1)$; su demostración usa aproximaciones continuas y cotas efectivas de tipo Baker, no una observación elemental [3, 2].

Observación 6.11 (Evidencia computacional). Una búsqueda exhaustiva en el rango

$$1 \leq k, a, b \leq 100$$

encuentra solamente las soluciones

$$(k, a, b, t) = (1, 1, 1, 1), \qquad (2, 3, 1, 1), \qquad (3, 4, 1, 3).$$

Este cálculo no demuestra que sean las únicas soluciones positivas de (1). La clasificación completa de la ecuación queda como problema abierto dentro de este enfoque.

6.4.1. Reducción a divisores de Mersenne

Para analizar (1), conservamos la notación auxiliar

$$a = s^+ - 1, \qquad b = k^+, \qquad d = 2^{a+b} - 3^k.$$

Proposición 6.12 (Reducción divisoria)**.** *Una cuádrupla (k, a, b, t), con $k, a, b \geq 1$ y t impar positivo, satisface la ecuación de transición neutra si y sólo si*

$$\boxed{d = 2^{a+b} - 3^k > 0, \qquad d \mid 2^a - 1, \qquad t = \frac{2^a - 1}{d}.}$$

Además, toda solución satisface la divisibilidad adicional

$$\boxed{d \mid 3^k - 2^b,}$$

y, por consiguiente,

$$d \mid \gcd(2^a - 1, 3^k - 2^b).$$

Demostración. La primera equivalencia es una reescritura directa de (1). Si $d \mid 2^a - 1$, entonces $2^a \equiv 1 \pmod{d}$ y

$$2^{a+b} \equiv 2^b \pmod{d}.$$

Por la definición de d, también se tiene $2^{a+b} \equiv 3^k \pmod{d}$. En consecuencia, $3^k \equiv 2^b \pmod{d}$, que prueba la divisibilidad adicional. □

Corolario 6.13 (Ventana diofántica)**.** *Toda transición neutra satisface*

$$\boxed{2^{a+b} - 2^a + 1 \le 3^k < 2^{a+b},}$$

y, equivalentemente,

$$\boxed{1 - 2^{-b} + 2^{-(a+b)} \le \frac{3^k}{2^{a+b}} < 1.}$$

Demostración. Por la Proposición 6.12, d es un divisor positivo de $2^a - 1$; por tanto,

$$1 \le d \le 2^a - 1.$$

Sustituyendo $d = 2^{a+b} - 3^k$ se obtiene la primera doble desigualdad. La segunda resulta al dividir por 2^{a+b}. □

La ventana del Corolario 6.13 muestra que una transición neutra exige una aproximación por debajo entre una potencia de 3 y una potencia de 2. La anchura relativa de la ventana es menor que 2^{-b}, por lo que la restricción se vuelve especialmente fuerte cuando crece el parámetro siguiente $b = k^+$.

Esta observación sugiere una vía cuantitativa. Si $\Delta = (a+b) - k \log_2 3$, la ventana anterior da $0 < \Delta \ll 2^{-b}$. Una cota efectiva de medida de irracionalidad para $\log_2 3$ da, por otra parte, $\Delta \gg k^{1-\mu}$ para algún $\mu < \infty$. Al combinar ambas desigualdades se obtiene

$$b \le (\mu - 1) \log_2 k + O(1).$$

Por tanto, b sólo puede crecer logarítmicamente con k. Esta dirección no cierra por sí sola la clasificación: para convertirla en una comprobación finita hace falta además acotar k o explotar las restricciones divisorias.

