Tramos impares y pares de Collatz: tablas y triángulos 2-ádicos

Miguel Cerdá Bennassar

2025, revisado en noviembre de 2026

Índice general

Lista de figuras **3**

Resumen **4**

1. Introducción **5**

2. Operadores y valoraciones **6**
2.1. El operador impar acelerado 6
2.2. El puente clásico 6
2.3. Dos valoraciones distintas 7

3. La Tabla de Impares **8**
3.1. Construcción 8
3.2. Ejemplo: primeras columnas 8
3.3. Enlace con la Tabla de Pares 9

4. La familia de triángulos $T(a)$ **10**
4.1. Construcción 10
4.2. Relaciones entre posiciones 11
4.3. Partición y localización 11
4.4. Las columnas de la Tabla de Impares en la familia 12

5. Genealogías y puentes 2-ádicos **13**
5.1. Genealogía directa y grafo de F 13
5.2. Antecesores 13
5.3. Puentes y filas 14

6. Transiciones entre filas **15**
6.1. La fila del siguiente impar 15
6.2. Los enlaces de F dentro de las filas 16
6.3. Congruencias finitas 16

7. Tramos y codificación de las órbitas **17**
7.1. Tramos impares y pares 17
7.2. El salto entre rachas 17

7.3. Balance de una órbita 18
7.4. El ciclo conocido y el alcance 18

8. La familia par y su enlace con la familia impar 19
8.1. Definición 19
8.2. Correspondencia con la Tabla de Pares 19
8.3. Encuentro de las dos familias 19

9. Cálculos en trayectorias concretas 21
9.1. Valoraciones módulo potencias de 2 21
9.2. Colas pares largas 21
9.3. La órbita de 27 21
9.4. Encabezados de Mersenne 21
9.5. Reconstrucción a partir de los impares 22

10. Alcance y líneas abiertas 23
10.1. Resultados 23
10.2. Límites 23
10.3. Cuestiones abiertas 23

A. Terminología y notación 24

B. Tabla de Impares 25

C. Tabla de Pares 26

D. Triángulos $T(0)$ y $T(4)$ 27

E. Triángulo par $T(1)$ 29

F. La trayectoria de 127 en los triángulos 30

Índice de figuras

B.1. Tabla de Impares de S. Cada columna comienza en un impar, recorre su racha de impares consecutivos y termina en el primer par. 25

C.1. Tabla de Pares de S. La columna encabezada por cada par v contiene sus divisiones sucesivas por 2 hasta alcanzar el primer impar. 26

D.1. Triángulo $T(0)$. Para $r \geq 1$, la fila r es la columna de la Tabla de Impares encabezada por $2^r - 1$ y termina en el par $3^r - 1$. 27

D.2. Triángulo $T(4)$. Para $r \geq 1$, la fila r es la columna de la Tabla de Impares encabezada por $5 \cdot 2^r - 1$ y termina en el par $5 \cdot 3^r - 1$. 28

E.1. Triángulo par $T(1)$. Los tramos de la Tabla de Pares ocupan segmentos de columnas que se leen de abajo arriba. Por ejemplo, $12 \to 6 \to 3$ ocupa un segmento de la segunda columna. 29

F.1. Recorrido de 127 en los triángulos, con rachas impares horizontales y divisiones pares verticales. 31

Resumen

Se presentan dos representaciones tabulares de la función simplificada de Collatz

$$S(n) = \begin{cases} (3n+1)/2, & n \text{ impar}, \\ n/2, & n \text{ par}, \end{cases}$$

que organizan sus rachas de impares consecutivos y sus cadenas de divisiones de pares. Las rachas impares se disponen en las filas de la familia de triángulos $T(a)$, con $a \equiv 0$ o $4 \pmod 6$, cuyos elementos

$$x_{a,r,j} = 2^{r-j}3^j(a+1) - 1, \qquad 0 \le j \le r,$$

forman una partición de los enteros no negativos. Cada racha impar es una fila completa o el final de una fila, y la posición de cada número se obtiene de la factorización $n+1 = 2^\alpha 3^\beta q$, con q primo con 6. Las cadenas de divisiones de pares ocupan segmentos verticales, leídos de abajo arriba, en una segunda familia de triángulos.

Se describen las transiciones entre filas y entre triángulos, y se distingue esta descomposición de los enlaces del operador impar acelerado $F(m) = (3m+1)/2^{\nu_2(3m+1)}$. Una racha impar completa y su cola par determinan el salto $G(m) = F^{\nu_2(m+1)}(m)$. Las fórmulas describen exactamente las figuras y sus relaciones con las órbitas; no se obtiene de ellas una prueba de convergencia universal.

Capítulo 1

Introducción

La función clásica de Collatz se define por

$$C(n) = \begin{cases} 3n+1, & n \text{ impar}, \\ n/2, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Su versión simplificada S incorpora una división por dos en el paso impar. Ambas visitan la misma sucesión de impares, que describe el operador acelerado

$$F(m) = \text{odd}(3m+1) = \frac{3m+1}{2^{\nu_2(3m+1)}},$$

donde $\text{odd}(x)$ es la parte impar de x. Los tres operadores se usarán con propósitos distintos: C muestra todos los pasos clásicos, S genera las dos tablas de este escrito y F registra los enlaces entre impares consecutivos.

La Tabla de Impares comienza una columna en cada impar m y aplica S hasta obtener el primer par. La Tabla de Pares comienza una columna en cada par y divide sucesivamente por dos hasta obtener el primer impar. La salida de una columna de una tabla es la entrada de una columna de la otra, y esta alternancia reconstruye las órbitas de S.

Las figuras triangulares reorganizan esas columnas. En la familia impar $T(a)$, cada número entero no negativo ocupa una posición única, y cada racha impar se lee de izquierda a derecha a lo largo de una fila. En la familia par, cada cadena de divisiones ocupa un segmento de columna leído de abajo arriba. Los índices de ambas familias se obtienen factorizando los números que contienen.

La factorización de las rachas mediante $m+1 = 2^n q$ y la descripción de la dinámica por valoraciones 2-ádicas son conocidas en la literatura; véanse Terras [2] y el panorama de Lagarias [1]. Este escrito organiza las rachas en dos familias de triángulos acopladas y estudia las transiciones entre ellas.

