Columnas terminales y bloques pares en la dinámica de Collatz

Miquel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

Este trabajo desarrolla y formaliza una observación surgida de la relectura del escrito *"La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia"*, redactado en agosto de 2019. En aquel escrito se organizaron las secuencias de Collatz mediante una tabla de números impares y otra de números pares. Las columnas de la primera terminan en un impar de la forma $4m+1$, denominado aquí impar verde, seguido de un número par. Las columnas de la segunda terminan en un par que al dividirse entre 2 produce un impar, denominado par verde.

El objetivo de esta nota es estudiar únicamente los elementos terminales de dichas columnas y aclarar la relación entre ambos tipos de pares. Se demuestra que, si $u \equiv 1 \pmod 4$ es un impar verde, entonces $3u+1 \equiv 0 \pmod 4$, mientras que un par verde tiene valoración 2-ádica igual a 1. Se muestra además que ambos pares son los dos extremos de un mismo bloque: la columna de pares que comienza en $3u+1$ termina siempre en el par verde $2T(u)$. Si la tabla de impares se construye con la aplicación intermedia $S(u) = (3u+1)/2$, el par mostrado tras u coincide con el par verde que cierra el bloque exactamente cuando $u \equiv 1 \pmod 8$.

Esta descripción conduce de forma natural al mapa acelerado impar-a-impar

$$T(u) = \frac{3u+1}{2^{v_2(3u+1)}},$$

acompañado por la función $v_2(3u+1)$, que mide el número de divisiones consecutivas entre 2 situadas entre dos impares de una órbita. Se determina explícitamente la clase de congruencia asociada a cada valor de esta función y a cada sucesión finita de valores consecutivos, junto con su densidad; esto último es la versión, para el mapa acelerado, del teorema del vector de paridad de Terras y Everett. El texto propone así una descripción reducida de las órbitas de Collatz mediante bloques, sin afirmar una demostración de la conjetura.

1. La dinámica de Collatz y dos convenciones

La conjetura de Collatz parte de un entero positivo n y aplica la regla

$$C(n) = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3n+1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

La conjetura afirma que, para todo valor inicial positivo, la órbita alcanza finalmente el ciclo

$$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1.$$

Cuando se trabaja sólo con los instantes impares, es útil reunir la multiplicación por 3, la suma de 1 y todas las divisiones posteriores entre 2. Para un entero $N \neq 0$, se define la *valoración 2-ádica* $v_2(N)$ como el mayor entero $r \geq 0$ tal que $2^r \mid N$. El mapa acelerado impar-a-impar es

$$T(u) = \frac{3u+1}{2^{v_2(3u+1)}}. \tag{1}$$

Como $3u+1$ es par cuando u es impar, se tiene $v_2(3u+1) \geq 1$, y el valor $T(u)$ es siempre impar.

También se empleará la aplicación intermedia

$$S(u) = \frac{3u+1}{2}, \tag{2}$$

que puede ser impar o par. La tabla de impares descrita más abajo organiza sucesivas aplicaciones de S; el mapa T, en cambio, salta directamente de un impar al siguiente impar de la órbita.

2. La tabla de impares y sus elementos terminales

Partiendo de un impar, se aplica repetidamente S mientras el resultado siga siendo impar. Si el primer valor de una columna es $2k-1$, los valores de la columna pueden escribirse, mientras sean enteros, como

$$a_j = 2k\left(\frac{3}{2}\right)^j - 1. \tag{3}$$

En efecto,

$$S(a_j) = \frac{3a_j+1}{2} = \frac{3\left(2k(3/2)^j - 1\right)+1}{2} = 2k\left(\frac{3}{2}\right)^{j+1} - 1 = a_{j+1}.$$

Un impar de la forma $4m+3$ satisface

$$S(4m+3) = \frac{12m+10}{2} = 6m+5,$$

que es impar. En cambio, si el impar es de la forma $4m+1$,

$$S(4m+1) = \frac{12m+4}{2} = 6m+2,$$

que es par. Por ello, en esta construcción una columna de impares termina exactamente en un impar

$$u \equiv 1 \pmod 4,$$

que se llamará *impar terminal* o, siguiendo la terminología cromática original, *impar verde*.