6.4.2. Clasificación del caso $d = 1$

Proposición 6.14 (Diferencia unitaria)**.** *La única solución de la ecuación neutra con*

$$2^{a+b} - 3^k = 1$$

es

$$\boxed{(k, a, b, t) = (1, 1, 1, 1).}$$

Demostración. Sea $n = a + b \ge 2$. Si $n \ge 3$, la igualdad $2^n = 3^k + 1$ es imposible módulo 8: el miembro izquierdo es congruente con 0, mientras que $3^k + 1$ es congruente con 4 si k es impar y con 2 si k es par. Por tanto, $n = 2$. Como $a, b \ge 1$, necesariamente $a = b = 1$, y $4 - 3^k = 1$ implica $k = 1$. Finalmente, $t = (2^a - 1)/d = 1$. □

6.4.3. Clasificación completa del caso $t = 1$

Si $t = 1$, la ecuación neutra adopta la forma

$$3^k = 2^a(2^b - 1) + 1. \tag{2}$$

Teorema 6.15 (Clasificación del caso $t = 1$)**.** *Las únicas soluciones positivas de* (2) *son*

$$\boxed{(k, a, b, t) = (1, 1, 1, 1), \qquad (2, 3, 1, 1).}$$

Demostración. Reducimos (2) módulo 3. Si b fuese par, entonces $2^b - 1 \equiv 0 \pmod 3$ y el miembro derecho sería congruente con 1, una contradicción. Por tanto, b es impar y $2^b - 1 \equiv 1 \pmod 3$. La divisibilidad por 3 exige entonces $2^a \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$, de modo que a también es impar.

Si $b = 1$, la ecuación se reduce a

$$3^k = 2^a + 1.$$

Para $a = 1$ se obtiene $k = 1$, mientras que $a = 2$ no produce solución. Si $a \geq 3$, la reducción módulo 8 obliga a que k sea par. Escribiendo $k = 2h$,

$$(3^h - 1)(3^h + 1) = 2^a.$$

Los dos factores son potencias de 2 consecutivas a distancia 2; por tanto, deben ser 2 y 4. Así, $h = 1$, $k = 2$ y $a = 3$.

Supongamos ahora que $b > 1$. Como $2^b - 1$ es impar, la ecuación (2) da exactamente

$$a = \nu_2(3^k - 1).$$

Si k es impar, el lema de elevación del exponente proporciona $\nu_2(3^k - 1) = 1$, de modo que $a = 1$ y

$$3^k = 2^{b+1} - 1.$$

Como b es impar y $b > 1$, al reducir módulo 8 el miembro izquierdo es 3 y el derecho es 7, una contradicción. Por tanto, k es par.

Escribamos

$$k = 2^r q, \qquad q \text{ impar}, \qquad r \geq 1.$$

Por elevación del exponente,

$$a = \nu_2(3^k - 1) = 2 + \nu_2(k) = r + 2.$$

Como a es impar, r también es impar. Pongamos

$$x = 3^{k/2}, \qquad U = \frac{x - 1}{2}, \qquad V = \frac{x + 1}{2}.$$

Los enteros U y V son consecutivos y coprimos, y satisfacen

$$UV = 2^r(2^b - 1). \tag{3}$$

Si $r = 1$, entonces $k/2 = q$ es impar y $x \equiv 3 \pmod 8$. En consecuencia, U es impar y $\nu_2(V) = 1$. Existen por tanto enteros impares positivos d, e tales que

$$U = d, \qquad V = 2e, \qquad de = 2^b - 1.$$

La igualdad $V - U = 1$ da $d = 2e - 1$, y así

$$2^b = 2e^2 - e + 1.$$

Multiplicando por 8 obtenemos

$$2^{b+3} = (4e-1)^2 + 7.$$

Como b es impar, $b+3$ es par. Si

$$z = 2^{(b+3)/2}, \qquad y = 4e-1,$$

entonces

$$(z-y)(z+y) = 7.$$

Los dos factores son enteros positivos, luego necesariamente son 1 y 7. De aquí $z = 4$, por lo que $b = 1$, contradiciendo $b > 1$.

