

Escrito CLXXX

El tránsito genuino y la ventana diagonal:
hacia una estadística de bloques no degenerada

Miguel Cerdá Bennassar

ORCID: 0000-0001-8360-1933

Agosto de 2026

Resumen

La Nota de corrección conceptual (agosto de 2026) demostró que el Problema 1.1 (“Nivel A”) de CLXXIX es incompatible con la convergencia $A_{m,w}(N, n) \rightarrow 2^{-m}$ para todo entero n cuya órbita alcance el ciclo $\{1, 2\}$, si $m \geq 2$: el límite $N \rightarrow \infty$ con n fijo queda determinado enteramente por el ciclo de absorción, no por el tránsito. Este escrito observa que la maquinaria de segundo momento de CLXXIX —el Teorema 5.1 y la Proposición 5.4, ambos incondicionales— no está afectada por ese defecto, porque nunca depende de tomar $N \rightarrow \infty$ con n fijo. En particular, la ventana diagonal $N(X) = \lfloor \log_2 X \rfloor$ que ya controla CLXXIX resulta ser, empíricamente, muy inferior al tiempo de parada total típico $\sigma(n)$, que en la muestra considerada resulta ser aproximadamente cinco veces $\log_2 n$, de modo que para la inmensa mayoría de los $n \leq X$, $A_{m,w}(N(X), n)$ mide comportamiento genuino del tránsito, no la cola degenerada. Se formula el problema preciso que hace falta resolver para convertir esta observación en un teorema: acotar la densidad del conjunto excepcional $E_m(X) = \{n \leq X : \sigma(n) \leq N(X) + m - 2\}$ (el umbral exacto que garantiza que un bloque de longitud m quede enteramente dentro del tránsito), para el que se presenta evidencia empírica, en el caso $m = 2$, de un decaimiento tipo X^{-a} con $a \approx 0,58$, estable en varios órdenes de magnitud.

1. De dónde viene este escrito

Tres documentos preceden a este:

- **CLXXIX**, que demuestra el Lema de biyección finita (bloques de paridad $\leftrightarrow$ residuos módulo 2^m), el Teorema 5.1 (varianza espacial, incondicional, $\limsup_X D_{m,w}(N, X) \leq (2m - 1)/N$) y la Proposición 5.4 (cota conjunta explícita)

$$D_{m,w}(N, X) \leq \frac{2m - 1}{N} + \frac{2^{N+m+1}}{NX},$$

de donde sigue el control diagonal $D_{m,w}(N(X), X) = O_m(1/\log X)$ para $N(X) = \lfloor \log_2 X \rfloor$.

- La **Nota de corrección conceptual**, que demuestra que el límite $N \rightarrow \infty$ con n fijo es el observable equivocado: si la órbita de n alcanza un ciclo de periodo p , el límite queda determinado por el ciclo, y no puede ser Bernoulli-genérico en bloques de longitud m con $2^m > p$.
- Las **notas preparatorias sobre la espina de potencias de 2**, que caracterizan por completo la estructura de predecesores de T y separan con precisión estructura combinatoria (resuelta) de peso estadístico (abierto).

Este escrito ejecuta el primer paso concreto anunciado al cierre de esas notas preparatorias.

2. El problema corregido

Definición 2.1. Para $n \geq 1$, sea $\sigma(n) := \min\{k \geq 0 : T^k(n) = 1\}$ el tiempo de parada total (asumiendo que existe; para todo n considerado en este escrito se verifica computacionalmente que existe).

El Problema 1.1 de CLXXIX pedía $A_{m,w}(N, n) \rightarrow 2^{-m}$ cuando $N \rightarrow \infty$ con n fijo. La Nota de corrección conceptual demostró que esto es imposible, para $m \geq 2$, tan pronto como $\sigma(n)$ es finito: el límite existe, pero está determinado por el ciclo $\{1, 2\}$, no por el tránsito $0 \leq k < \sigma(n)$.

La corrección natural no es tomar $N \rightarrow \infty$ —eso siempre acaba rebasando $\sigma(n)$ —, sino mantener N *por debajo* de $\sigma(n)$ y promediar espacialmente sobre $n \leq X$, exactamente como ya hace $D_{m,w}(N, X)$ en CLXXIX. La pregunta es si la ventana diagonal que CLXXIX ya usa es, de hecho, lo bastante corta.

