

LA CONJETURA DE COLLATZ

Orden y armonía en los números de las secuencias.

Miguel Cerdá Bennassar – Abril 2023

Resumen

Si Collatz definió su conjetura inspirado en sus investigaciones para representar las funciones aritméticas mediante grafos, es posible que la solución al problema se encuentre dentro de la teoría de grafos. Si bien es imposible representar los números naturales en un grafo, sí se pueden representar grupos de números clasificados según el valor de la raíz digital.

En este escrito expongo una visión personal del problema de Collatz y su conjetura, utilizando las propiedades de la raíz digital de los números naturales y la teoría de grafos.

Palabras clave: Löthar Collatz. Conjetura de Collatz. Función de Collatz. Problema $3n+1$. Secuencia de números. Raíz digital. Teoría de grafos. Digrafo. Grafo dirigido.

Introducción

Löthar Collatz (1910-1990) fue un matemático alemán que investigó principalmente en análisis numérico, con importantes estudios y publicaciones. En su artículo de 1957, escrito en colaboración con Ulrich Snogwitz, creó el campo de la Teoría Espectral de Grafos.

Influenciado por sus profesores Landau y Schur, trató de representar las funciones aritméticas por grafos.

Para ello unía $n \rightarrow m$ cuando $f(n)=m$ y trató de encontrar funciones simples que dieran lugar a ciclos. Para ello debería tenerse números tal que $f(n)<n$ y otros con $f(m)>m$. Fue de este modo que definió la función que hoy llamamos de Collatz.

La conjetura de Collatz: Es un problema matemático no resuelto que plantea lo siguiente: para cualquier número natural, siempre se puede reducir a 1 siguiendo una serie de pasos definidos por operaciones matemáticas. Los pasos se definen de la siguiente manera: si el número es par, se divide entre 2; si es impar, se multiplica por 3 y se suma 1. La conjetura sugiere que, independientemente del número inicial, se llegará eventualmente al número 1 después de un número finito de pasos, entrando en un bucle infinito con los números 4, 2, 1, 4.

La raíz digital: Es un concepto matemático que consiste en sumar los dígitos de un número y luego volver a sumar los dígitos del resultado, y así sucesivamente, hasta obtener un solo dígito. Este último número es la raíz digital del número original. Por ejemplo, el número 123 tiene una raíz digital de 6 ($1 + 2 + 3 = 6$). Para el número 12345, su raíz digital es 6 ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, y $1 + 5 = 6$).

En la teoría de números, la raíz digital se utiliza para describir la estructura de los números y para investigar sus propiedades. La clasificación de números basada en sus raíces digitales se hace separando los números en diferentes grupos dependiendo de la suma de sus dígitos.

Simplificación: La raíz digital reduce un número a un solo dígito, lo que facilita su comparación y análisis con otros números.

Clasificación: La raíz digital permite clasificar los números en grupos según sus propiedades, lo que facilita la identificación de patrones y relaciones entre ellos.

Modularidad: La raíz digital está estrechamente relacionada con el cálculo módulo 9, lo que permite investigar la estructura de los números y encontrar relaciones y propiedades matemáticas utilizando técnicas de teoría de números.

La teoría de grafos: Es una rama de las matemáticas que estudia la relación entre objetos y las conexiones que existen entre ellos. Los objetos se representan como vértices (nodos) y las conexiones se representan como aristas (enlaces) que los conectan.

La teoría de grafos se utiliza en una amplia variedad de campos, incluyendo la informática, la ingeniería, la física, la biología, la sociología, la economía y muchas otras disciplinas.

Algunos de los problemas más importantes que se han resuelto con la teoría de grafos son los siguientes:

El problema del emparejamiento máximo. El problema del viajante de comercio. El problema de flujo máximo.

El problema de coloreo de grafos. El problema de la máxima clique.

Estos son solo algunos ejemplos de los problemas que se han resuelto con la teoría de grafos. En general, esta teoría ha sido aplicada en una amplia variedad de campos, incluyendo la informática, la ingeniería, la física, la biología y la economía, entre otros.

En términos más precisos, un grafo es una estructura abstracta que consta de un conjunto de vértices (nodos) y un conjunto de aristas (enlaces) que conectan algunos o todos los vértices. Los grafos se pueden utilizar para representar una amplia variedad de situaciones en la vida real, como redes sociales, mapas de carreteras, circuitos eléctricos, redes de transporte, relaciones entre conjuntos de datos, y mucho más.

Conjetura: Aplicando de forma iterativa la función de Collatz a un número cualquiera llegaremos al número 1.

$$F(n) \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Un ejemplo de una secuencia empezada con el número 212:

212, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Si se continúa la secuencia, el 1 itera al 4 y éste al 2 y al 1, entrando en un bucle infinito con estos números.

La misma secuencia, en la que se han sustituido los números por el valor de sus raíces digitales: 5, 7, 8, 7, 8, 4, 2, 1, 5, 7, 8, 4, 2, 1.

Grafo de las raíces digitales

En las figuras 1 y 2, los números naturales han sido organizados en 9 grupos de números pares (representados por vértices azules) y 9 grupos de números impares (representados por vértices rojos), según el valor de su raíz digital, indicado en el nodo correspondiente.

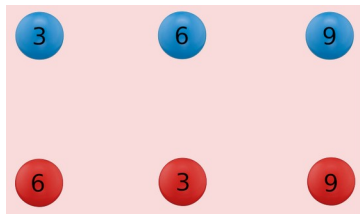


Figura 1

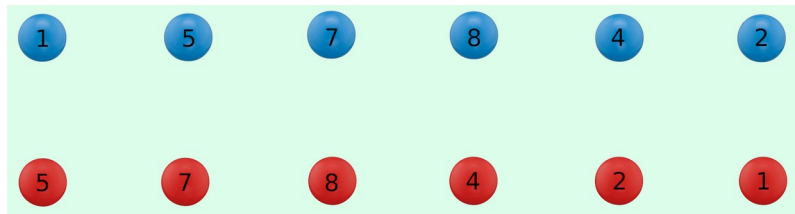


Figura 2

En las figuras 3 y 4, las aristas indican el camino que siguen los números pares en sus iteraciones hacia otros números.

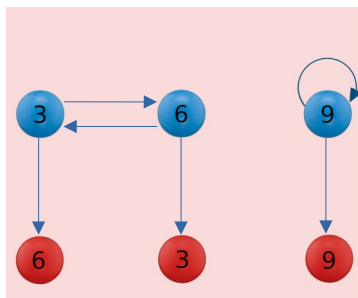


Figura 3

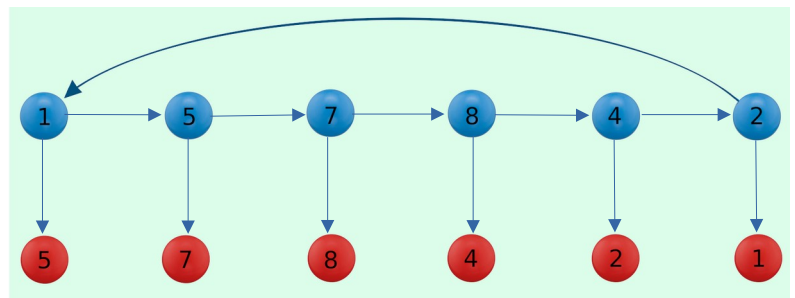


Figura 4

En las figuras 5 y 6, las aristas indican el camino que siguen los números impares en sus iteraciones hacia otros números.