Resta el caso $r \geq 3$. Ahora $k/2$ es par, $x \equiv 1 \pmod 8$ y

$$\nu_2(x-1) = 2 + \nu_2(k/2) = r+1.$$

Por (3) existen enteros impares positivos d, e tales que

$$U = 2^r e, \qquad V = d, \qquad de = 2^b - 1.$$

Como $V - U = 1$, se tiene $d = 2^r e + 1$, de modo que

$$2^b = 2^r e^2 + e + 1.$$

Multiplicando por 2^{r+2} y completando un cuadrado resulta

$$2^{b+r+2} = \left(2^{r+1}e + 1\right)^2 + 2^{r+2} - 1.$$

Los enteros b y r son impares, por lo que

$$m = \frac{b+r+2}{2}$$

es entero. Si $Y = 2^{r+1}e + 1$, la igualdad anterior se factoriza como

$$(2^m - Y)(2^m + Y) = 2^{r+2} - 1. \tag{4}$$

Ambos factores de la izquierda son positivos. Como son divisores complementarios del entero positivo $2^{r+2} - 1$, su suma satisface

$$2^{m+1} = (2^m - Y) + (2^m + Y) \leq 1 + (2^{r+2} - 1) = 2^{r+2}.$$

Por tanto, $2^m \leq 2^{r+1}$. Sin embargo, la positividad del primer factor en (4) exige

$$2^m > Y = 2^{r+1}e + 1 > 2^{r+1},$$

una contradicción. No hay soluciones con $b > 1$, y la clasificación queda demostrada. □

Observación 6.16. La clasificación anterior es enteramente elemental una vez reducida la ecuación a los factores consecutivos $(3^{k/2} - 1)/2$ y $(3^{k/2} + 1)/2$. En particular, no se utiliza la ausencia de soluciones en una búsqueda finita.

Observación 6.17 (Situación en la literatura). Escrita en la forma equivalente $3^k - 1 = 2^a(2^b - 1)$, la ecuación (2) pide que la parte impar de $3^k - 1$ sea un número de Mersenne. El exponente a queda determinado por k mediante el lema de elevación del exponente,

$$a = \nu_2(3^k - 1) = \begin{cases} 1, & k \text{ impar}, \\ 2 + \nu_2(k), & k \text{ par}, \end{cases}$$

de modo que los exponentes libres son en realidad dos. Cuando además $b = k$, la ecuación es el caso $t = 1$ de la ecuación de los 1-circuitos estudiada por Steiner [3]. No hemos encontrado en la bibliografía consultada una clasificación explícita del caso general con $b \neq k$.

6.4.4. Primer caso no unitario: $t = 3$

Para $t = 3$, la ecuación neutra se convierte en

$$3^{k+1} = 2^a(3 \cdot 2^b - 1) + 1. \tag{5}$$

Proposición 6.18 (Reducción del caso $t = 3$)**.** *Toda solución positiva de (5) satisface*

$$\boxed{k + 1 = 2^r q, \qquad q \text{ impar}, \qquad r \geq 2 \text{ par}, \qquad a = r + 2.}$$

Además, existe un entero impar positivo e tal que

$$\boxed{3 \cdot 2^b = 2^r e^2 + e + 1.} \tag{6}$$

En el subcaso $b = 1$, la única solución es

$$\boxed{(t, k, a, b) = (3, 3, 4, 1).}$$

Si $b \geq 3$, toda solución residual satisface adicionalmente

$$e \equiv \begin{cases} 19 \pmod{24}, & r = 2, \\ 7 \pmod{24}, & r \geq 4. \end{cases}$$

Demostración. La ecuación neutra original con $t = 3$ muestra que 3 divide a $2^a - 1$; por tanto, a es par. Pongamos $n = k + 1$. Como $3 \cdot 2^b - 1$ es impar, (5) implica

$$a = \nu_2(3^n - 1).$$

Si n fuese impar, el miembro derecho sería 1, en contradicción con la paridad de a. Así, n es par. Escribiendo

$$n = 2^r q, \qquad q \text{ impar}, \qquad r \geq 1,$$

el lema de elevación del exponente da

$$a = 2 + \nu_2(n) = r + 2.$$

Como a es par, r es par y, en consecuencia, $r \geq 2$. En particular, $k = n - 1$ es impar.

Definamos

$$x = 3^{n/2}, \qquad U = \frac{x - 1}{2}, \qquad V = \frac{x + 1}{2}.$$

Entonces U y V son consecutivos y coprimos. Además,

$$\nu_2(U) = \nu_2(x - 1) - 1 = r, \qquad V \text{ es impar},$$

y al factorizar (5) obtenemos

$$UV = 2^r(3 \cdot 2^b - 1).$$

Existen, por tanto, enteros impares positivos d, e tales que

$$U = 2^r e, \qquad V = d, \qquad de = 3 \cdot 2^b - 1.$$

La igualdad $V - U = 1$ proporciona $d = 2^r e + 1$. Al sustituirla en la última relación resulta precisamente (6).