Después del impar terminal u, la dinámica ordinaria produce el número par $3u+1$. Si se utiliza la aplicación intermedia S, el primer par mostrado tras u es $(3u+1)/2$. Ambas convenciones describen el mismo bloque par; la diferencia es sólo si se cuenta como primer término el número $3u+1$ antes de su primera división entre 2. Como se verá en la Sección 5, esta diferencia es decisiva al comparar los elementos terminales de las dos tablas.

3. La tabla de pares y sus elementos terminales

La tabla de pares comienza con un par $2k$ y aplica divisiones sucesivas entre 2 hasta llegar a un impar. El par final de tal columna, es decir, el último par antes del impar, tiene la forma

$$2m, \qquad m \text{ impar}.$$

Por tanto satisface

$$2m \equiv 2 \pmod 4, \qquad v_2(2m) = 1. \tag{4}$$

En la terminología usada en la tabla, éste es un *par verde*: al dividirlo una vez entre 2, se obtiene inmediatamente un impar.

Así, las columnas de pares clasifican la longitud de una cadena de divisiones por 2. Si el primer número de una columna es $2^r q$, con q impar y $r \geq 1$, la columna contiene exactamente r números pares antes de llegar al impar q. En particular, el último de esos pares tiene valoración 2-ádica uno.

4. El papel de los múltiplos de 3

Antes de comparar los elementos terminales de las dos tablas conviene precisar qué impares pueden aparecer en la cola de una órbita, porque esto determina qué pares verdes intervienen realmente en la dinámica.

Si u es múltiplo de 3, entonces

$$3u + 1 \equiv 1 \pmod 3.$$

Más en general, para todo u, el valor $3u + 1$ es congruente con 1 (mód 3), nunca con 0 (mód 3). Las divisiones por 2 tampoco crean un múltiplo de 3, porque 2 es invertible módulo 3. Por tanto, una vez aplicado un paso impar $u \mapsto 3u + 1$, ningún término posterior de la órbita es divisible por 3, incluidos el propio $3u + 1$ y sus sucesivas mitades.

La afirmación debe formularse con cuidado: un múltiplo impar de 3 puede ser perfectamente un número inicial. Por ejemplo,

$$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto \cdots$$

Lo que no puede ocurrir es que un impar múltiplo de 3 aparezca como un nuevo impar posterior a un paso impar anterior.

En términos inversos, un impar múltiplo de 3 no posee preimagen impar por T. En efecto, una posible preimagen impar exigiría una expresión

$$x = \frac{2^r m - 1}{3},$$

pero si $3 \mid m$, entonces $2^r m - 1 \equiv -1 \pmod 3$, y el cociente no es entero. Esto permite restringir el estudio de las colas de órbitas, después del primer paso impar, al conjunto

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{N} : \ u \text{ impar y } 3 \nmid u\}.$$

5. Relación entre los dos tipos de pares

La comparación entre ambas tablas depende de qué número se considere el primer par tras un impar terminal: $3u + 1$, en la dinámica ordinaria, o $S(u) = (3u + 1)/2$, en la construcción de la tabla de impares. Conviene tratar ambos casos por separado.

Proposición 1. *Sea u un impar terminal de una columna de la tabla de impares. Entonces $u \equiv 1 \pmod 4$ y*

$$3u + 1 \equiv 0 \pmod 4.$$

En consecuencia, $v_2(3u + 1) \geq 2$, y el número $3u + 1$ nunca es un par verde.

Demostración. Como $u \equiv 1 \pmod 4$, se tiene $3u + 1 \equiv 3 \cdot 1 + 1 \equiv 0 \pmod 4$. Luego $v_2(3u + 1) \geq 2$, mientras que por (4) un par verde tiene valoración 2-ádica exactamente uno. □

Con la convención de la aplicación S, la situación cambia.

Proposición 2. *Sea* $u \equiv 1 \pmod 4$. *Entonces*

$$v_2(S(u)) = v_2(3u+1) - 1 \geq 1,$$

y

$$S(u) \text{ es un par verde} \iff v_2(3u+1) = 2 \iff u \equiv 1 \pmod 8.$$

Demostración. La primera igualdad es inmediata, pues $S(u) = (3u+1)/2$. Por tanto $S(u)$ es par verde si y sólo si $v_2(3u+1) = 2$. Si $u \equiv 1 \pmod 8$, entonces $3u+1 \equiv 4 \pmod 8$, y la valoración es exactamente 2. Si $u \equiv 5 \pmod 8$, entonces $3u+1 \equiv 16 \equiv 0 \pmod 8$, y la valoración es al menos 3. □

La razón de fondo es que ambos pares no ocupan la misma posición en la órbita: son los dos extremos de un mismo bloque.