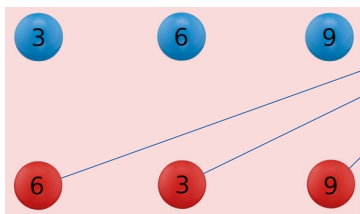


Figura 5

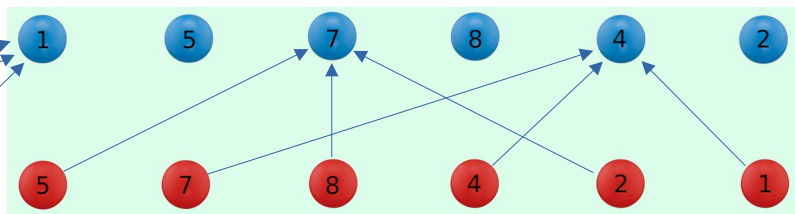
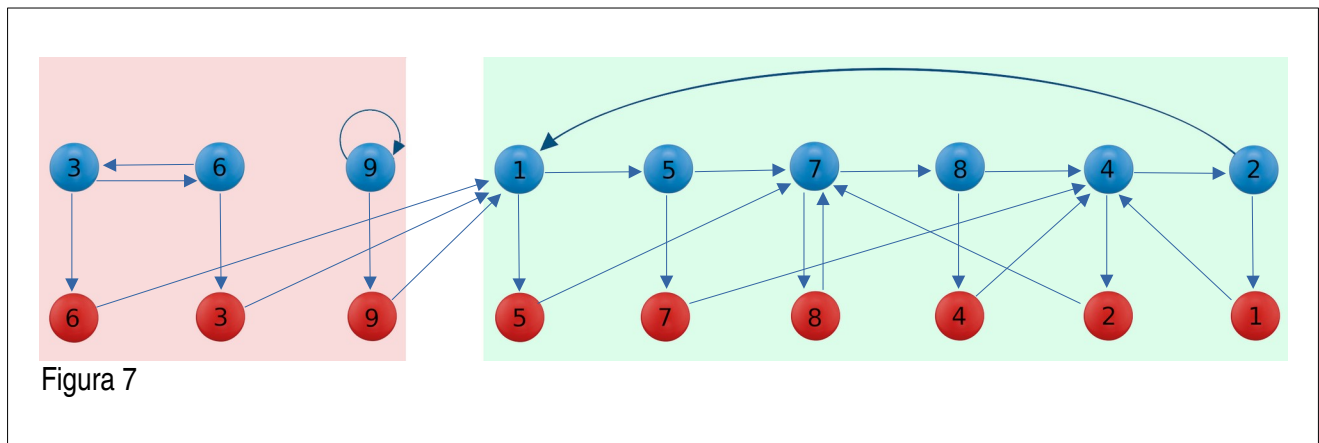


Figura 6

Figura 7. $G(18, 27)$:



Los números de los vértices (3, 6, 9) y (6, 3, 9), después de llegar a números del vértice (1), no volverán a salir en la secuencia, ya que ésta queda atrapada en los números de la figura 6.

Todos los números impares iteran hacia los vértices de números pares (1, 7, 4).

Los números impares de los vértices (6, 3, 9) iteran a números pares del vértice (1) solamente una vez.

Los números impares de los vértices (5, 7, 8, 4, 2, 1) iteran a números pares de los vértices (7, 4), lo que hace que estos números aparezcan en las secuencias con mayor frecuencia que los demás.

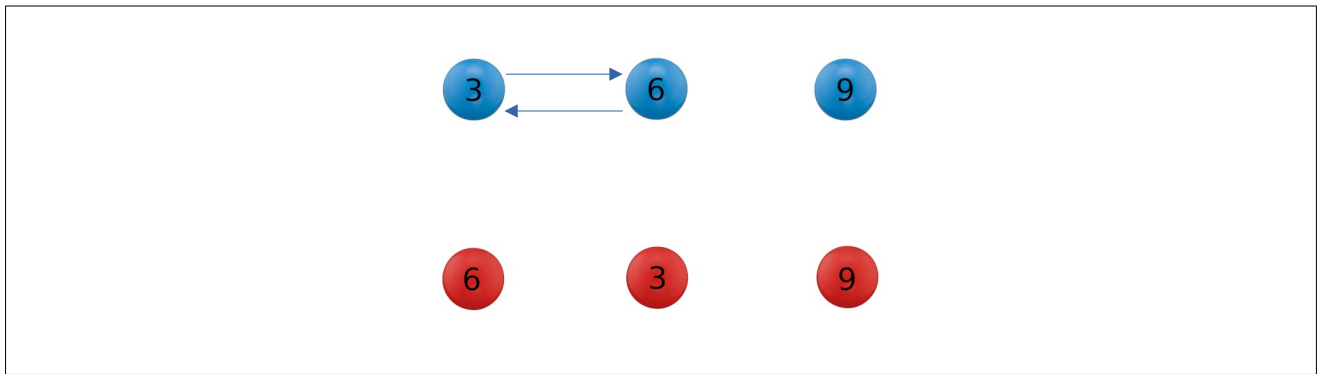
Ciclos

Al reemplazar los números de las secuencias por el valor de su raíz digital se puede observar un patrón cíclico muy definido en el desarrollo de las secuencias, el cual se repite en los siguientes ciclos:

1. (3, 6, 3), formado por dos grupos de números pares. La secuencia es decreciente.
2. (9, 9), un solo grupo de números pares y la secuencia es decreciente.
3. (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1), con seis grupos de números pares y la secuencia es decreciente.
4. (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1), cinco grupos de números pares y un grupo de números impares. La secuencia es decreciente.
5. (1, 5, 7, 4, 2, 1), cuatro grupos de números pares y un grupo de números impares. La secuencia es decreciente.
6. (7, 8, 7), un grupo de números pares y un grupo de números impares y la secuencia es creciente.
7. (1, 5, 7, 8, 4, 4, 2, 1), seis grupos de números pares y un grupo de números impares y la secuencia es decreciente.
8. (7, 8, 4, 2, 7), tres grupos de números pares y un grupo de números impares y la secuencia es decreciente.
9. (4, 2, 1, 4), dos grupos de números pares y un grupo de números impares y la secuencia es decreciente.
10. (1, 5, 7, 8, 4, 4, 2, 1), cinco grupos de números pares y dos grupos de números impares y la secuencia es decreciente.
11. (7, 8, 4, 4, 2, 7), tres grupos de números pares y dos grupos de números impares y la secuencia es decreciente.

A continuación, diagramas de estos ciclos, los números que entran en algunos y el número de circuitos que completan.

1. (3, 6, 3):



Solo entran en el ciclo los números que son inicio de la secuencia. En las siguientes tablas, los números con los que una secuencia entrará en el ciclo, el número de circuitos que completará y los factores de reducción de los números.