Si $b = 1$, esta ecuación es

$$6 = 2^r e^2 + e + 1.$$

Puesto que $r \geq 2$ y $e \geq 1$, el miembro derecho es al menos 6, y la igualdad sólo es posible para $r = 2$ y $e = 1$. De aquí $a = r + 2 = 4$, $n = 4$ y $k = 3$, lo que da la solución indicada.

Finalmente, (6) módulo 3, usando que r es par, implica

$$e^2 + e + 1 \equiv 0 \pmod{3},$$

luego $e \equiv 1 \pmod{3}$. Si $b \geq 3$, la reducción módulo 8 da $e \equiv 3 \pmod{8}$ cuando $r = 2$, y $e \equiv 7 \pmod{8}$ cuando $r \geq 4$. El teorema chino del resto produce las dos clases módulo 24 afirmadas. □

Corolario 6.19 (Rigidez del caso residual $t = 3$)**.** *Toda solución de* (6) *con* $b > 1$ *satisface*

$$\boxed{\begin{array}{c} \nu_2(e+1) = r, \qquad b \geq 5r+1, \\ e = 3 \cdot 2^{2r} w - 2^r - 1 \end{array}}$$

para algún entero $w \geq 1$*.*

Demostración. Sea $\sigma = \nu_2(e+1)$. Si $\sigma < r$, entonces

$$\nu_2(2^r e^2 + e + 1) = \sigma,$$

de modo que $b = \sigma < r$. Como $b > 1$, se tiene $e \geq 3$, y por tanto

$$3 \cdot 2^b \leq 3 \cdot 2^{r-1} < 2^r e^2 + e + 1,$$

una contradicción. Si $\sigma > r$, la valuación del miembro derecho de (6) es r, luego $b = r$. Al dividir por 2^r resultaría

$$3 = e^2 + \frac{e+1}{2^r},$$

lo cual es imposible. En consecuencia, $\sigma = r$.

Escribamos

$$e + 1 = 2^r u, \qquad u \text{ impar.}$$

Al dividir (6) por 2^r obtenemos

$$3 \cdot 2^{b-r} = e^2 + u. \tag{7}$$

Si $b - r < r$, el miembro izquierdo no excede $3 \cdot 2^{r-1}$, mientras que

$$e^2 + u \geq (2^r - 1)^2 + 1 > 3 \cdot 2^{r-1}$$

para $r \geq 2$. Por tanto, $b - r \geq r$. Reduciendo (7) módulo 2^r y usando $e \equiv -1 \pmod{2^r}$, se sigue que

$$u \equiv -1 \pmod{2^r}.$$

Por otra parte, la Proposición 6.18 da $e \equiv 1 \pmod 3$. Como r es par y $e = 2^r u - 1$, resulta $u \equiv 2 \pmod 3$. Las dos congruencias implican

$$u = 3 \cdot 2^r w - 1$$

para algún $w \geq 1$, y así

$$e = 2^r u - 1 = 3 \cdot 2^{2r} w - 2^r - 1 > 2^{2r+1}.$$

Finalmente,

$$3 \cdot 2^b = 2^r e^2 + e + 1 > 2^{5r+2}.$$

Como b es entero, esta desigualdad exige $b \geq 5r + 1$. □

Observación 6.20 (Alcance de la búsqueda para $t > 1$). Una búsqueda exacta mediante la reducción divisoria de la Proposición 6.12, para $1 \leq a, b \leq 100$, sólo encuentra

$$(t, k, a, b) = (1, 1, 1, 1), \quad (1, 2, 3, 1), \quad (3, 3, 4, 1).$$

Esta comprobación respalda el estudio del caso residual (6), pero no demuestra que carezca de soluciones con $b > 1$.