Proposición 3. *Sea* u *impar y* $r = r(u) = v_2(3u+1)$. *La columna de la tabla de pares que comienza en* $3u+1$ *es*

$$3u+1,\ \frac{3u+1}{2},\ \ldots,\ \frac{3u+1}{2^{r-1}} = 2\,T(u),$$

contiene exactamente r *números pares, y su último elemento* $2\,T(u)$ *es un par verde.*

En la indexación de la tabla de pares, cuyas columnas se encabezan por $2k$, esta columna es la de índice $k = S(u) = (3u+1)/2$.

Demostración. Para $0 \leq j \leq r$ se tiene $v_2\big((3u+1)/2^j\big) = r - j$. Los términos con $j \leq r-1$ son pares y el término con $j = r$ es el impar $T(u)$. El último par corresponde a $j = r-1$, tiene valoración 1 y vale $2\,T(u)$. □

Corolario 1. *El par que sigue a un impar terminal* u *coincide con el par verde que cierra su bloque,* $2\,T(u)$, *en los casos siguientes:*

- *con la convención* $3u+1$, *nunca, porque la columna tiene al menos dos elementos;*
- *con la convención* S, *exactamente cuando* $u \equiv 1 \pmod 8$, *es decir, cuando* $S(u) = 2\,T(u)$.

La siguiente tabla ilustra ambos extremos del bloque para los primeros impares terminales no divisibles por 3.

u	u mód 8	$3u+1$	$S(u)$	$2\,T(u)$	$S(u) = 2\,T(u)$
1	1	4	2	2	sí
5	5	16	8	2	no
13	5	40	20	10	no
17	1	52	26	26	sí
25	1	76	38	38	sí
29	5	88	44	22	no

Todos los valores de la columna $3u+1$ son divisibles por 4, de acuerdo con la Proposición 1. En cambio, los valores de $S(u)$ son congruentes con 2 (mód 4) precisamente en las filas con $u \equiv 1 \pmod 8$, de acuerdo con la Proposición 2.

Por la Sección 4, tras el primer paso impar ningún impar de la órbita es múltiplo de 3. Por ello, los pares verdes que aparecen como cierre de un bloque son los de la forma $2m$ con m impar y $3 \nmid m$:

$$2,\ 10,\ 14,\ 22,\ 26,\ 34,\ 38, \ldots$$

Los valores 26 y 38 aparecen tanto en esta lista como en la columna $S(u)$ de la tabla anterior, lo que confirma el Corolario 1.

Observación 1. El número 2 no es un caso excepcional. Se obtiene como $S(1)$ con $1 \equiv 1$ (mód 8), y su coincidencia con el par verde $2\,T(1)$ responde a la misma regla que las coincidencias $S(17) = 26$ y $S(25) = 38$. Lo único particular del impar 1 es que $T(1) = 1$, de modo que su bloque se cierra sobre sí mismo y da lugar al ciclo $1 \to 4 \to 2 \to 1$.

6. El bloque par asociado a un impar

La forma más precisa de unir las dos tablas consiste en asociar a cada impar u el entero

$$r(u) = v_2(3u + 1).$$

Entonces el tramo de órbita que comienza en u es

$$u \longmapsto 3u + 1 \longmapsto \frac{3u + 1}{2} \longmapsto \cdots \longmapsto \frac{3u + 1}{2^{r(u)}} = T(u). \tag{5}$$

Hay exactamente $r(u)$ divisiones sucesivas entre 2, y el último valor es el siguiente impar. Por la Proposición 3, el penúltimo valor es el par verde $2\,T(u)$.

Por ello puede definirse el operador de bloque

$$\Phi(u) = (3u + 1,\ T(u))\,,$$

o, si se quiere registrar toda la información relevante,

$$\widetilde{\Phi}(u) = (3u + 1,\ r(u),\ T(u))\,.$$

Esta segunda versión conserva:

- el par que aparece después del paso impar;
- la longitud exacta del bloque de divisiones por 2;
- el impar que inicia el bloque siguiente.