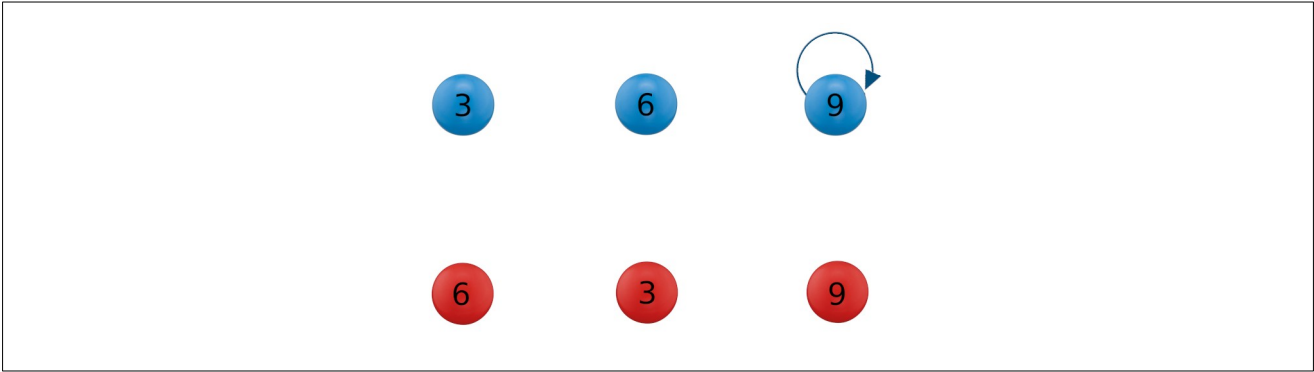
Circuito (3, 6, 3):

24(6n-1)	120, 264, 408, 552, 696, . . .	(3, 6, 3)	$1/2^3$
48(6n-5)	48, 336, 624, 912, 1200, . . .	(3, 6, 3, 6)	$1/2^4$
96(6n-1)	480, 1056, 1632, 2208, 2784, . . .	(3, 6, 3, 6, 3)	$1/2^5$
192(6n-5)	192, 1344, 2496, 3648, 4800, . . .	(3, 6, 3, 6, 3, 6)	$1/2^6$
384(6n-1)	1920, 4224, 6528, 8832, 11136, . . .	(3, 6, 3, 6, 3, 6, 3)	$1/2^7$
768(6n-5)	768, 5376, 9984, 14592, 19200, . . .	(3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6)	$1/2^8$
1536(6n-1)	7680, 16896, 26112, 35328, 44544, . . .	(3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3)	$1/2^9$
....			

Circuito (6, 3, 6):

4(6n-5)	24, 168, 312, 456, 600, . . .	(6 3 6)	$1/2^3$
48(6n-1)	240, 528, 816, 1104, 1392, . . .	(6 3 6 3)	$1/2^4$
96(6n-5)	96, 672, 1248, 1824, 2400, . . .	(6 3 6 3 6)	$1/2^5$
192(6n-1)	960, 2112, 3264, 4416, 5568, . . .	(6 3 6 3 6 3)	$1/2^6$
384(6n-5)	384, 2688, 4992, 7296, 9600, . . .	(6 3 6 3 6 3 6)	$1/2^7$
768(6n-1)	3840, 8448, 13056, 17664, . . .	(6 3 6 3 6 3 6 3)	$1/2^8$
1536(6n-5)	1536, 10752, 19968, 29184, . . .	(6 3 6 3 6 3 6 3 6)	$1/2^9$
....			

2. (9, 9):



Solo entran en el ciclo los números que son inicio de la secuencia. En la siguiente tabla, los números con los que una secuencia entrará en el ciclo, el número de circuitos que completará y los factores de reducción de los números.

Circuito (9, 9):

$36(2n-1)$	36, 108, 180, 252, 324, . . .	(9, 9)	$1/2^2$
$72(2n-1)$	72, 216, 360, 504, 648, . . .	(9, 9, 9)	$1/2^3$
$144(2n-1)$	144, 432, 720, 1008, 1296, . . .	(9, 9, 9, 9)	$1/2^4$
$288(2n-1)$	288, 864, 1440, 2016, 2592, . . .	(9, 9, 9, 9, 9)	$1/2^5$
$576(2n-1)$	576, 1728, 2880, 4032, 5184, . . .	(9, 9, 9, 9, 9, 9)	$1/2^6$
$1152(2n-1)$	1152, 3456, 5760, 8064, 10368, . . .	(9, 9, 9, 9, 9, 9, 9)	$1/2^7$
$2304(2n-1)$	2304, 6912, 11520, 16128, . . .	(9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9)	$1/2^8$
. . . .			

3. (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1):

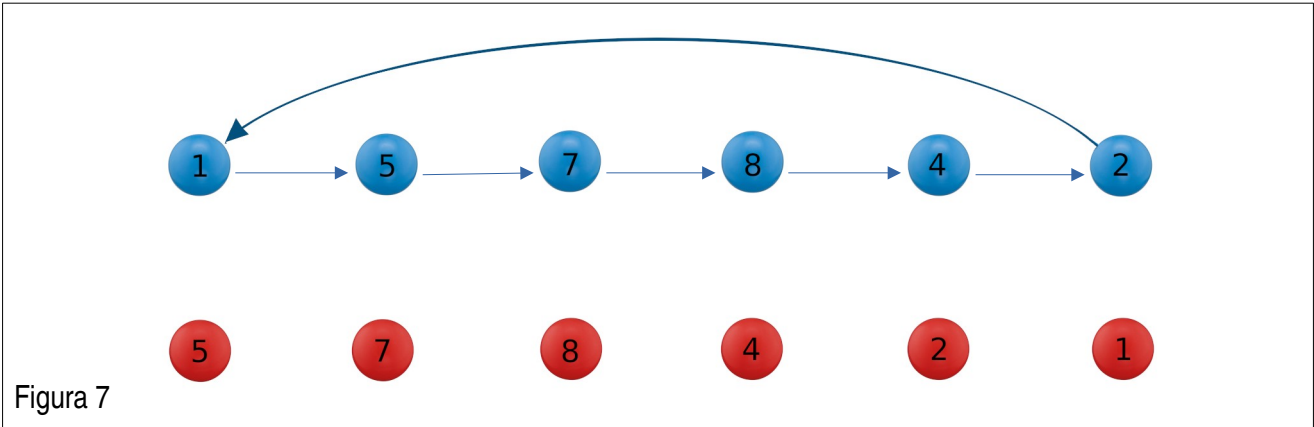


Figura 7

Este es el ciclo principal en el que todos los números pares son reducidos a la mitad en cada iteración, hasta llegar al número 1. Un número que completa el circuito una vez, se reduce en un factor de $1/2^7$. Si completa

el circuito dos veces, se reduce en un factor de $1/2^{13}$, con tres circuitos un $1/2^{19}$, etc. Los vértices de entrada al ciclo son: (1), (7) y (4), pero el número de inicio de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo. En las siguientes tablas, los números con los que una secuencia entrará en el ciclo y el número de circuitos que completará:

Circuito (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1):

Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$5 \cdot 2^{(6n+1)}$	640	40960	2621440	167772160	10737418240	...
$14 \cdot 2^{(6n+1)}$	1792	114688	7340032	469762048	30064771072	...
$23 \cdot 2^{(6n+1)}$	2944	188416	12058624	771751936	49392123904	...
$32 \cdot 2^{(6n+1)}$	4096	262144	16777216	1073741824	68719476736	...
$41 \cdot 2^{(6n+1)}$	5248	335872	21495808	1375731712	88046829568	...
...	...	...	...	...	...	...