Capítulo 2

Operadores y valoraciones

2.1. El operador impar acelerado

Definición 2.1 (Operador impar acelerado)**.** Para m impar positivo definimos

$$h(m) = \nu_2(3m+1), \qquad F(m) = \frac{3m+1}{2^{h(m)}}.$$

Si $3m+1 = 2^a b$ con b impar, entonces $a = h(m)$ y $b = F(m)$; la factorización es única. Recíprocamente, la pareja $(h(m), F(m))$ determina $m = (2^{h(m)}F(m) - 1)/3$. La valoración $h(m)$ sola no determina $F(m)$, y puede variar de un enlace al siguiente.

Proposición 2.2. *Para cada impar m, si $a = h(m)$, se cumplen $C^{a+1}(m) = F(m)$ y $S^a(m) = F(m)$.*

Demostración. Tras el paso clásico $m \mapsto 3m+1$ se necesitan exactamente a divisiones por dos para obtener la parte impar. En S la primera división se incorpora al paso desde m, y siguen las $a-1$ restantes. □

Para $m > 1$, el exponente $h(m)$ determina el signo del cambio en el enlace:

$$h(m) = 1 \implies F(m) = \frac{3m+1}{2} > m, \qquad h(m) \geq 2 \implies F(m) \leq \frac{3m+1}{4} < m.$$

Este resultado se refiere al enlace actual; no impone ningún valor a $h(F(m))$.

2.2. El puente clásico

Definición 2.3 (Puente clásico)**.** Si m es impar y $a = h(m)$, el *puente clásico* de m es la sucesión de la función clásica

$$P(m) = \Big(m,\ 3m+1,\ \frac{3m+1}{2},\ \ldots,\ \frac{3m+1}{2^a}\Big),$$

cuyo último término es $F(m)$.

Los puentes clásicos consecutivos $P(m), P(F(m)), \ldots$ reconstruyen la órbita clásica desde m, identificando el impar compartido en la frontera de dos puentes. Por ejemplo, $P(5) = (5, 16, 8, 4, 2, 1)$, $P(7) = (7, 22, 11)$ y $P(27) = (27, 82, 41)$.

2.3. Dos valoraciones distintas

A cada impar m se asocian dos valoraciones que intervienen en todo el escrito:

$$n(m) = \nu_2(m+1), \qquad h(m) = \nu_2(3m+1).$$

La primera mide la longitud de la racha de impares que empieza en m bajo S (capítulo 3); la segunda mide la cola par del enlace $m \to F(m)$. Son cantidades diferentes y clasifican objetos diferentes. Por ejemplo, $n(7) = 3$ y $h(7) = 1$: la racha de 7 es $7, 11, 17, 26$, mientras que el enlace de F es $7 \to 11$.

Las dos tienen, sin embargo, la misma distribución entre los impares. Para $r \geq 1$,

$$n(m) = r \iff m \equiv 2^r - 1 \pmod{2^{r+1}},$$

y la condición $h(m) = r$ define también una única clase de impares módulo 2^{r+1}. Por tanto, cada una toma el valor r en una proporción 2^{-r} de los impares, en el sentido de la densidad natural. Además,

$$\begin{aligned} n(m) \geq 2 &\iff m \equiv 3 \pmod 4 \iff h(m) = 1, \\ n(m) = 1 &\iff m \equiv 1 \pmod 4 \iff h(m) \geq 2. \end{aligned}$$

Estos conteos se refieren al conjunto de todos los impares; no determinan las frecuencias con que una órbita individual visita cada clase.

Capítulo 3

La Tabla de Impares

3.1. Construcción

Enumeramos los impares positivos $m = 2k-1$, $k \geq 1$, y asignamos al impar m la columna k. Ponemos

$$I_m(j) = 3^j \, \frac{m+1}{2^j} - 1 \qquad (0 \leq j \leq n(m)).$$

Proposición 3.1. *Sea m impar con $m+1 = 2^n q$, q impar. Entonces $I_m(j) = 3^j 2^{n-j} q - 1$ para $0 \leq j \leq n$. Los términos $I_m(0), \ldots, I_m(n-1)$ son impares, $I_m(n) = 3^n q - 1$ es par, y $S(I_m(j)) = I_m(j+1)$ para $j < n$.*

Demostración. La fórmula es inmediata. Para $j < n$ el producto $3^j 2^{n-j} q$ es par, luego $I_m(j)$ es impar; para $j = n$ es impar, luego $I_m(n)$ es par. Finalmente, $\big(3(3^j 2^{n-j} q - 1) + 1\big)/2 = 3^{j+1} 2^{n-j-1} q - 1$. □

La columna de m es, por tanto, la racha de m bajo S: contiene $n(m)$ impares consecutivos y el primer par que los sigue. Esta definición se aplica también a $m = 1$, cuya columna es $1, 2$.

3.2. Ejemplo: primeras columnas

encabezado m	1	3	5	7	9
$j = 0$	1	3	5	7	9
$j = 1$	2	5	8	11	14
$j = 2$		8		17	
$j = 3$				26	

Se leen así las cadenas $1 \to 2$, $3 \to 5 \to 8$, $5 \to 8$, $7 \to 11 \to 17 \to 26$ y $9 \to 14$. Los encabezados m y $m+2$ pertenecen a clases opuestas módulo 4, de modo que una de las dos columnas tiene un solo impar y la otra al menos dos.

3.3. Enlace con la Tabla de Pares

La Tabla de Pares asigna a cada par $v = 2^r u$, con u impar y $r \geq 1$, la columna $v, v/2, \ldots, v/2^r = u$. Al recorrer una órbita de S se lee una columna de la Tabla de Impares hasta su par final v; después, la columna de la Tabla de Pares encabezada por v hasta su impar final $u = \text{odd}(v)$; y desde u comienza la columna impar siguiente. Por ejemplo, la continuación de la columna de 7 por ambas tablas es

$$7 \to 11 \to 17 \to 26 \to 13 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1,$$

donde los segmentos $26 \to 13$, $20 \to 10 \to 5$ y $8 \to 4 \to 2 \to 1$ se leen en la Tabla de Pares. El enlace puede llevar a un encabezado mayor o menor; la tabla no establece por sí sola una deriva global de la órbita. Las dos tablas se reproducen en los apéndices B y C.

Capítulo 4

La familia de triángulos $T(a)$

4.1. Construcción

Sea

$$\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : a \equiv 0 \text{ o } 4 \pmod 6\},$$

de modo que, para $a \in \mathcal{A}$, el número $a+1$ es impar y no es divisible por 3. Numeramos las filas desde $r = 0$ y las posiciones dentro de cada fila desde $j = 0$.