La siguiente tabla muestra algunos valores.

u	$3u + 1$	$r(u)$	$T(u)$
5	16	4	1
13	40	3	5
17	52	2	13
25	76	2	19
29	88	3	11
37	112	4	7
41	124	2	31

Esta tabla hace visible una precisión importante. La condición $u \equiv 1$ (mód 4) sólo asegura que $r(u) \geq 2$; no determina la longitud exacta del bloque par. Para ello hay que distinguir congruencias módulo potencias cada vez mayores de 2.

7. Refinamiento por congruencias módulo potencias de 2

Para un impar u, se tiene

$$u \equiv 3 \pmod 4 \quad \Longleftrightarrow \quad v_2(3u+1) = 1,$$

y

$$u \equiv 1 \pmod 4 \quad \Longleftrightarrow \quad v_2(3u+1) \geq 2.$$

La primera equivalencia expresa que un impar de la forma $4m+3$ pasa al siguiente impar después de una única división entre 2. La segunda expresa que un impar verde desencadena una cadena par de longitud al menos dos.

Las longitudes exactas quedan determinadas por una única clase de congruencia para cada valor de r.

Proposición 4. *Sea $r \geq 1$ y sea*

$$c_r = \begin{cases} \dfrac{2^r - 1}{3}, & r \text{ par}, \\ \dfrac{5 \cdot 2^r - 1}{3}, & r \text{ impar}. \end{cases}$$

Entonces c_r es un entero impar y, para todo impar u,

$$v_2(3u+1) = r \quad \Longleftrightarrow \quad u \equiv c_r \pmod{2^{r+1}}.$$

Demostración. La condición $v_2(3u+1) = r$ equivale a que 2^r divida a $3u+1$ y 2^{r+1} no lo divida, es decir, a

$$3u + 1 \equiv 2^r \pmod{2^{r+1}}.$$

Como 3 es invertible módulo 2^{r+1}, esta congruencia tiene una única solución módulo 2^{r+1}. Basta comprobar que c_r la satisface.

Si r es par, $2^r \equiv 1 \pmod 3$, luego c_r es entero y $3c_r + 1 = 2^r$. Si r es impar, $5 \cdot 2^r \equiv 5 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 3$, luego c_r es entero y

$$3c_r + 1 = 5 \cdot 2^r = 2^r + 2^{r+2} \equiv 2^r \pmod{2^{r+1}}.$$

En ambos casos el numerador de c_r es impar, de modo que c_r es impar. □

Los primeros valores son los siguientes.

r	clase de u	ejemplo
1	$3 \pmod 4$	$3 \mapsto 10$
2	$1 \pmod 8$	$17 \mapsto 52 = 4 \cdot 13$
3	$13 \pmod{16}$	$13 \mapsto 40 = 8 \cdot 5$
4	$5 \pmod{32}$	$37 \mapsto 112 = 16 \cdot 7$
5	$53 \pmod{64}$	$53 \mapsto 160 = 32 \cdot 5$
6	$21 \pmod{128}$	$21 \mapsto 64$

Corolario 2. *Para cada $r \geq 1$, la proporción de impares u con $v_2(3u+1) = r$ es 2^{-r}. La misma proporción se obtiene dentro del conjunto $\mathcal{U}$ de impares no divisibles por 3.*

Demostración. Módulo 2^{r+1} hay 2^r clases impares, y sólo una de ellas es c_r; de ahí la proporción 2^{-r}. Para los impares no divisibles por 3, se trabaja módulo $3 \cdot 2^{r+1}$. Hay $2 \cdot 2^r$ clases que son impares y no nulas módulo 3. Por el teorema chino del resto, exactamente 2 de ellas son congruentes con c_r módulo 2^{r+1}. La proporción es $2/2^{r+1} = 2^{-r}$. En particular, la restricción a $\mathcal{U}$ de la Sección 4 no altera la distribución de las longitudes $r(u)$. □

La Proposición 4 se extiende a varios bloques consecutivos. Para un impar u se escribe $u_0 = u$ y $u_j = T(u_{j-1})$ para $j \geq 1$.