3. La observación central

Proposición 3.1 (Comparación empírica $N(X)$ frente a $\sigma(n)$). *Sobre una muestra de 250 000 enteros impares $n \leq 500 000$ elegidos exhaustivamente, el tiempo de parada total satisface*

$$\left. \frac{\sigma(n)}{\log_2 n} \right|_{\text{media}} \approx 4,97, \quad \left. \frac{\sigma(n)}{\log_2 n} \right|_{\text{mediana}} \approx 4,68.$$

Es decir, $\sigma(n)$ típico es aproximadamente cinco veces $\log_2 n$, no del mismo orden de magnitud con constante cercana a 1.

Observación 3.2. Esta proposición es un hecho empírico verificado por cómputo directo sobre el rango indicado, no un teorema. Se cita, para contexto, que Everett (1977) y Terras (1976) demuestran densidad natural uno para el conjunto de enteros con tiempo de parada de *primer descenso* finito —una noción distinta de $\sigma(n)$, estrictamente más débil, como ya señaló la Nota de corrección conceptual—; no se ha localizado, ni se afirma aquí, una referencia que establezca rigurosamente la constante ≈ 5 observada para $\sigma(n)/\log_2 n$.

Dado que CLXXIX ya trabaja con la ventana diagonal $N(X) = \lfloor \log_2 X \rfloor$ (Sección 5, paso (a) del Problema 5.6), la Proposición 3.1 sugiere que $N(X)$ está muy

por debajo del $\sigma(n)$ típico para $n \leq X$: la diagonal de CLXXIX, sin haber sido diseñada para ello, cae dentro del régimen de tránsito genuino para la inmensa mayoría de los enteros considerados.

Definición 3.3 (Conjunto excepcional para bloques de longitud m). El mayor índice de bit utilizado por $A_{m,w}(N, n)$ —en el bloque que empieza en $k = N - 1$, que llega hasta b_{N+m-2} — es $N + m - 2$. Por tanto, todos los bloques considerados están contenidos en el tránsito genuino ($k < \sigma(n)$) si y solo si

$$N + m - 2 < \sigma(n).$$

El conjunto excepcional correcto es, por tanto,

$$E_m(X) := \{n \leq X : \sigma(n) \leq N(X) + m - 2\}, \quad N(X) = \lfloor \log_2 X \rfloor.$$

La Proposición 3.4 —con umbral $\sigma(n) \leq N(X)$ — estudia exactamente $E_2(X)$: el caso $m = 1$ exige el umbral, un paso más estricto, $\sigma(n) \leq N(X) - 1$.

Proposición 3.4 (El conjunto excepcional es empíricamente pequeño y decreciente). Sea $E(X) := E_2(X) = \{n \leq X : \sigma(n) \leq N(X)\}$. La proporción $|E(X)|/X$ decrece claramente con X :

X	$N(X)$	$ E(X) /X$
50 000	15	0,00196
200 000	17	0,00090
800 000	19	0,00040
3 200 000	21	0,00018

El exponente de decaimiento estimado —ajustando $|E(X)|/X \sim CX^{-a}$ entre pares consecutivos de la tabla— es $a \approx 0,56, 0,59, 0,58$: notablemente estable a lo largo de un factor 64 en X .

Observación 3.5. De nuevo, esto es evidencia empírica de un patrón, no una demostración de que $|E(X)|/X = O(X^{-a})$ para ningún a concreto. La estabilidad del exponente estimado en tres intervalos independientes es una señal más fuerte que una simple tendencia decreciente: sugiere la posibilidad de una ley de potencia estable en el rango observado, y no parece explicarse simplemente por una fluctuación aislada de escala —sin que esto constituya, todavía, evidencia de una ley asintótica genuina.

4. El problema que hace falta resolver

Problema 4.1 (Densidad del conjunto excepcional). Para $m \geq 1$ fijo, ¿es cierto que $|E_m(X)|/X \rightarrow 0$ cuando $X \rightarrow \infty$? Más fuertemente, ¿es cierto que $|E_m(X)|/X = O(X^{-a})$ para algún $a > 0$ explícito?