Definición 4.1 (Triángulo $T(a)$)**.** Para $a \in \mathcal{A}$, el triángulo $T(a)$ está formado por los números $x_{a,r,j}$, con $r \geq 0$ y $0 \leq j \leq r$, determinados por

$$x_{a,0,0} = a, \qquad x_{a,r+1,0} = 2x_{a,r,0} + 1, \tag{4.1}$$

$$x_{a,r,j} = x_{a,r,j-1} + x_{a,r-1,j-1} + 1 \qquad (1 \leq j \leq r). \tag{4.2}$$

La fila r es $F_{a,r} = (x_{a,r,0}, \ldots, x_{a,r,r})$. La fila $F_{a,0} = (a)$ es el vértice.

La regla (4.1) construye la primera columna, y la regla aditiva (4.2) construye cada fila de izquierda a derecha: cada elemento es la suma del situado a su izquierda y del situado encima de este, más una unidad.

Proposición 4.2 (Fórmula cerrada)**.** *Para $a \in \mathcal{A}$, $r \geq 0$ y $0 \leq j \leq r$,*

$$x_{a,r,j} = 2^{r-j}3^{j}(a+1) - 1.$$

Demostración. De la primera columna se obtiene por inducción $x_{a,r,0} + 1 = 2^r(a+1)$. Si la fórmula vale en la columna $j-1$, la regla aditiva da

$$x_{a,r,j} = \left(2^{r-j+1}3^{j-1}(a+1) - 1\right) + \left(2^{r-j}3^{j-1}(a+1) - 1\right) + 1 = 2^{r-j}3^{j}(a+1) - 1. \qquad \square$$

Comentario 4.3. Con $u_{a,r,j} = x_{a,r,j} + 1$, la regla aditiva se convierte en la regla homogénea $u_{a,r,j} = u_{a,r,j-1} + u_{a,r-1,j-1}$, y la fórmula cerrada en $u_{a,r,j} = 2^{r-j}3^{j}(a+1)$. La regla recuerda a la del triángulo de Pascal, pero no coincide con ella.

4.2. Relaciones entre posiciones

Proposición 4.4. *Para los índices en que ambos lados están definidos:*

$$\begin{aligned} x_{a,r,j+1} &= \frac{3x_{a,r,j}+1}{2} && (j < r), && \textit{(horizontal)} \\ x_{a,r+1,j} &= 2x_{a,r,j}+1 && (j \le r), && \textit{(vertical)} \\ x_{a,r+1,j+1} &= 3x_{a,r,j}+2 && (j \le r). && \textit{(diagonal)} \end{aligned}$$

Demostración. Basta sustituir la fórmula cerrada. La relación horizontal se obtiene también de la construcción, sin la fórmula cerrada: por la relación vertical, $x_{a,r-1,j} = (x_{a,r,j}-1)/2$, y sustituyendo en (4.2) en la posición $j+1$,

$$x_{a,r,j+1} = x_{a,r,j} + \frac{x_{a,r,j}-1}{2} + 1 = \frac{3x_{a,r,j}+1}{2}. \qquad \square$$

La relación horizontal es un paso efectivo de S. Las relaciones vertical y diagonal, con $f(x) = 2x+1$ y $g(x) = 3x+2$, relacionan celdas de filas distintas y son identidades algebraicas, no pasos de una órbita.

Teorema 4.5 (Las filas son rachas)**.** *Para $a \in \mathcal{A}$ y $r \ge 1$, los elementos $x_{a,r,0}, \ldots, x_{a,r,r-1}$ son impares, $x_{a,r,r} = 3^r(a+1)-1$ es par, y cada elemento es la imagen por S del anterior. La fila $F_{a,r}$ es, por tanto, la racha de $x_{a,r,0}$ bajo S, es decir, la columna de la Tabla de Impares encabezada por $x_{a,r,0}$.*

Demostración. Como $a+1$ es impar, $2^{r-j}3^j(a+1)$ es par para $j < r$ e impar para $j = r$. El resto es la relación horizontal. $\square$

Proposición 4.6 (Patrón módulo 4)**.** *Sea $r \ge 1$. En la fila $F_{a,r}$ se tiene $x_{a,r,j} \equiv 3 \pmod 4$ si $r-j \ge 2$, $x_{a,r,r-1} \equiv 1 \pmod 4$, y $x_{a,r,r}$ es par.*

Demostración. Si $r-j \ge 2$, el producto $2^{r-j}3^j(a+1)$ es múltiplo de 4; si $r-j = 1$, es el doble de un impar. $\square$

De acuerdo con la sección 2.3, mientras el impar es congruente con 3 módulo 4 su imagen por S es impar, y el primer impar congruente con 1 cierra la racha.

4.3. Partición y localización

Teorema 4.7 (Partición de los enteros no negativos)**.** *Cada entero $n \ge 0$ ocupa una única posición en una única fila de un único triángulo $T(a)$, $a \in \mathcal{A}$. Si*

$$n+1 = 2^\alpha 3^\beta q, \qquad \gcd(q,6) = 1,$$

la posición es $a = q-1$, $r = \alpha+\beta$, $j = \beta$.

Demostración. La factorización es única. Como q es primo con 6, $q \equiv 1$ o $5 \pmod 6$, luego $a = q-1 \in \mathcal{A}$, y $x_{a,r,j} = 2^\alpha 3^\beta q - 1 = n$. Recíprocamente, toda representación

$n = 2^{r-j}3^j(a+1) - 1$ con $a \in \mathcal{A}$ es una factorización de $n+1$ de esa forma, y por tanto la misma. Para $n = 0$ se obtiene $a = r = j = 0$. □

En particular, un impar n tiene $\alpha = \nu_2(n+1) \geq 1$, luego $j < r$, y ocupa la posición $j = \nu_3(n+1)$ de su fila. Es el primer elemento de su fila si y solo si $3 \nmid n+1$.

4.4. Las columnas de la Tabla de Impares en la familia

Teorema 4.8 (Columnas como sufijos de filas)**.** *Sea m impar con $m+1 = 2^n q$, q impar, y escribamos $q = 3^i q'$ con $3 \nmid q'$. La columna de la Tabla de Impares encabezada por m es el final de la fila $F_{q'-1,\,n+i}$ desde la posición i:*

$$I_m(j) = x_{q'-1,\,n+i,\,i+j} \qquad (0 \leq j \leq n).$$

En particular, la columna es una fila completa si y solo si $3 \nmid q$.