Circuito (5, 7, 8, 4, 2, 1, 5):

Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$7 \cdot 2^{(6n+1)}$	896	57344	3670016	234881024	15032385536	...
$16 \cdot 2^{(6n+1)}$	2048	131072	8388608	536870912	34359738368	...
$25 \cdot 2^{(6n+1)}$	3200	204800	13107200	838860800	53687091200	...
$34 \cdot 2^{(6n+1)}$	4352	278528	17825792	1140850688	73014444032	...
$43 \cdot 2^{(6n+1)}$	5504	352256	22544384	1442840576	92341796864	...
...	...	...	...	...	...	...

Circuito (7, 8, 4, 2, 1, 5, 7):

Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$8 \cdot 2^{(6n+1)}$	1024	65536	4194304	268435456	17179869184	...
$17 \cdot 2^{(6n+1)}$	2176	139264	8912896	570425344	36507222016	...
$26 \cdot 2^{(6n+1)}$	3328	212992	13631488	872415232	55834574848	...
$35 \cdot 2^{(6n+1)}$	4480	286720	18350080	1174405120	75161927680	...
$44 \cdot 2^{(6n+1)}$	5632	360448	23068672	1476395008	94489280512	...
...	...	...	...	...	...	...

Circuito (8, 4, 2, 1, 5, 7, 8):

Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$4 \cdot 2^{(6n+1)}$	512	32768	2097152	134217728	8589934592	...
$13 \cdot 2^{(6n+1)}$	1664	106496	6815744	436207616	27917287424	...
$22 \cdot 2^{(6n+1)}$	2816	180224	11534336	738197504	47244640256	...
$31 \cdot 2^{(6n+1)}$	3968	253952	16252928	1040187392	66571993088	...
$40 \cdot 2^{(6n+1)}$	5120	327680	20971520	1342177280	85899345920	...
...	...	...	...	...	...	...

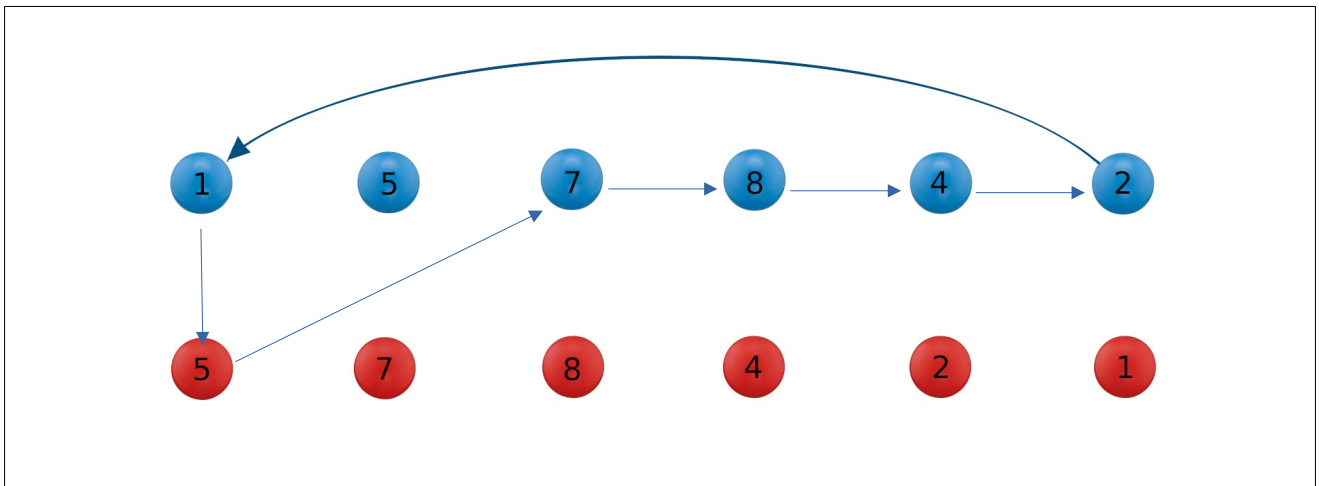
Circuito (4, 2, 1, 5, 7, 8, 4):

Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$2 \cdot 2^{(6n+1)}$	256	16384	1048576	67108864	4294967296	...
$11 \cdot 2^{(6n+1)}$	1408	90112	5767168	369098752	23622320128	...
$20 \cdot 2^{(6n+1)}$	2560	163840	10485760	671088640	42949672960	...
$29 \cdot 2^{(6n+1)}$	3712	237568	15204352	973078528	62277025792	...
$38 \cdot 2^{(6n+1)}$	4864	311296	19922944	1275068416	81604378624	...
...	...	...	...	...	...	...

Circuito (2, 1, 5, 7, 8, 4, 2):

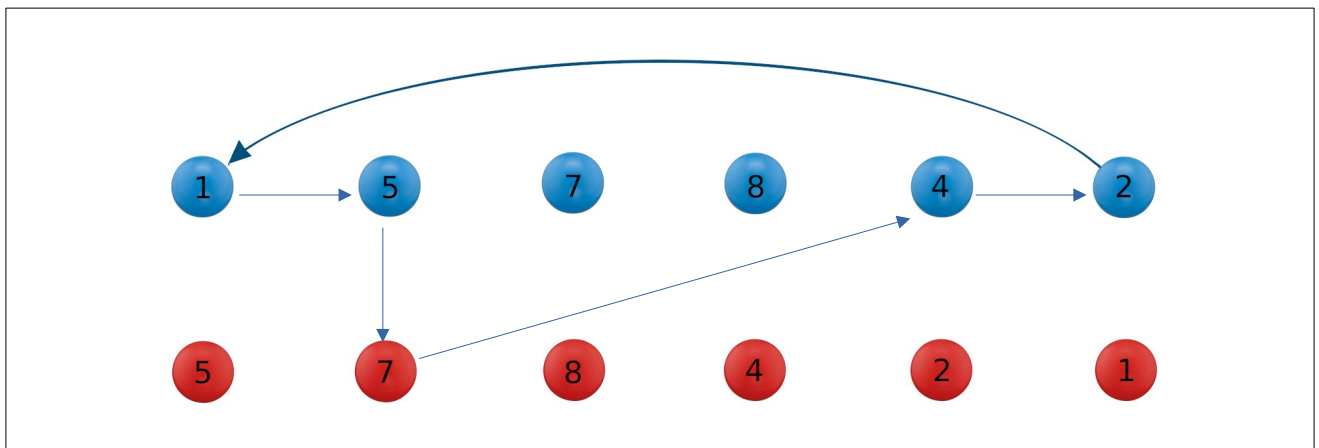
Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$2^{(6n+1)}$	128	8192	524288	33554432	2147483648	...
$10 \cdot 2^{(6n+1)}$	1280	81920	5242880	335544320	21474836480	...
$19 \cdot 2^{(6n+1)}$	2432	155648	9961472	637534208	40802189312	...
$28 \cdot 2^{(6n+1)}$	3584	229376	14680064	939524096	60129542144	...
$37 \cdot 2^{(6n+1)}$	4736	303104	19398656	1241513984	79456894976	...
...	...	...	...	...	...	...