Teorema 4.2 (Consecuencia condicional). Fijados m, w , si $|E_m(X)|/X \rightarrow 0$ (la forma débil del Problema 4.1, para ese m), entonces, para todo $\varepsilon > 0$, la proporción de $n \leq X$ impar que son simultáneamente “buenos” en los dos sentidos que importan — $|A_{m,w}(N(X), n) - 2^{-m}| \leq \varepsilon$ y $n \notin E_m(X)$ — tiende a 1:

$$\frac{1}{\lceil X/2 \rceil} \left| \left\{ n \leq X \text{ impar} : |A_{m,w}(N(X), n) - 2^{-m}| \leq \varepsilon \text{ y } n \notin E_m(X) \right\} \right| \xrightarrow{X \rightarrow \infty} 1.$$

Para esos n , $A_{m,w}(N(X), n)$ mide bloques de paridad enteramente dentro del tránsito genuino de n (por la Definición 3.3), no de la cola de absorción.

Demostración. Sean $B_1(X) := \{n \leq X \text{ impar} : |A_{m,w}(N(X), n) - 2^{-m}| > \varepsilon\}$ y $B_2(X) := \{n \leq X \text{ impar} : n \in E_m(X)\}$. Por la Proposición 5.4 y el paso (a) del Problema 5.6 de CLXXIX, $D_{m,w}(N(X), X) = O_m(1/\log X)$, y por Chebyshev $|B_1(X)|/\lceil X/2 \rceil = O_{m,\varepsilon}(1/\log X) \rightarrow 0$; este límite ya es incondicional (Sección 5 de CLXXIX) y no requiere el Problema 4.1. Si además $|E_m(X)|/X \rightarrow 0$, $|B_2(X)|/\lceil X/2 \rceil \leq 2|E_m(X)|/X \rightarrow 0$ también. Por la subaditividad finita de la densidad superior,

$$\frac{|B_1(X) \cup B_2(X)|}{\lceil X/2 \rceil} \leq \frac{|B_1(X)|}{\lceil X/2 \rceil} + \frac{|B_2(X)|}{\lceil X/2 \rceil} \xrightarrow{X \rightarrow \infty} 0,$$

y el complemento de $B_1(X) \cup B_2(X)$ dentro de los impares $\leq X$ es exactamente el conjunto “bueno” del enunciado, de proporción $\rightarrow 1$. $\square$

Observación 4.3 (Por qué esto no era gratuito). La inclusión en $B_1(X)$ solo controla los malos relativos al total X : de ahí se sigue, sin necesidad del Problema 4.1, que $\{n \notin E_m(X) : |A_{m,w}(N(X), n) - 2^{-m}| > \varepsilon\}$ tiene densidad nula respecto de X . Pero eso no garantiza, por sí solo, que la proporción de buenos *dentro de* $X \setminus E_m(X)$ —el denominador que de verdad importa para interpretar $A_{m,w}(N(X), n)$ como estadística del tránsito— sea cercana a 1: para obtener esa afirmación con denominador X , hace falta controlar independientemente $E_m(X)$, que es exactamente lo que pide el Problema 4.1.

5. Hacia el Problema 4.1

Señalamos, sin ejecutarla, la vía más prometedora. Por la Proposición 2.2 de las notas sobre la espina de potencias de 2, $\{n : \sigma(n) \leq K\}$ es exactamente la unión de los primeros $K + 1$ niveles del árbol inverso de T enraizado en 1, y cada nodo $y \equiv 2 \pmod{3}$ tiene dos hijos en el nivel siguiente, cada $y \not\equiv 2 \pmod{3}$ tiene uno. Acotar $|E_m(X)|$ equivale, por tanto, a acotar cuántos nodos de los primeros $\lfloor \log_2 X \rfloor + 1$ niveles de ese árbol tienen valor $\leq X$ —una pregunta sobre crecimiento de árboles etiquetados por congruencias, potencialmente accesible con las mismas técnicas de conteo modular que ya ha usado este programa, pero que no se ha intentado todavía.

Observación 5.1 (Estado honesto). Este escrito no demuestra el Problema 4.1. Demuestra —Teorema 4.2— que resolverlo (incluso en su forma débil) convierte la maquinaria ya construida en CLXXIX en un resultado genuino sobre el tránsito, no solo en una estadística espacial de interpretación abierta. Aporta evidencia empírica robusta (Proposición 3.4, estable a lo largo de un factor 64 en X) de que la respuesta es afirmativa, y señala una vía de ataque concreta —conteo en el árbol inverso, ya parcialmente desarrollado— sin ejecutarla.