Demostración. $I_m(j) = 3^j 2^{n-j}\, 3^i q' - 1 = 2^{(n+i)-(i+j)} 3^{\,i+j} q' - 1 = x_{q'-1,\,n+i,\,i+j}$. □

Ejemplo 4.9. La columna de 11 es $11, 17, 26$. Como $12 = 2^2 \cdot 3$, se tiene $n = 2$, $q = 3$, $i = 1$ y $q' = 1$: la columna es el final de la fila $F_{0,3} = (7, 11, 17, 26)$ desde la posición 1. La columna de 23 es $23, 35, 53, 80$; como $24 = 2^3 \cdot 3$, es el final de la fila $F_{0,4} = (15, 23, 35, 53, 80)$.

Comentario 4.10 (La familia completa). Si se agrupan las columnas de la Tabla de Impares por el valor de q, sin separar los factores 3, se obtiene una familia más amplia, indexada por $q - 1$ para todo q impar, en la que cada columna es una fila completa. En esa familia los números se repiten: 11, por ejemplo, es una celda interior de la fila 3 de $T(0)$ y el encabezado de una fila de índice $q - 1 = 2$. La familia $T(a)$, $a \in \mathcal{A}$, evita la repetición; las columnas con $3 \mid q$ aparecen en ella como sufijos de filas, según el teorema 4.8.

Ejemplo 4.11. Las primeras filas de $T(0)$ y $T(4)$ son las siguientes; los triángulos completos hasta la fila 9 se reproducen en el apéndice D.

r	$T(0)$	$T(4)$
0	0	4
1	1, 2	9, 14
2	3, 5, 8	19, 29, 44
3	7, 11, 17, 26	39, 59, 89, 134
4	15, 23, 35, 53, 80	79, 119, 179, 269, 404

En $T(4)$, por ejemplo, $29 = 19 + 9 + 1$, $39 = 2 \cdot 19 + 1$ y $134 = 3 \cdot 44 + 2$.

Para un vértice fijo a, los números de $T(a)$ son los n con $n + 1 = 2^\alpha 3^\beta (a+1)$; hasta X hay del orden de $(\log X)^2$, de modo que cada triángulo, y cada unión finita de triángulos, tiene densidad natural nula. Que una proporción 2^{-r} de los impares inicie rachas de longitud r no significa que un triángulo concreto contenga una proporción positiva de ellas.

Capítulo 5

Genealogías y puentes 2-ádicos

5.1. Genealogía directa y grafo de F

Llamamos *genealogía directa* de un impar m a la órbita $(F^j(m))_{j\geq 0}$, y *perfil de valoraciones* a la sucesión $h(F^j(m))$. La genealogía está definida incluso si la órbita no llega a 1; que llegue para todo m es precisamente la conjetura de Collatz. En el grafo dirigido de los impares positivos con flechas $m \to F(m)$, cada vértice tiene una única flecha saliente, que puede etiquetarse con $h(m)$. Una genealogía es un camino del grafo, no un árbol.

Ejemplo 5.1. La genealogía de 7 es $7 \to 11 \to 17 \to 13 \to 5 \to 1$, con valoraciones $1, 1, 2, 3, 4$. La órbita de S, con los pares visibles, es $7 \to 11 \to 17 \to 26 \to 13 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. La racha $7, 11, 17, 26$ abarca varios enlaces de F.

5.2. Antecesores

Proposición 5.2. *Sea b un impar positivo. Los impares m con $F(m) = b$ son los números*

$$m_a = \frac{2^a b - 1}{3}, \qquad a \geq 1, \quad 2^a b \equiv 1 \pmod 3.$$

Si $3 \mid b$ no hay ninguno. Si $b \equiv 1 \pmod 3$ sirven los a pares, y si $b \equiv 2 \pmod 3$, los a impares; en ambos casos hay infinitos.

Demostración. $F(m) = b$ equivale a $3m + 1 = 2^a b$ con $a = h(m)$. Para que m sea entero hace falta $2^a b \equiv 1 \pmod 3$, imposible si $3 \mid b$; como $2^a \equiv (-1)^a \pmod 3$, la condición selecciona los a de una paridad. El número $2^a b - 1$ es impar, luego m_a es impar, y $3m_a + 1 = 2^a b$ tiene valoración exactamente a. □

Por tanto, el grafo inverso se ramifica. El número de preimágenes sin límite de tamaño no distingue a 1 de cualquier otro impar no divisible por 3; una noción de densidad de preimágenes exige fijar un rango y una medida.

5.3. Puentes y filas

Llamamos *puente 2-ádico* a la identidad $3m+1 = 2^{h(m)}F(m)$ que etiqueta el enlace $m \to F(m)$. Bajo S, el puente se recorre como

$$m \xrightarrow{S} 2^{h(m)-1}F(m) \xrightarrow{S} 2^{h(m)-2}F(m) \xrightarrow{S} \cdots \xrightarrow{S} F(m).$$

Si $h(m) = 1$, el primer paso ya llega a $F(m)$; si $h(m) \geq 2$, el primer término es par y los siguientes se leen en la Tabla de Pares.

Dentro de una fila de $T(a)$, todo impar que no sea el último tiene $h = 1$, y su imagen por F es el elemento siguiente de la fila. El último impar, en la posición $r-1$, tiene $h \geq 2$: su paso por S produce el par terminal, que puede requerir varias divisiones antes de alcanzar F. Así, una fila contiene enlaces de F con valoraciones diferentes.

Ejemplo 5.3. En la fila $F_{0,4} = (15, 23, 35, 53, 80)$, los impares $23, 35, 53$ tienen los puentes

$$3 \cdot 23 + 1 = 2 \cdot 35, \qquad 3 \cdot 35 + 1 = 2 \cdot 53, \qquad 3 \cdot 53 + 1 = 2^5 \cdot 5,$$

con valoraciones $1, 1, 5$. La genealogía es $23 \to 35 \to 53 \to 5 \to 1$, y el último enlace continúa en la Tabla de Pares: $80 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5$.

Si $m_1 = F(m_0)$ y $m_2 = F(m_1)$, con exponentes a_0, a_1, entonces $3m_0 + 1 = 2^{a_0}m_1$ y $3m_1 + 1 = 2^{a_1}m_2$: el destino de una flecha es el origen de la siguiente. La concatenación de puentes reconstruye la genealogía, sin que de ella se infiera ninguna propiedad de convergencia o de distribución de los exponentes.

Capítulo 6

Transiciones entre filas

6.1. La fila del siguiente impar

Después del par terminal de una fila, la órbita de S divide por dos hasta el siguiente impar. Los pares intermedios pertenecen también a filas de la familia, como pares terminales o como vértices; el teorema siguiente localiza directamente la fila del siguiente impar.