6.5. Patrones finitos de bloques

Teorema 6.21 (Cilindros de bloques)**.** *Fijado el parámetro inicial k_0, prescribamos una sucesión finita*

$$(s_1, k_1), \ldots, (s_m, k_m), \qquad s_j \geq 2, \quad k_j \geq 1.$$

Los parámetros impares iniciales t_0 compatibles con ese patrón forman una única clase residual módulo

$$2^{\,1+\sum_{j=1}^{m}(s_j+k_j-1)}.$$

En particular, su densidad relativa entre los impares es

$$\boxed{2^{-\sum_{j=1}^{m}(s_j+k_j-1)} = \prod_{j=1}^{m} 2^{-(s_j+k_j-1)}.}$$

Demostración. Para $m = 1$ es el Teorema 6.4. Supongamos construido el cilindro de los primeros $m-1$ pares de parámetros. Dentro de él, la fórmula del Teorema 6.2 transforma el parámetro libre 2-ádico de manera afín con coeficiente impar. El Teorema 6.4, aplicado al estado k_{m-1}, selecciona una única subclase de índice $2^{s_m+k_m-1}$. Por inducción, los índices se multiplican y se obtiene tanto el módulo como la densidad afirmados. □

Corolario 6.22 (Factorización de las longitudes finitas)**.** *Para longitudes prescritas $\ell_1, \ldots, \ell_m \geq 2$, se tiene*

$$\boxed{\Pr(L_1 = \ell_1, \ldots, L_m = \ell_m) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\ell_j - 1}{2^{\ell_j}}.}$$

Observación 6.23 (Alcance probabilístico)*.* Las probabilidades anteriores son densidades exactas de clases residuales, o equivalentemente medidas de Haar en el espacio de parámetros 2-ádicos. No afirman que las longitudes observadas a lo largo de una órbita positiva fija sean variables aleatorias independientes. El paso de la libertad de todo prefijo finito al comportamiento de una órbita infinita concreta no está justificado por estos resultados.

7. Relación con la segmentación en tramos impares

La misma porción de órbita admite una lectura complementaria sobre los impares, mediante la aplicación simplificada

$$T(n) = \frac{3n+1}{2} \qquad (n \text{ impar}).$$

Esta sección fija esa correspondencia y recoge, con demostración breve, los hechos elementales que se utilizan al presentar la segmentación en tramos. Ninguno de ellos es nuevo: pertenecen al marco clásico de los vectores de paridad [4, 2, 5].

Definición 7.1 (Tramo impar)**.** Sea a_0 un impar positivo y $k = \nu_2(a_0 + 1)$, de modo que $a_0 = 2^k t - 1$ con t impar. El *tramo impar* iniciado en a_0 es la sucesión maximal de impares consecutivos

$$a_0,\ T(a_0),\ \ldots,\ T^{k-1}(a_0),$$

seguida del primer término par $P = 3^k t - 1$. El entero k es la *longitud* del tramo.

Proposición 7.2 (Forma cerrada y cierre forzado)**.** *Con la notación de la Definición 7.1, los términos del tramo son $T^i(a_0) = u_i = 3^i 2^{k-i} t - 1$ para $0 \leq i \leq k-1$, y $P = T(u_{k-1}) = 3^k t - 1$. En particular, todo tramo impar es finito y su último impar*

$$u_{k-1} = 2 \cdot 3^{k-1} t - 1$$

es congruente con 1 (mód 4)*.*

Demostración. Es el Lema 3.1, aplicado a $u = a_0$: la recurrencia $T(u_i) = u_{i+1}$ vale para $0 \le i \le k-2$, los términos con $i \le k-2$ son $\equiv 3 \pmod 4$ y el último es $\equiv 1 \pmod 4$, que es exactamente la condición para que el siguiente término sea par. □

Llamaremos *portal* a un impar congruente con 1 (mód 4), es decir, al último impar de cada tramo. La relación con la Sección 3 es inmediata: el portal del tramo iniciado en el núcleo impar u del bloque $\mathcal{P}(A_0)$ es precisamente su cierre Q.