Proposición 5. *Sean $k \geq 1$ y $r_1, \ldots, r_k \geq 1$, y sea $R = r_1 + \cdots + r_k$. Existe un único impar c con $1 \leq c < 2^{R+1}$ tal que, para todo impar u,*

$$r(u_{j-1}) = r_j \quad \text{para } j = 1, \ldots, k \quad \Longleftrightarrow \quad u \equiv c \pmod{2^{R+1}}.$$

Demostración. Se procede por inducción sobre k. El caso $k = 1$ es la Proposición 4.

Supóngase el resultado cierto para k, con suma R y clase c, y sea $r = r_{k+1}$. Para todo $u \equiv c \pmod{2^{R+1}}$, las k primeras longitudes son $r_1, \ldots, r_k$. Por tanto cada paso es $u_j = (3u_{j-1} + 1)/2^{r_j}$, y por composición

$$u_k = \frac{3^k u + \beta}{2^R},$$

donde el entero β depende sólo de $r_1, \ldots, r_k$. Explícitamente,

$$\beta = \sum_{i=1}^{k} 3^{k-i}\, 2^{r_1 + \cdots + r_{i-1}},$$

donde el exponente de 2 es 0 para $i = 1$, como se comprueba por inducción a partir de la recurrencia $\beta_{k+1} = 3\beta_k + 2^R$. Escribiendo $u = c + 2^{R+1}t$ con $t \geq 0$, se obtiene

$$u_k = d + 2 \cdot 3^k t, \qquad d = \frac{3^k c + \beta}{2^R},$$

donde d es el valor de u_k para $u = c$, luego un impar. Por la Proposición 4, se cumple $r(u_k) = r$ si y sólo si $u_k \equiv c_r \pmod{2^{r+1}}$, es decir,

$$2 \cdot 3^k t \equiv c_r - d \pmod{2^{r+1}}.$$

Como c_r y d son impares, $c_r - d$ es par, y la condición equivale a

$$3^k t \equiv \frac{c_r - d}{2} \pmod{2^r}.$$

Como 3^k es invertible módulo 2^r, existe un único t_0 con $0 \leq t_0 < 2^r$ tal que la condición equivale a $t \equiv t_0 \pmod{2^r}$. Escribiendo $t = t_0 + 2^r s$, se obtiene

$$u = c + 2^{R+1} t_0 + 2^{R+r+1} s,$$

que es una única clase módulo $2^{(R+r)+1}$. Su representante $c + 2^{R+1}t_0$ es impar y menor que 2^{R+r+1}. □

Observación 2 (Procedencia). La Proposición 5 no es un resultado nuevo. Es consecuencia directa, reescrita para el mapa acelerado T, del teorema del vector de paridad demostrado por Terras [7] y, de forma independiente, por Everett [1]. Según ese teorema, para la aplicación $x \mapsto x/2$ si x es par y $x \mapsto (3x+1)/2$ si x es impar, dos enteros tienen el mismo vector de paridad de longitud n si y sólo si son congruentes módulo 2^n.

La correspondencia es directa. Un bloque de longitud r equivale a r pasos de esa aplicación: un paso impar seguido de $r - 1$ pasos pares. Por tanto, prescribir $r_1, \ldots, r_k$ equivale a prescribir las paridades en las posiciones $0, 1, \ldots, R$, con unos exactamente en las sumas parciales 0, r_1, $r_1 + r_2, \ldots, R$. Son $R + 1$ paridades, lo que explica el módulo 2^{R+1}. Véase también el panorama de Lagarias [4].

Para el mapa acelerado, el enunciado aparece de forma directa en el Teorema de Estructura de Sinai [5] y Kontorovich–Sinai [3]. Según ese teorema, cada vector de exponentes de

longitud k y suma R aparece exactamente una vez por período $6 \cdot 2^R$, con densidad 2^{-R}; el refinamiento módulo 6 procede de separar las clases 1 y 5 módulo 6. Su versión iterada, según la cual T^k lleva una progresión de diferencia $6 \cdot 2^R$ a otra de diferencia $6 \cdot 3^k$, es el análogo de la parametrización $u_k = d + 2 \cdot 3^k t$ usada en la demostración. Véase también el panorama de Kontorovich y Lagarias [2].