Teorema 6.1 (Localizador de la fila siguiente)**.** *Sea $F_{a,r}$ una fila con $r \geq 1$, $q = a+1$, y sean*

$$e = 3^r q - 1, \qquad k = \nu_2(e) \geq 1, \qquad m = e/2^k.$$

Si $m+1 = 2^{\alpha'} 3^{\beta'} q'$ con $\gcd(q', 6) = 1$, el siguiente impar m de la órbita está en la fila $F_{q'-1,\,\alpha'+\beta'}$, en la posición $j' = \beta'$. Además,

$$m + 1 = \frac{3^r q + 2^k - 1}{2^k},$$

y $j' = 0$ si k es impar, mientras que $j' \geq 1$ si k es par.

Demostración. La localización es el teorema 4.7 aplicado a m. La identidad para $m+1$ resulta de sustituir e. Como 2^k es primo con 3, la valoración 3-ádica de $m+1$ es la del numerador. Si k es impar, $2^k \equiv 2 \pmod 3$ y el numerador es $\equiv 1 \pmod 3$; si k es par, $2^k \equiv 1 \pmod 3$ y el numerador es divisible por 3. □

Ejemplo 6.2. La fila $F_{0,3} = (7, 11, 17, 26)$ termina en 26, con $k = 1$ y $m = 13$; como $14 = 2 \cdot 7$, el siguiente impar está en $F_{6,1} = (13, 20)$, en la posición 0. La fila $F_{4,2} = (19, 29, 44)$ termina en $44 = 4 \cdot 11$, con $k = 2$; el impar 11 está en $F_{0,3}$, en la posición 1.

La transición es determinista y puede llevar a otro triángulo. No implica que disminuyan el número, el índice de la fila ni el vértice, y no impide que una trayectoria vuelva a una fila anterior.

6.2. Los enlaces de F dentro de las filas

En coordenadas de encabezado, un impar $m = q2^n - 1$ con $n \geq 2$ tiene $F(m) = 3q2^{n-1} - 1$, es decir, sus coordenadas pasan de (q, n) a $(3q, n-1)$. En la familia $T(a)$ este cambio no es un salto entre triángulos: si $m = x_{a,r,j}$ con $j < r - 1$, entonces $F(m) = x_{a,r,j+1}$ es el elemento siguiente de la misma fila. Las transiciones entre filas solo se producen después del par terminal, y las describe el teorema 6.1.

6.3. Congruencias finitas

Fijemos $K \geq 1$. Si $m \equiv m' \pmod{2^K}$ y $n(m) < K$, entonces $n(m') = n(m) = n$ y $(m'+1)/2^n \equiv (m+1)/2^n \pmod{2^{K-n}}$. Análogamente, si $h(m) < K$, la misma congruencia implica $h(m') = h(m) = h$ y $F(m') \equiv F(m) \pmod{2^{K-h}}$; si $h(m) \geq K$, solo puede afirmarse $h(m') \geq K$. Una clase de residuos módulo 2^K conserva, por tanto, información truncada: no determina el triángulo, que exige conocer exactamente la parte de $m+1$ primo con 6, ni el futuro completo de la órbita.

Capítulo 7

Tramos y codificación de las órbitas

7.1. Tramos impares y pares

Definición 7.1 (Tramo impar)**.** El *tramo impar* de un impar positivo m es su racha bajo S: la columna de la Tabla de Impares encabezada por m. Por el teorema 4.8, es una fila de $T(a)$ o el final de una fila.

Definición 7.2 (Tramo par)**.** El *tramo par* de un par $v = 2^r u$, con u impar y $r \geq 1$, es la cadena $v \to v/2 \to \cdots \to u$: la columna de la Tabla de Pares encabezada por v.

Proposición 7.3 (Descomposición de una órbita)**.** *Toda órbita positiva de S se recorre mediante tramos impares y pares alternados, empezando por el tramo de su término inicial. El término final de cada tramo es el inicial del siguiente, y con esta identificación la descomposición es única.*

Demostración. Desde un impar, el tramo impar sigue la órbita hasta su primer par; desde un par, el tramo par la sigue hasta su primer impar. Cada extremo determina de forma única el tramo siguiente. □

Ejemplo 7.4. Desde 127, con $128 = 2^7$, el tramo impar es la fila $F_{0,7}$: $127 \to 191 \to 287 \to 431 \to 647 \to 971 \to 1457 \to 2186$. Le siguen el tramo par $2186 \to 1093$, el tramo impar $1093 \to 1640$, que es la fila $F_{546,1}$, y el tramo par $1640 \to 820 \to 410 \to 205$. La trayectoria completa en los triángulos se detalla en el apéndice F.

7.2. El salto entre rachas

Definición 7.5. Para m impar con $m + 1 = 2^n q$, q impar, definimos $G(m) = \mathrm{odd}(3^n q - 1)$.

Proposición 7.6. *$G(m) = F^n(m)$, con $n = \nu_2(m + 1)$.*

Demostración. Los $n - 1$ primeros impares de la racha tienen $h = 1$, y F los lleva al elemento siguiente. El último impar y cumple $3y+1 = 2(3^n q-1)$, de modo que $F(y) = \mathrm{odd}(3^n q-1)$. □

G toma el par terminal de la racha de m, recorre su tramo par y devuelve el impar siguiente. Es un salto de longitud variable y no, en general, una sola aplicación de F: $G(7) = 13$, mientras que $F(7) = 11$. Como G consta de un número finito y positivo de pasos de F y $F(1) = G(1) = 1$,

$$(\forall m,\ \exists j :\ F^j(m) = 1) \iff (\forall m,\ \exists k :\ G^k(m) = 1).$$

Esta equivalencia expresa la conjetura en las coordenadas de las tablas, pero no la demuestra.

7.3. Balance de una órbita

Para $m_{i+1} = F(m_i)$ y $h_i = h(m_i)$ se tiene

$$\log \frac{m_N}{m_0} = \sum_{i=0}^{N-1} \log\Big(3 + \frac{1}{m_i}\Big) - (\log 2) \sum_{i=0}^{N-1} h_i.$$

Hay descenso entre m_0 y m_N exactamente cuando el segundo término supera al primero. Sustituir la primera suma por $N \log 3$ es una aproximación que exige controlar las correcciones positivas $\log(1 + 1/(3m_i))$; la frecuencia de una sola valoración no determina el balance.