4. (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1)



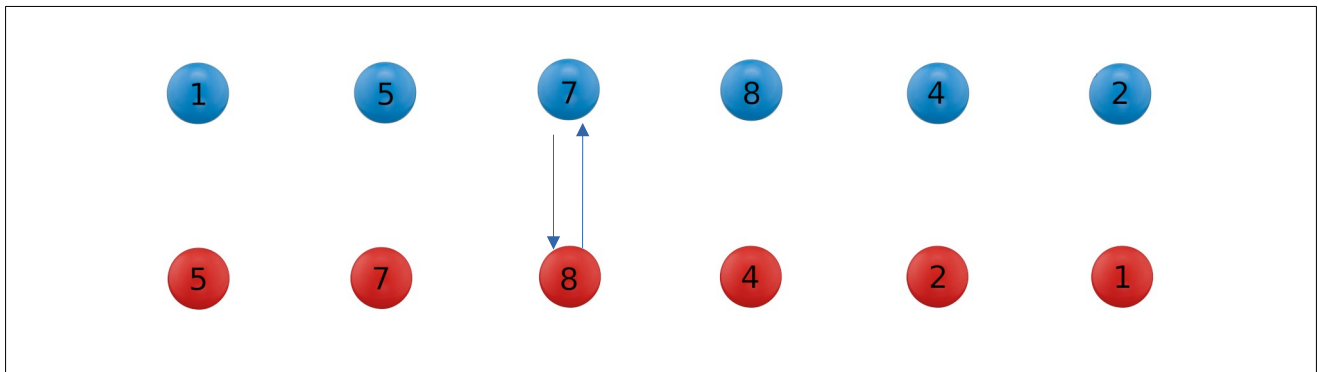
En este ciclo el número par del vértice (1), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (5), pero en la siguiente iteración llega al vértice (7). Los vértices de entrada al ciclo son: (1), (7) y (4), pero el número de inicio de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

5. (1, 5, 7, 4, 2, 1):



En este ciclo el número par del vértice (5), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (7), pero en la siguiente iteración llega al vértice (4). Los vértices de entrada al ciclo son: (1) y (4), pero el número de inicio de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

6. (7, 8, 7):



En este ciclo el número par del vértice (7), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (8), pero en la siguiente iteración es devuelto al mismo vértice. Esto ocurrirá hasta que la iteración llegue a un número par del vértice (8), reconduciendo a la secuencia en el ciclo principal. El vértice de entrada al ciclo es el (7), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquiera de los dos vértices.

Todos los números $72n-38$ completan un circuito. Los $144n-74$ completan dos circuitos. Los $288n-146$ completan tres circuitos, y así sucesivamente. La secuencia es creciente.

Para conocer el primer número de cada serie y el número de circuitos que completan en el ciclo:

$$C(n)=2(9 \times 2^{n-1}) \rightarrow 34, 70, 142, 286, 574, \dots$$

$$\text{Circuitos completados} \rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$$

<u>Números</u>	<u>Circuitos completados</u>
$72n-38$ 34, 106, 178, 250, 322, ...	uno
$144n-74$ 70, 214, 358, 502, 646, ...	dos
$288n-146$ 142, 430, 718, 1006, 1294, ...	tres
$576n-290$ 286, 862, 1438, 2014, 2590, ...	cuatro
...	...

Algunos ejemplos de secuencias que completan el ciclo:

430, 215, 646, 323, 970, 485, 1456, 728, 364, 182, 91, ...

7 8 7 8 7 8 7 8 4 2 1 tres circuitos.

1150, 575, 1726, 863, 2590, 1295, 3886, 1943, 5830, 2915, 8746, 4373, 13120, ...

7 8 7 8 7 8 7 8 7 8 7 8 7 seis circuitos.

Circuito (8, 7, 8):

Todos los números $72n-37$ completan un circuito. Los $144n-73$ completan dos circuitos. Los $288n-145$ completan tres circuitos, y así sucesivamente. Solo es posible con el primer número de la secuencia.

$$C(n)=9 \times 2^{(n+1)}-1 \rightarrow 35, 71, 143, 287, 575, \dots$$

$$\text{Circuitos completados} \rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$$

Números

72n-37 35, 107, 179, 251, 323, ...
144n-73 71, 215, 359, 503, 647, ...
288n-145 143, 431, 719, 1007, 1295, ...
576n-289 287, 863, 1439, 2015, 2591, ...
...

Circuitos completados

uno
dos
tres
cuatro
...

Algunos ejemplos de secuencias que completan el ciclo:

719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, ...

8 7 8 7 8 7 8

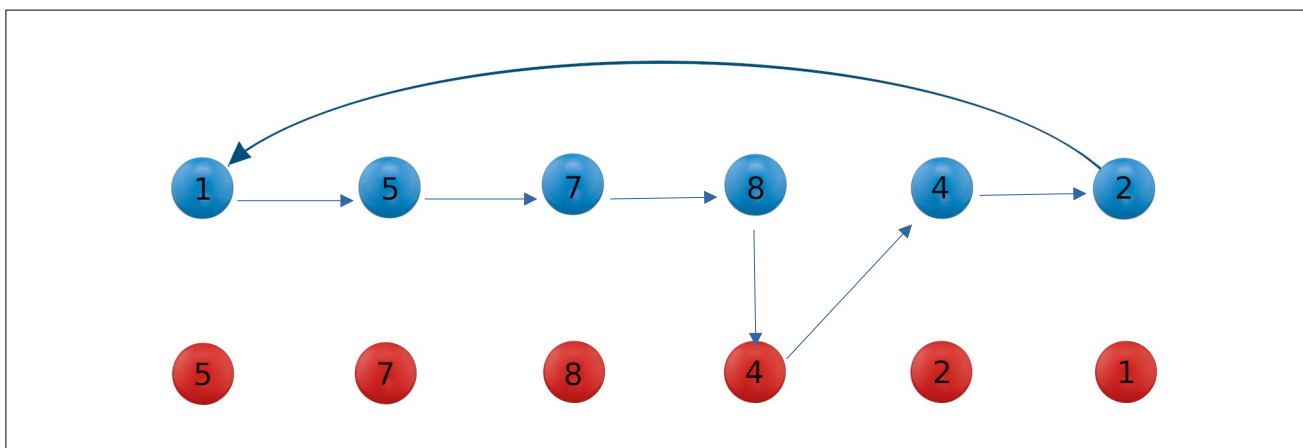
tres circuitos.

1439, 4318, 2159, 6478, 3239, 9718, 4859, 14578, 7289, 21868, 10934, ...

8 7 8 7 8 7 8 7 8

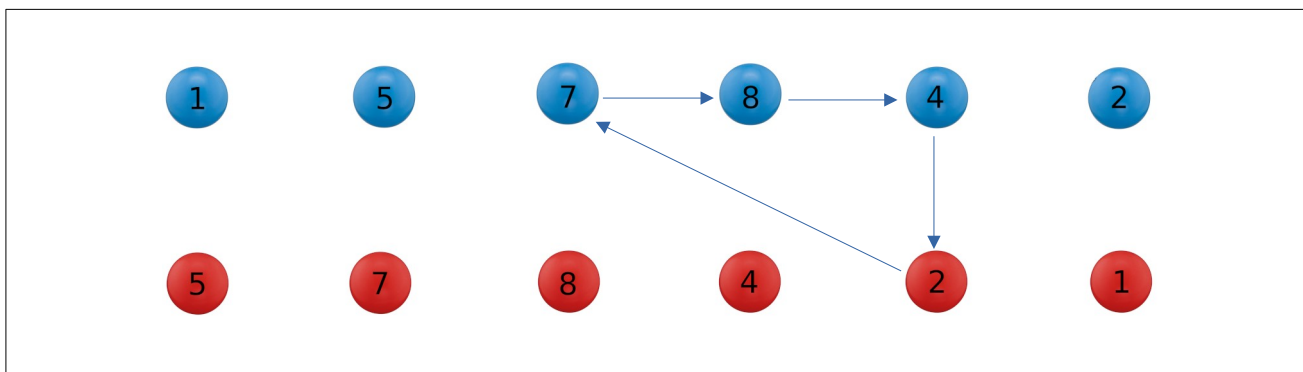
cuatro circuitos.