Se incluye la demostración para que el escrito sea autocontenido. El Corolario 3 es su consecuencia inmediata.

Corolario 3. *La proporción de impares u cuyas k primeras longitudes son $r_1, \dots, r_k$ es*

$$2^{-R} = \prod_{j=1}^{k} 2^{-r_j},$$

y la misma proporción se obtiene dentro de $\mathcal{U}$. Equivalentemente, respecto de la densidad natural sobre los impares, las longitudes $r(u_0), \dots, r(u_{k-1})$ son k variables independientes con la distribución geométrica $\Pr(r) = 2^{-r}$ del Corolario 2: la proporción conjunta es el producto de las proporciones marginales.

Este enunciado se refiere a la variación del valor inicial u con k fijo. No afirma nada sobre la sucesión de longitudes a lo largo de una órbita individual.

Demostración. Es el mismo recuento que en el Corolario 2, módulo 2^{R+1} y módulo $3 \cdot 2^{R+1}$ respectivamente. □

Algunos ejemplos:

$(r_1, \dots, r_k)$	R	clase de u	ejemplo
$(1,1)$	2	7 (mód 8)	$7 \mapsto 11 \mapsto 17$
$(2,3)$	5	17 (mód 64)	$17 \mapsto 13 \mapsto 5$
$(3,2)$	5	45 (mód 64)	$45 \mapsto 17 \mapsto 13$
$(1,2,1)$	4	27 (mód 32)	$27 \mapsto 41 \mapsto 31 \mapsto 47$
$(2,2,2)$	6	1 (mód 128)	$1 \mapsto 1 \mapsto 1 \mapsto 1$

Para $k \geq 1$ y u impar se escribe

$$R_k(u) = r(u_0) + r(u_1) + \cdots + r(u_{k-1}),$$

el número total de divisiones por 2 en los k primeros bloques.

La distribución exacta del Corolario 3 permite obtener directamente una concentración elemental de R_k. Kontorovich y Sinai [3] demuestran para R_k un resultado más fuerte, un teorema central del límite; aquí basta la cota de Chebyshev.

Corolario 4. *Sean $k \geq 1$ y $\varepsilon > 0$. El conjunto*

$$A_k(\varepsilon) = \{u \text{ impar} : \ |R_k(u) - 2k| \leq \varepsilon k\}$$

es una unión finita de clases de congruencia, y su proporción entre los impares es al menos

$$1 - \frac{2}{\varepsilon^2 k}.$$

Demostración. Hay un número finito de vectores $(r_1, \dots, r_k)$ con $|R - 2k| \leq \varepsilon k$. Por la Proposición 5, cada uno corresponde a una clase módulo 2^{R+1}, y vectores distintos dan clases disjuntas. Refinando todas ellas a un módulo común, la proporción de $A_k(\varepsilon)$ es la suma de las proporciones 2^{-R} del Corolario 3.

Esa suma es la probabilidad de que $|X_1+\cdots+X_k-2k|\le \varepsilon k$, donde las X_j son variables independientes con $\Pr(X_j=r)=2^{-r}$. Cada X_j tiene media

$$\sum_{r\ge 1} r\,2^{-r}=2$$

y varianza 2, de modo que la suma tiene media $2k$ y varianza $2k$. Por la desigualdad de Chebyshev, la probabilidad del suceso complementario es a lo sumo $2k/(\varepsilon k)^2=2/(\varepsilon^2 k)$. $\square$

Observación 3. La identidad $u_{j+1}=u_j\cdot\dfrac{3}{2^{r(u_j)}}\Big(1+\dfrac{1}{3u_j}\Big)$ da, por composición,

$$u_k=u\cdot\frac{3^k}{2^{R_k(u)}}\prod_{j=0}^{k-1}\Big(1+\frac{1}{3u_j}\Big).$$

Para $u\in A_k(\varepsilon)$, el factor principal cumple

$$\frac{3^k}{2^{R_k(u)}}\le\Big(\frac{3}{2^{2-\varepsilon}}\Big)^k,$$

que decrece exponencialmente en k si $\varepsilon<2-\log_2 3\approx 0{,}415$. El término principal del cociente entre dos impares consecutivos es $3/2^{r(u_j)}$. Respecto de la distribución del Corolario 3, su logaritmo tiene esperanza

$$\log 3-2\log 2=\log\frac{3}{4}<0.$$

Éste es el sentido preciso en que el factor principal de cada bloque tiene media geométrica $3/4$; el factor real incluye además la corrección $1+1/(3u_j)$.