7.4. El ciclo conocido y el alcance

La función S tiene el ciclo $1 \to 2 \to 1$, y F el punto fijo $F(1) = 1$. En la familia $T(a)$, la fila $F_{0,1} = (1, 2)$ es su propia sucesora: su par terminal 2 conduce al impar 1, que está en ella misma. Si se demostrase que para cada impar $m > 1$ existe $N \geq 1$ con $F^N(m) < m$, la convergencia a 1 seguiría por inducción fuerte. Las identidades de las tablas y de los triángulos no proporcionan por sí solas ese control global.

Capítulo 8

La familia par y su enlace con la familia impar

8.1. Definición

Sea b un impar positivo con $3 \nmid b$, es decir, $b \equiv 1$ o $5 \pmod 6$. El triángulo par $T(b)$ está formado por los números

$$B_{b,n,j} = b\,3^j 2^{\,n-j}, \qquad n \geq 0,\ 0 \leq j \leq n.$$

Como los índices a de la familia impar son pares y los índices b de la familia par son impares, la notación $T(\cdot)$ no da lugar a ambigüedad.

Todo entero positivo se escribe de forma única como $2^r 3^j b$ con $3 \nmid b$ y ocupa la celda $(b,\ r+j,\ j)$ de $T(b)$. La columna geométrica j de $T(b)$ contiene, de arriba abajo, $b3^j$, $2b3^j$, $4b3^j, \ldots$: el primero es impar y los demás son pares.

8.2. Correspondencia con la Tabla de Pares

Si $v = 2^r 3^j b$ con $r \geq 1$, el tramo par de v es el segmento vertical

$$B_{b,r+j,j} \to B_{b,r+j-1,j} \to \cdots \to B_{b,j,j} = 3^j b,$$

leído de abajo arriba. Los tramos de $v, 2v, 4v, \ldots$ son segmentos anidados de una misma columna.

Ejemplo 8.1. En $T(1)$, la primera columna da $8 \to 4 \to 2 \to 1$ leída hacia arriba, la segunda $12 \to 6 \to 3$ y la tercera $18 \to 9$. La fila $8, 12, 18, 27$ no es un tramo.

8.3. Encuentro de las dos familias

El par terminal de una fila $F_{a,r}$, $r \geq 1$, es $v = 3^r(a+1) - 1 \equiv 2 \pmod 3$; por tanto $3 \nmid v$. Si $v = 2^k b$, con b impar, el par v está en la columna $j = 0$ de $T(b)$, en la fila k, y su tramo

par se lee de abajo arriba hasta b. El impar b es el siguiente impar de la órbita, cuya fila en la familia impar localiza el teorema 6.1.

Ejemplo 8.2. La fila $F_{0,3} = (7, 11, 17, 26)$ termina en $26 = 2 \cdot 13$, situado en la columna 0 de $T(13)$; hacia arriba se obtiene $26 \to 13$. El tramo impar de 13 es la fila $F_{6,1} = (13, 20)$, y $20 \to 10 \to 5$ se lee en la columna 0 de $T(5)$ desde su fila 2.

Las columnas $j \geq 1$ de los triángulos pares contienen pares divisibles por 3 y terminan en impares divisibles por 3. Representan los tramos pares de las órbitas que empiezan en uno de esos pares, pero nunca son puntos de entrada desde una fila de la familia impar.

Capítulo 9

Cálculos en trayectorias concretas

9.1. Valoraciones módulo potencias de 2

Conocer m módulo 2^K determina $3m+1$ módulo 2^K. Si este residuo no es cero, determina exactamente $h(m) < K$; si es cero, solo demuestra $h(m) \geq K$. Por ejemplo, $5 \equiv 13 \pmod 8$, pero $h(5) = 4$ y $h(13) = 3$. Lo mismo ocurre con $n(m) = \nu_2(m+1)$.

9.2. Colas pares largas

Si $h(m) \geq 5$, entonces $F(m) \leq (3m+1)/32 < m$ para $m > 1$. Esto certifica un descenso en ese enlace, pero no impone nada a la valoración siguiente, que puede ser también grande: $565 \xrightarrow{h=5} 53 \xrightarrow{h=5} 5$.

9.3. La órbita de 27

El prefijo de la genealogía de 27 es

$$27 \xrightarrow{1} 41 \xrightarrow{2} 31 \xrightarrow{1} 47 \xrightarrow{1} 71 \xrightarrow{1} 107 \xrightarrow{1} 161 \xrightarrow{2} 121 \xrightarrow{2} 91,$$

donde los rótulos son los valores de h. El crecimiento inicial se debe a los enlaces con $h = 1$, que corresponden a recorrer filas de la familia $T(a)$; por ejemplo, $31, 47, 71, 107, 161, 242$ es la fila $F_{0,5}$.

9.4. Encabezados de Mersenne

Para $m = 2^k - 1$, $k \geq 1$, se tiene $n(m) = k$, y la racha de m es la fila $F_{0,k}$ de $T(0)$:

$$2^k - 1,\ 3 \cdot 2^{k-1} - 1,\ \ldots,\ 3^k - 1.$$

Para $k \geq 2$, el primer enlace tiene $h(m) = 1$, mientras que la racha tiene longitud k.

9.5. Reconstrucción a partir de los impares

La sucesión de impares $m_i = F^i(m_0)$ y sus valoraciones h_i reconstruyen todos los pasos de S: después de m_i aparecen $2^{h_i-1}m_{i+1}$, $2^{h_i-2}m_{i+1}, \ldots, m_{i+1}$. Para la órbita clásica se antepone $3m_i + 1 = 2^{h_i}m_{i+1}$. La compresión ahorra escribir los pares intermedios, pero no la necesidad de calcular cada enlace.

Capítulo 10

Alcance y líneas abiertas

10.1. Resultados

Quedan demostrados los siguientes hechos. Cada entero no negativo ocupa una posición única en la familia $T(a)$, $a \in \mathcal{A}$, que se obtiene de la factorización de $n+1$. Cada fila de índice positivo es una racha impar de S, y cada columna de la Tabla de Impares es una fila o el final de una fila. El paso desde el par terminal de una fila a la fila del siguiente impar se calcula de forma unívoca, y la posición de entrada depende de la paridad de la valoración 2-ádica del par terminal. Cada tramo par ocupa un segmento de columna de la familia par, y las dos familias se enlazan siempre por la primera columna de un triángulo par. El salto entre rachas satisface $G = F^{\nu_2(m+1)}$.

10.2. Límites

Nada de lo anterior demuestra que toda órbita llegue a 1, que vuelva a un conjunto fijo de triángulos, ni que las frecuencias de sus valoraciones a lo largo del tiempo coincidan con las densidades entre todos los impares. La partición garantiza que cada número tiene una localización única; no impide que una trayectoria vuelva a una fila ya visitada. La equivalencia entre la convergencia bajo F y bajo G reformula la cuestión sin resolverla.