Proposición 7.3 (Descenso en el portal)**.** *Sea $Q \equiv 1 \pmod 4$ un portal con $Q > 1$ y sea $Q' = (3Q+1)/2^{\nu_2(3Q+1)}$ el siguiente impar de su órbita. Entonces $Q' < Q$.*

Demostración. Como $Q \equiv 1 \pmod 4$, se tiene $4 \mid 3Q+1$, luego $Q' \le (3Q+1)/4 < Q$ para $Q > 1$. □

Definición 7.4 (Función de descenso por tramos)**.** Para $a_0 = 2^k t - 1$ impar, con t impar, se define

$$D(a_0) = \frac{3^k t - 1}{2^{\nu_2(3^k t - 1)}},$$

el primer impar del tramo siguiente.

Proposición 7.5 (Coincidencia con la transición entre bloques)**.** *Sea $A_0 = 2^s u$ un par con núcleo impar u y sea u^+ el núcleo impar del bloque siguiente, en la notación del Teorema 6.2. Entonces $u^+ = D(u)$.*

Demostración. Por el Teorema 6.2, $u^+ = (3^k t - 1)/2^a$ con $a = \nu_2(3^k t - 1)$, que es la Definición 7.4 aplicada a $u = 2^k t - 1$. □

Proposición 7.6 (Equivalencia con la conjetura de Collatz)**.** *Son equivalentes:*

(I) *la conjetura de Collatz;*

(II) *para todo impar $a_0 > 1$ existe $m \ge 1$ con $D^m(a_0) < a_0$.*

Demostración. (i)⇒(ii): si toda órbita alcanza 1, la sucesión de iterados de D alcanza $1 < a_0$. (ii)⇒(i): dado $a_0 > 1$, se obtiene $a_1 = D^{m_1}(a_0) < a_0$; si $a_1 > 1$ se repite el argumento. La sucesión $a_0 > a_1 > \cdots$ de impares positivos es estrictamente decreciente, luego termina en 1 tras un número finito de pasos. □

Observación 7.7 (Sobre la no colisión entre tramos consecutivos). Que dos tramos consecutivos no compartan términos equivale a excluir los ciclos formados por una única racha impar seguida de una única racha par, es decir, los 1-circuitos. Su ecuación es la de la Sección 6.4 con $b = k$, y su única solución positiva es la trivial: es el teorema de Steiner [3], cuya demostración requiere fracciones continuas y cotas efectivas de tipo Baker. No se trata de una consecuencia inmediata de la factorización única.

7.1. Diccionario de notación

Segmentación en tramos	Bloque par proyectado $\mathcal{P}(A_0)$, $A_0 = 2^s(2^k t - 1)$
Tramo impar de longitud k	racha oculta $u_0, \ldots, u_{k-1}$
Primer impar del tramo, a_0	núcleo impar $u = 2^k t - 1$
Término i-ésimo, $3^i 2^{k-i} t - 1$	impar oculto u_i (visible como $2u_i$)
Portal de cierre	$Q = 2 \cdot 3^{k-1} t - 1$
Par de cierre del tramo, $P = 3^k t - 1$	cantidad auxiliar B
Inicio del bloque siguiente	$A_0^+ = 2B = 3Q + 1$
Función D sobre impares	$u \mapsto u^+$ (Proposición 7.5)
Cola binaria	los s primeros pares visibles
Longitud par visible	$r = s + k - 1$

Observación 7.8 (Advertencia de convenio). La diferencia entre la aplicación clásica $C(n) = 3n + 1$ sobre impares y la simplificada $T(n) = (3n + 1)/2$ afecta al primer término de cada bloque. Bajo C, el término que sigue al portal Q es $3Q + 1$, que es par y visible, de modo que el bloque siguiente empieza en $A_0^+ = 3Q + 1$ y satisface $s \geq 2$ (Proposición 6.3). Bajo T se obtendría directamente $B = (3Q + 1)/2$, lo que suprime ese primer par y reduce en una unidad la longitud visible de todos los bloques salvo el primero. Las tablas, figuras y generadores asociados a este escrito siguen el convenio de C.