7. (1, 5, 7, 8, 4, 4, 2, 1):



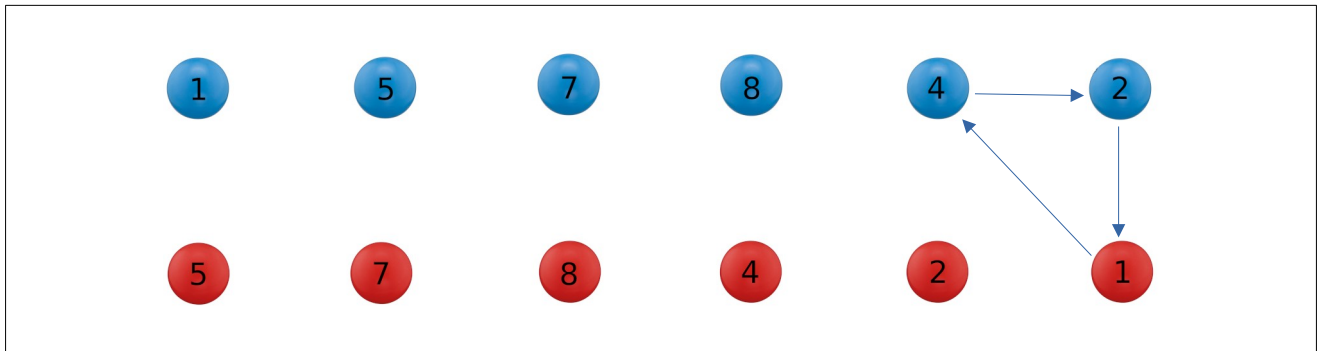
En este ciclo el número par del vértice (8), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (4), pero en la siguiente iteración llega al vértice (4). Los vértices de entrada al ciclo son: (1), (7) y (4), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

8. (7, 8, 4, 2, 7):



En este ciclo el número par del vértice (4), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (2), pero en la siguiente iteración es devuelto al vértice (7). Esto ocurrirá hasta que la iteración llegue a un número par del vértice (2), reconduciendo la secuencia en el ciclo principal. Los vértices de entrada al ciclo son: (7) y (4), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

9. (4, 2, 1, 4):



En este ciclo el número par del vértice (2), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (1), pero en la siguiente iteración es devuelto al vértice (4). Esto ocurrirá hasta que la iteración llegue a un número par del vértice (1), reconduciendo a la secuencia en el ciclo principal.

Todos los números $72n+4$ completan un circuito. Los $288n+4$ completan dos circuitos. Los $1152n+4$ completan tres circuitos, y así sucesivamente. La secuencia es decreciente. El vértice de entrada al ciclo es el (4), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

Para conocer el primer número de cada serie y el número de circuitos que completan en el ciclo:

$C(n)=2(9 \times 2^{(2n)}+2) \rightarrow 76, 292, 1156, 4612, 18436, \dots$
 Circuitos completados $\rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$

Números que entran en él y las veces que lo completan:

<u>Números</u>		<u>Circuitos completados</u>
$72n+4$	76, 148, 220, 292 . . .	uno
$288n+4$	292, 580, 868, 1156, . . .	dos
$1152n+4$	1156, 2308, 3460, 4612, . . .	tres
$4608n+4$	4612, 9220, 13828, 18436, . . .	cuatro
. . .	. . .	. . .

El número 4 es el único número que completa el circuito infinitas veces.

Algunos ejemplos de secuencias que completan el ciclo:

3460, 1730, 865, 2596, 1298, 649, 1948, 974, 487, 1462, 731, 2194, . . .

4 2 1 4 2 1 4 2 1 4

tres ciclos.

4612, 2306, 1153, 3460, 1730, 865, 2596, 1298, 649, 1948, 974, 487, 1462, 731, ...

4 2 1 4 2 1 4 2 1 4 2 1 4

cuatro ciclos.

Circuito (2, 1, 4, 2):

Todos los números $72n+2$ completan un circuito. Los $288n+2$ completan dos circuitos. Los $1152n+2$ completan tres circuitos, y así sucesivamente. La secuencia es decreciente.

Para conocer el primer número de cada serie y el número de circuitos que completan en el ciclo:

$C(n)=2(9 \times 2^{(2n)+1}) \rightarrow 74, 290, 1154, 4610, 18434, \dots$

Circuitos completados $\rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$

Números que entran en él y las veces que lo completan:

<u>Números</u>		<u>Circuitos completados</u>
$72n+2$	74, 146, 218, ...	uno
$288n+2$	290, 578, 866, ...	dos
$1152n+2$	1154, 2306, 3458, ...	tres
$4608n+2$	4610, 9218, 13826, 18434, ...	cuatro
...	...	...

Algunos ejemplos de secuencias que completan el ciclo:

866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, ...

2 1 4 2 1 4 2

dos ciclos.

2306, 1153, 3460, 1730, 865, 2596, 1298, 649, 1948, 974, 487, 1462,

2 1 4 2 1 4 2 1 4 2

tres ciclos.

Circuito (1, 4, 2, 1):

Todos los números $72n+1$ completan un circuito. Los $288n+1$ completan dos circuitos. Los $1152n+1$ completan tres circuitos, y así sucesivamente. La secuencia es decreciente.

Para conocer el primer número de cada serie y el número de circuitos que completan en el ciclo:

$C(n)=9 \times 2^{(2n+1)+1} \rightarrow 73, 289, 1153, 4609, 18433, \dots$

Circuitos completados $\rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$

Números que entran en él y las veces que lo completan:

<u>Números</u>		<u>Circuitos completados</u>
$72n+1$	73, 145, 217, 289, 361, ...	uno
$288n+1$	289, 577, 865, 1153, 1441, ...	dos
$1152n+1$	1153, 2305, 3457, 4609, ...	tres
$4608n+1$	4609, 9217, 13825, 18433, ...	cuatro
...	...	...

Algunos ejemplos de secuencias que completan el ciclo:

217, 652, 326, 163, 490, 245, 736, 368, 184, 92, 46, 23, ...