10.3. Cuestiones abiertas

Quedan por estudiar, entre otras, las siguientes cuestiones: cómo dependen las coordenadas de la fila de $G(m)$ de las de la fila de m, en particular a través de la valoración de $3^r(a+1)-1$; qué condiciones comprobables garantizan que una racha completa seguida de su cola par conduzca a un impar menor que el inicial, sabiendo que una condición universal de ese tipo resolvería la conjetura; cómo se comportan las frecuencias de las valoraciones a lo largo de órbitas individuales, precisando en cada caso la muestra y la escala de observación; y qué identidades de filas y columnas se conservan para aplicaciones del tipo $(dm+c)/2$, teniendo presente que la semejanza de las fórmulas no garantiza la de las conclusiones globales.

Apéndice A

Terminología y notación

Funciones. La función clásica envía un impar m a $3m+1$ y un par v a $v/2$. La simplificada S envía m a $(3m+1)/2$ y v a $v/2$. El operador acelerado es $F(m) = (3m+1)/2^{h(m)}$, con $h(m) = \nu_2(3m+1)$.

Valoraciones. Para un impar m, $n(m) = \nu_2(m+1)$ es la longitud de su racha y $h(m) = \nu_2(3m+1)$ la valoración de su enlace de F.

Tramo impar. La racha de un impar m bajo S, hasta el primer par incluido; es la columna de la Tabla de Impares encabezada por m.

Tramo par. La cadena de divisiones por 2 desde un par hasta su parte impar; es la columna de la Tabla de Pares encabezada por ese par.

Familia impar. Los triángulos $T(a)$, $a \equiv 0$ o $4 \pmod 6$, de elementos $x_{a,r,j} = 2^{r-j}3^j(a+1) - 1$. Cada entero $n \geq 0$ ocupa la posición $a = q-1$, $r = \alpha+\beta$, $j = \beta$, donde $n+1 = 2^\alpha 3^\beta q$ y $\gcd(q,6) = 1$.

Familia par. Los triángulos $T(b)$, $b \equiv 1$ o $5 \pmod 6$, de elementos $B_{b,n,j} = b3^j 2^{n-j}$.

Puente clásico y puente 2-ádico. El puente clásico de m es la sucesión $(m, 3m+1, (3m+1)/2, \ldots, F(m))$; el puente 2-ádico es la identidad $3m+1 = 2^{h(m)}F(m)$.

Genealogía. La órbita $m, F(m), F^2(m), \ldots$; su perfil de valoraciones es la sucesión $h(F^j(m))$.

Salto entre rachas. $G(m) = \mathrm{odd}(3^n q - 1) = F^n(m)$, donde $m+1 = 2^n q$ con q impar.

Apéndice B

Tabla de Impares

La Figura B.1 muestra la Tabla de Impares de la función simplificada S. La fila $n = 0$ enumera los encabezados $m = 1, 3, 5, \ldots$; cada columna aplica $S(x) = (3x + 1)/2$ mientras los términos son impares y contiene el primer par como entrada final. Su longitud es $\nu_2(m + 1)$. Por ejemplo, la columna de 7 es $7, 11, 17, 26$; no representa el puente clásico $7, 22, 11$. Cada columna de esta tabla es una fila de la familia $T(a)$ o el final de una fila.

Figura B.1: Tabla de Impares de S. Cada columna comienza en un impar, recorre su racha de impares consecutivos y termina en el primer par.

Apéndice C

Tabla de Pares

La Figura C.1 muestra la Tabla de Pares de S. Su fila $n = 0$ enumera los encabezados pares $2, 4, 6, 8, \ldots$. Si $v = 2^r u$ con u impar, la columna de v contiene $v, v/2, \ldots, v/2^r = u$; por ejemplo, la columna de 8 es $8, 4, 2, 1$. En la tabla se lee de arriba abajo; en un triángulo par $T(b)$, el mismo tramo es un segmento de columna que se lee de abajo arriba.

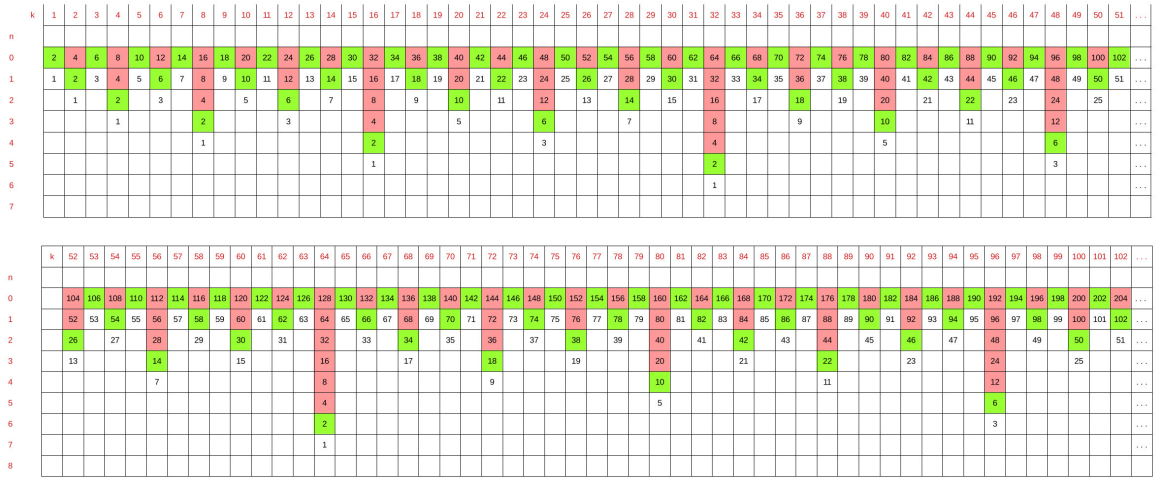

Figura C.1: Tabla de Pares de S. La columna encabezada por cada par v contiene sus divisiones sucesivas por 2 hasta alcanzar el primer impar.

Apéndice D

Triángulos $T(0)$ y $T(4)$

La fila r de $T(a)$ es

$$2^r(a+1)-1,\ 3\cdot 2^{r-1}(a+1)-1,\ \ldots,\ 3^r(a+1)-1,$$

y su último término es par. Como $a+1$ no es divisible por 3, para $r \geq 1$ la fila es la columna completa de la Tabla de Impares encabezada por $2^r(a+1)-1$. La fila 0 es el vértice.