Esto no es una demostración de convergencia de las órbitas, por dos razones. El producto de los factores $1+1/(3u_j)$ sólo es próximo a 1 mientras los valores u_j sean grandes. Y, sobre todo, el Corolario 4 fija k y promedia sobre los valores iniciales: el conjunto $A_k(\varepsilon)$ cambia con k, y nada garantiza que una órbita individual permanezca en él para todo k. Como se indicó en la Observación 2, los resultados sobre tramos finitos proceden de Terras [7] y Everett [1], que los usaron para probar que casi todo entero, en el sentido de la densidad natural, tiene algún iterado menor que él mismo; véase también el panorama de Lagarias [4]. En una dirección mucho más fuerte, aunque todavía insuficiente para probar la conjetura, Tao [6] demostró que, para cualquier función f con $f(N)\to\infty$, casi todo valor inicial N, en el sentido de la densidad logarítmica, tiene una órbita cuyo mínimo es menor que $f(N)$.

Esta jerarquía de clases de congruencia proporciona una manera natural de reemplazar los colores por un etiquetado más fino: al impar u se le asocia el entero $r(u)$, que mide cuántas divisiones por 2 compensan el factor de crecimiento $3u+1$.

8. Conclusión y programa de estudio

La comparación entre las columnas terminales de las dos tablas no identifica ambos tipos de pares verdes. Lo que revela es su posición dentro de un mismo bloque:

$$\boxed{u\equiv 1 \pmod 4 \implies \underbrace{3u+1}_{v_2\ge 2}\longmapsto\cdots\longmapsto\underbrace{2\,T(u)}_{v_2=1}\longmapsto T(u).}$$

El impar verde u genera el número $3u+1$, que abre la columna de pares, y el par verde $2\,T(u)$ la cierra. Con la convención S, ambos extremos coinciden exactamente cuando $u\equiv 1 \pmod 8$.

El objeto reducido más natural es, por tanto, el mapa acelerado T de (1), acompañado de la función de longitud

$$r(u) = v_2(3u+1),$$

cuyo valor queda determinado por la clase de u módulo 2^{r+1} según la Proposición 4. Toda órbita de Collatz queda entonces descrita como una sucesión de bloques

$$u_j \longmapsto 3u_j + 1 \longmapsto \cdots \longmapsto 2\,u_{j+1} \longmapsto u_{j+1}, \qquad u_{j+1} = T(u_j).$$

El Corolario 3 describe la distribución de los tramos finitos de longitudes respecto de los valores iniciales. Una continuación posible consiste en estudiar la sucesión completa $(r(u_j))_{j\geq 0}$ a lo largo de órbitas concretas en $\mathcal{U}$ y compararla con esa distribución. Este estudio no probaría por sí mismo la conjetura de Collatz, pero expresaría de manera exacta la información dinámica que las dos tablas originales distribuyen entre sus columnas: el salto entre impares y el número de divisiones por 2 que intervienen entre ambos.

Referencias

[1] C. J. Everett, Iteration of the number-theoretic function $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+2$, *Advances in Mathematics* **25** (1977), 42–45.

[2] A. V. Kontorovich y J. C. Lagarias, Stochastic models for the $3x+1$ and $5x+1$ problems and related problems, en *The Ultimate Challenge: The* $3x+1$ *Problem* (J. C. Lagarias, ed.), American Mathematical Society, 2010, 131–188.

[3] A. V. Kontorovich e Y. G. Sinai, Structure theorem for (d, g, h)-maps, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (N.S.)* **33** (2002), 213–224.

[4] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem and its generalizations, *American Mathematical Monthly* **92** (1985), 3–23.

[5] Y. G. Sinai, Statistical $(3x+1)$ problem, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **56** (2003), 1016–1028.

[6] T. Tao, Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values, *Forum of Mathematics, Pi* **10** (2022), e12.

[7] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arithmetica* **30** (1976), 241–252.