8. Alcance del resultado

La proyección no crea nuevas órbitas: reorganiza una porción de una órbita clásica. La forma cerrada muestra que, después de extraer la potencia de 2 del inicio par, el resto del bloque es la imagen duplicada de una racha consecutiva de impares bajo $(3n + 1)/2$.

Esto tiene dos consecuencias. Primero, la finitud no debe justificarse mediante una afirmación global sobre las órbitas: basta el Lema 3.1. Segundo, cualquier reclamación de originalidad debe distinguir entre la racha impar, perteneciente al marco clásico de los vectores de paridad, y la proyección concreta sobre pares visibles junto con su parametrización.

8.1. Relación con la conjugación 2-ádica

La factorización del Teorema 6.21 es compatible con la conjugación de Bernstein–Lagarias entre la aplicación de Collatz extendida a $\mathbb{Z}_2$ y el desplazamiento binario [1]. En ese marco, todo vector finito de paridad determina una única clase residual. La codificación por bloques agrupa esos vectores según las longitudes de una cola binaria y de una racha impar.

Por ello, la ley del Corolario 6.6 no debe presentarse como un nuevo fenómeno probabilístico independiente de la teoría de vectores de paridad. El contenido específico de esta representación reside en la transición explícita

$$3^k t - 1 = 2^a(2^b t^+ - 1), \qquad A_0^+ = 2^{a+1}(2^b t^+ - 1),$$

y en su interpretación como dinámica entre bloques pares proyectados.

9. Problemas abiertos

Los resultados anteriores dejan tres direcciones naturales:

1. clasificar las soluciones positivas de la ecuación de transición neutra

   $$t(2^{a+b} - 3^k) = 2^a - 1$$

   para $t > 1$. El primer caso residual, $t = 3$, queda sometido a la rigidez del Corolario 6.19;

2. estudiar las restricciones arquimedianas iteradas inducidas por

   $$t^+ = \frac{3^k t + 2^a - 1}{2^{a+b}}$$

   y determinar qué relaciones entre parámetros consecutivos no son una traducción automática de los vectores de paridad;

3. precisar qué información adicional aporta la positividad frente a la conjugación 2-ádica con el desplazamiento binario.

10. Conclusión

El bloque par proyectado admite una descripción completa. Su ley local está determinada por las clases pares módulo 8, su finitud es incondicional y todos sus términos se obtienen mediante una fórmula cerrada. Su longitud es

$$\nu_2(A_0) + \nu_2\left(\frac{A_0}{2^{\nu_2(A_0)}} + 1\right) - 1.$$

La dinámica entre bloques queda descrita por una transición exacta y por clases residuales que codifican cualquier patrón finito. Estas densidades pertenecen al marco clásico de los patrones de paridad; la cuestión arquimediana se refleja en el criterio exacto $t^+ > t \iff 3^k > 2^{L^+}$. Además, todo bloque sucesor tiene $s \geq 2$ y su longitud obedece $\Pr(L^+ = m) = (m-1)/2^m$ para $m \geq 2$. La clasificación de las transiciones neutras y la interacción iterada entre este criterio y las clases residuales son los principales problemas abiertos de esta representación. En el subcaso $t = 1$, la clasificación es completa: las únicas transiciones neutras son las dos soluciones del Teorema 6.15, ambas con $b = 1$. Para $t = 3$, la única solución con $b = 1$ es $(k, a, b) = (3, 4, 1)$; cualquier solución restante debe satisfacer tanto la reducción de la Proposición 6.18 como la forma rígida y la cota del Corolario 6.19. Estos resultados fijan con precisión la frontera entre la descripción completa de los bloques y los problemas diofánticos que permanecen abiertos.

Referencias

[1] D. J. Bernstein y J. C. Lagarias, *The* $3x+1$ *conjugacy map*, Canad. J. Math. **48** (1996), 1154–1169.

[2] J. C. Lagarias, *The* $3x+1$ *problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.

[3] R. P. Steiner, *A theorem on the Syracuse problem*, Proc. Seventh Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing, Congressus Numerantium **20** (1978), 553–559.

[4] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. **30** (1976), 241–252.

[5] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the* $3n+1$ *Function*, Lecture Notes in Mathematics 1681, Springer, 1998.