1 4 2 1 4 2

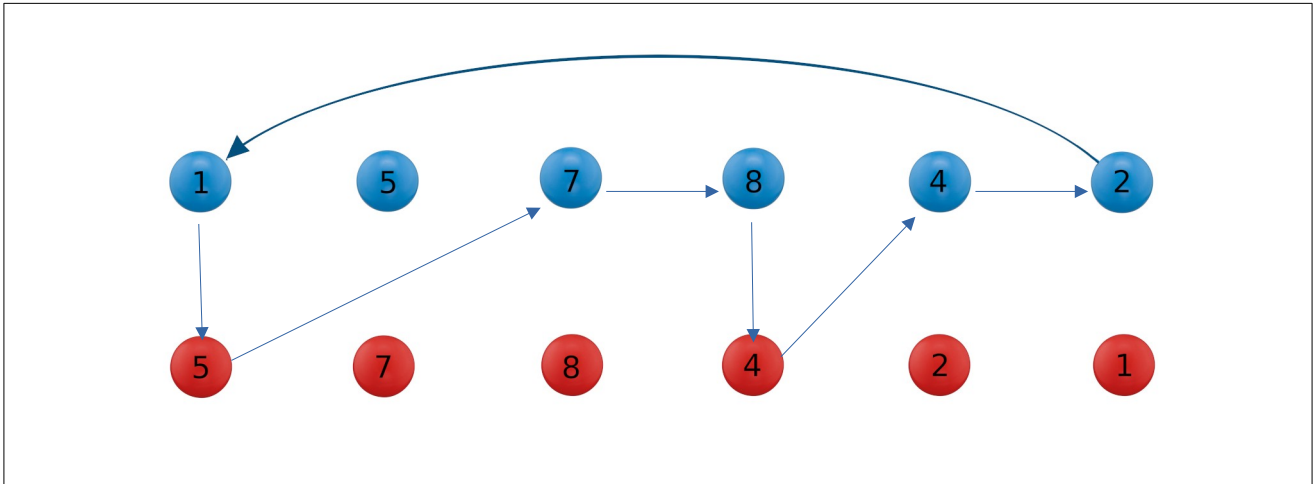
un ciclo

865, 2596, 1298, 649, 1948, 974, 487, 1462, 731, 2194, ...

1 4 2 1 4 2 1

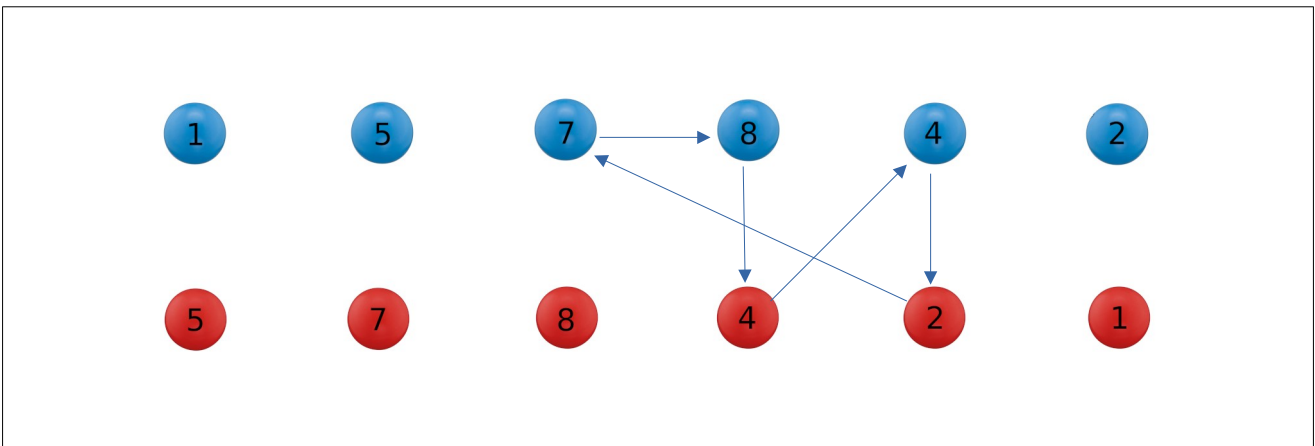
dos ciclos

10. (1, 5, 7, 8, 4, 4, 2, 1)



En este ciclo ocurre lo mismo con los vértices (5) y (4). Los vértices de entrada al ciclo son: (1), (7) y (4), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

11. (7, 8, 4, 4, 2, 7):



En este ciclo ocurre lo mismo con los vértices (4) y (2). Los vértices de entrada al ciclo son: (7) y (4), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

Axiomas

1. En los 18 vértices del grafo están representados todos los números naturales.
4. Todos los ciclos provocan que las secuencias sean decrecientes a la salida, excepto el ciclo número 6 (7, 8, 7) que hace que las secuencias sean crecientes.
5. En el ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1), los números $4n-2$ iteran a números impares, pero en la siguiente iteración vuelven a los vértices de números pares (7) y (4), entrando de nuevo en el ciclo principal donde son reducidos a la mitad.
6. Las iteraciones de los números de los vértices (7) y (4) son $(7) \rightarrow (8) \rightarrow (4) \rightarrow (2)$, porque:
Los números del vértice (7) pueden ir a números del vértice (8), que vuelven al vértice (7).
Los números del vértice (8) pueden ir a números del vértice (4), que llegan al vértice (4).
Los números del vértice (4) pueden ir a números del vértice (2), que llegan al vértice (7).
7. En algún momento los números de la secuencia iteran a números del vértice (2).
8. Los números del vértice (2) iteran a números del vértice (1) y a números del vértice (1).
Cuando lo hacen a números del vértice (1), la secuencia puede finalizar llegando al número 1 o iterar a un número del vértice (4), que volverá al vértice (2). Cuando iteran a números del vértice (1), la secuencia entra en un nuevo ciclo, al final del cual llegará de nuevo a números del vértice (2) y el ciclo se repetirá o la secuencia acabará.
9. En cada iteración de un número par, éste se reduce a la mitad, lo que hace que la secuencia sea decreciente en ese punto, por lo que cuantos más vértices de números pares haya con más de una arista entrante, más veces la secuencia pasará por ellos y más decreciente será. Estos vértices son el (7) y el (4), cada uno con cuatro aristas entrantes, mientras que los demás vértices solo tienen una arista entrante.

Conclusión

Las secuencias siempre son decrecientes a la salida de los ciclos, excepto del ciclo número 6 (7, 8, 7), que son crecientes.

Los vértices de números pares (7) y (4) tienen grado de entrada 4, mientras que los otros vértices, incluidos los de los números impares, tienen grado de entrada 1.

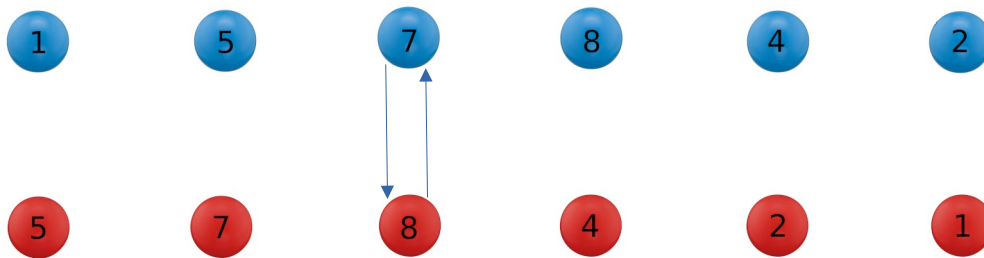
Todas las secuencias se desarrollan en un ciclo cerrado en el que los números pares son divididos entre 2 y aunque los números $4n-2$ provocan las salidas del ciclo hacia los números impares, en la siguiente iteración la secuencia vuelve a entrar en el ciclo principal por los vértices (7) y (4). Estos números provocan desorden y ausencia de un patrón aparente en las secuencias, pero el ciclo es el mismo, aunque la secuencia tarde más en su recorrido.