Triángulo $T(0)$

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
0	0										
1	1	2									
2	3	5	8								
3	7	11	17	26							
4	15	23	35	53	80						
5	31	47	71	107	161	242					
6	63	95	143	215	323	485	728				
7	127	191	287	431	647	971	1457	2186			
8	255	383	575	863	1295	1943	2915	4373	6560		
9	511	767	1151	1727	2591	3887	5831	8747	13121	19682	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Figura D.1: Triángulo $T(0)$. Para $r \geq 1$, la fila r es la columna de la Tabla de Impares encabezada por $2^r - 1$ y termina en el par $3^r - 1$.

Triángulo $T(4)$

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
0	4										
1	9	14									
2	19	29	44								
3	39	59	89	134							
4	79	119	179	269	404						
5	159	239	359	539	809	1214					
6	319	479	719	1079	1619	2429	3644				
7	639	959	1439	2159	3239	4859	7289	10934			
8	1279	1919	2879	4319	6479	9719	14579	21869	32804		
9	2559	3839	5759	8639	12959	19439	29159	43739	65609	98414	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Figura D.2: Triángulo $T(4)$. Para $r \geq 1$, la fila r es la columna de la Tabla de Impares encabezada por $5 \cdot 2^r - 1$ y termina en el par $5 \cdot 3^r - 1$.

Apéndice E

Triángulo par $T(1)$

La figura muestra el triángulo par $T(1)$, con la entrada $B_{1,n,j} = 3^j 2^{n-j}$ en la fila n y la columna j, rotulada $k = j + 1$. La cadena de la Tabla de Pares encabezada por un par $v = 2^r 3^j$ ocupa un segmento de la columna j y se lee de abajo arriba hasta 3^j. Por ejemplo, la primera columna contiene $1, 2, 4, 8, \ldots$ de arriba abajo, y da el tramo $8 \to 4 \to 2 \to 1$ al leer el segmento correspondiente al revés.

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
0	1										
1	2	3									
2	4	6	9								
3	8	12	18	27							
4	16	24	36	54	81						
5	32	48	72	108	162	243					
6	64	96	144	216	324	486	729				
7	128	192	288	432	648	972	1458	2187			
8	256	384	576	864	1296	1944	2916	4374	6561		
9	512	768	1152	1728	2592	3888	5832	8748	13122	19683	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Figura E.1: Triángulo par $T(1)$. Los tramos de la Tabla de Pares ocupan segmentos de columnas que se leen de abajo arriba. Por ejemplo, $12 \to 6 \to 3$ ocupa un segmento de la segunda columna.

Apéndice F

La trayectoria de 127 en los triángulos

Para cada impar m que inicia una racha en la órbita de 127, la tabla siguiente da su posición en la familia $T(a)$, el par terminal e de su fila, la valoración $k = \nu_2(e)$ y el siguiente impar $\mathrm{odd}(e)$.

m	a	r	j	e	k	$\mathrm{odd}(e)$
127	0	7	0	2186	1	1093
1093	546	1	0	1640	3	205
205	102	1	0	308	2	77
77	12	2	1	116	2	29
29	4	2	1	44	2	11
11	0	3	1	26	1	13
13	6	1	0	20	2	5
5	0	2	1	8	3	1

La órbita termina en la fila $F_{0,1} = (1, 2)$. De acuerdo con el teorema 6.1, la entrada se produce en la posición 0 cuando k es impar y en una posición interior cuando k es par. Los vértices no forman un descenso monótono: después de $T(0)$ aparece $T(6)$, y de nuevo $T(0)$.

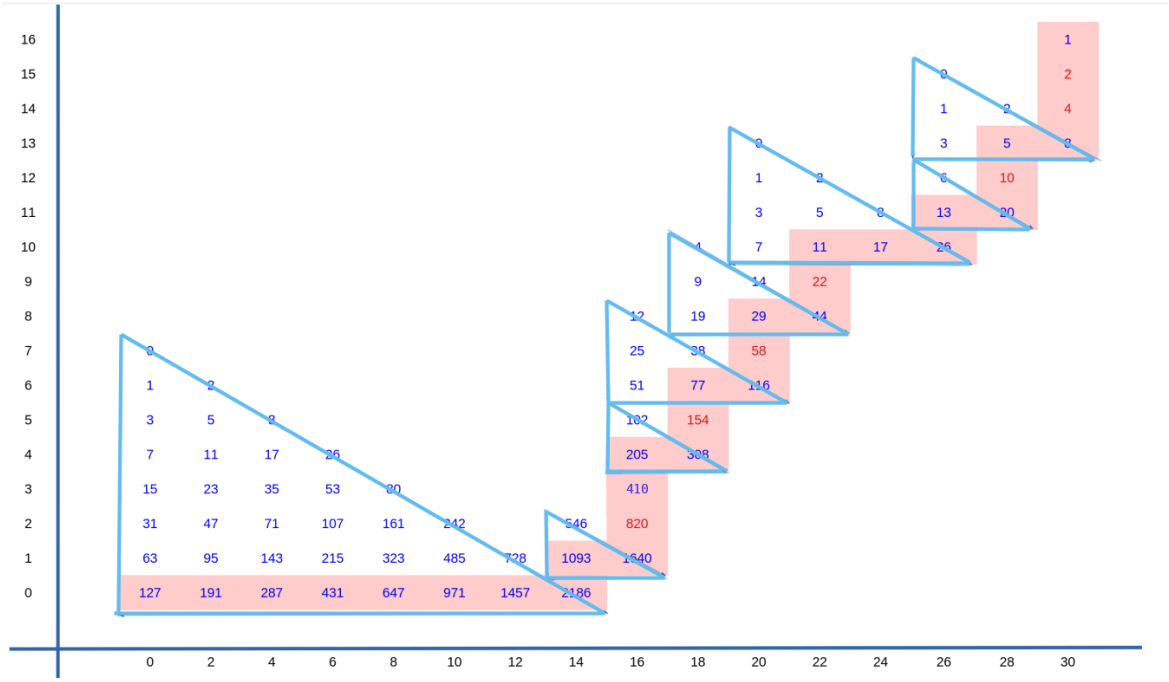

Figura F.1: Recorrido de 127 en los triángulos, con rachas impares horizontales y divisiones pares verticales.

Bibliografía

[1] J. C. Lagarias, The $3x + 1$ problem and its generalizations, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 3–23.

[2] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arith.* **30** (1976), 241–252.