Todas las secuencias llegarán hasta el ciclo 4, 2, 1, 4 y seguirán en él de manera infinita.

A continuación un ejemplo de la secuencia empezada con el número 343 y los diferentes ciclos que recorre:

343, 1030, 515, 1546, 773, 2320, 1160, 580, 290, 145, 436, 218, 109, 328, 164, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

6. (7, 8, 7):



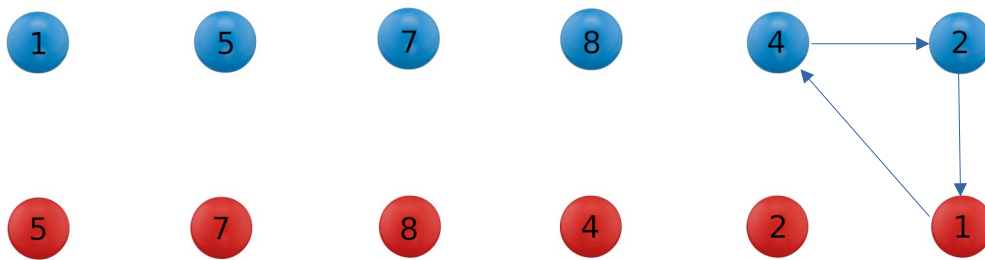
Números: 1546, 773, 2320, 1160, ... 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, ...
 Raíz digital: (7 8 7) (7 8 7 8 7 8 7)

790, 395, 1186, 593, 1780, 890 ... 502, 251, 754, 377, 1132, 566, ...
 (7 8 7 8 7) (7 8 7 8 7)

1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, ...
 (7 8 7 8 7 8 7 8 7)

2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, ... 70, 35, 106, 53, 160, 80, ...
 (7 8 7 8 7 8 7) (7 8 7 8 7)

9. (4, 2, 1, 4):

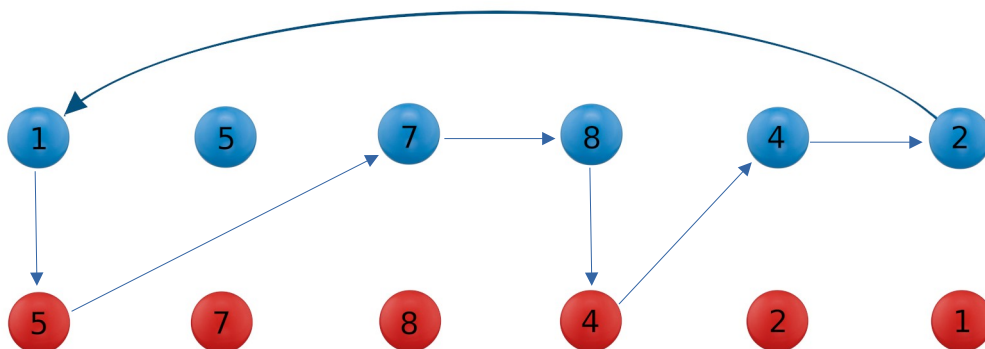


Números: 580, 290, 145, 436, 218, 109, 328, 164, ... 364, 182, 91, 274, 137, ...

Raíz digital: (4 2 1 4 2 1 4) (4 2 1 4)

2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, ... 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
(4 2 1 4 2 1 4 2 1 4) (4 2 1 4 2 1 4 2 1 ...)

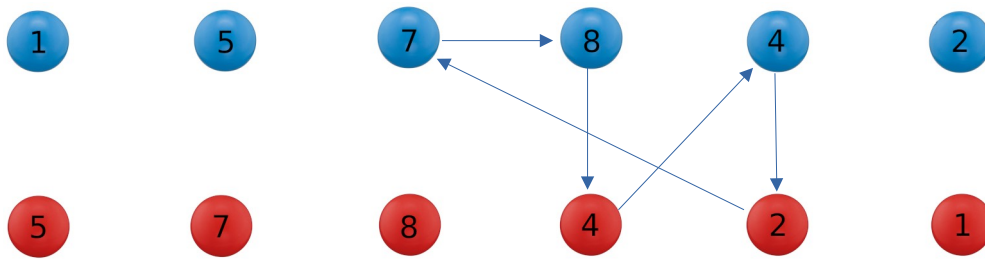
10. (4, 2, 1, 5, 7, 8, 4, 4)



Números: 328, 164, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, ...

Raíz digital: (4 2 1 5 7 8 4 4)

11. (7, 8, 4, 4, 2, 7):



Números: 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, ...

Raíz digital: (7 8 4 4 2 7)

412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, ...

(7 8 4 4 2 7)

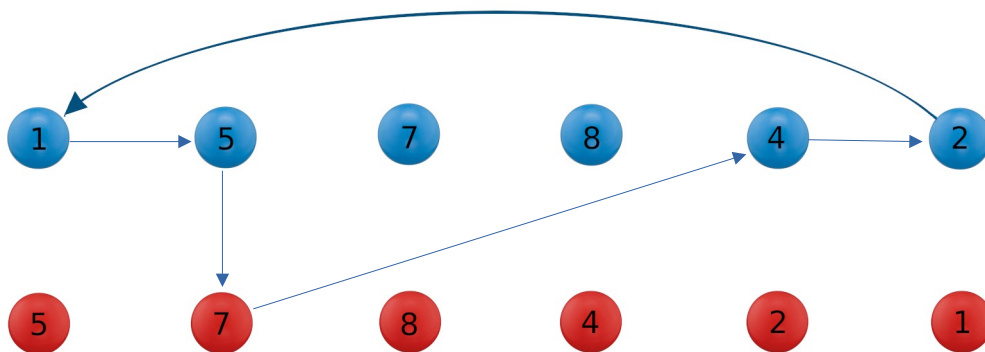
700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, ...

(7 8 4 4 2 7)

1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, ...

(7 8 4 4 2 7 8 4 4 2 7)

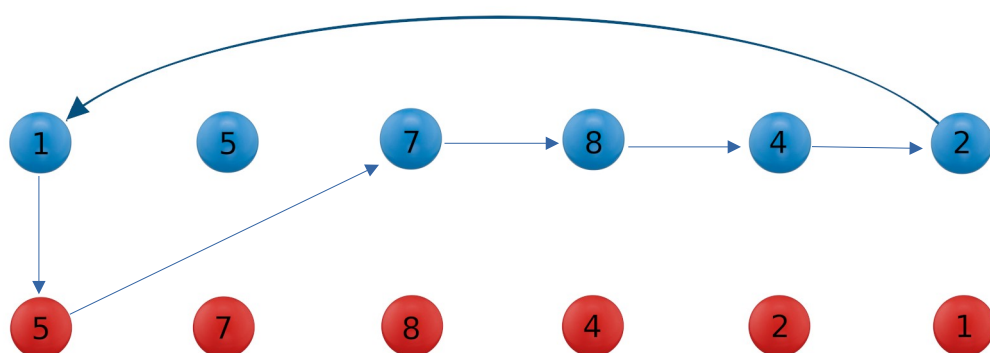
5. (1, 5, 7, 4, 2, 1):



Números: 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, ...

Raíz digital: (2 1 5 7 4 2)

4. (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1)



Números: 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, ...
Raíz digital: (8 4 2 1 5 7 8)