

Escrito CLXXXIII

Crecimiento incondicional $O((\varphi^*)^K)$ del árbol inverso vía un potencial de Möbius

Miguel Cerdá Bennassar
ORCID: 0000-0001-8360-1933

Agosto de 2026

Resumen

Se demuestra, sin ninguna hipótesis sobre la distribución de residuos p_k de CLXXXI, que los niveles del árbol inverso de T satisfacen $L_K = O((\varphi^*)^K)$, donde $\varphi^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la razón áurea, mejorando el exponente $\frac{1}{2} \log_2 3 \approx 0,7925$ obtenible por un argumento elemental de dos pasos hasta $\log_2 \varphi^* \approx 0,6942$ —el óptimo alcanzable usando exclusivamente la desigualdad de un paso $u_{k+1} \leq \varphi(u_k)$, $u_k := 1 + p_k$. La demostración construye, mediante la conjugación de Möbius del mapa $\varphi(u) = 1 + 1/u$ a su punto fijo φ^* , un potencial V definido por una serie telescópica absoluta y uniformemente convergente; se prueba que $h := V + \log$ es estrictamente creciente en $[1, 2]$ mediante una cota elemental de series alternadas, lo que permite un telescopio válido sobre *cualquier* trayectoria admisible de (p_k) , no solo la extremal. Como consecuencia, $|E_m(X)| = O_m(X^{\log_2 \varphi^*})$, resolviendo la forma débil del Problema 4.1 de CLXXX de forma incondicional, sin tocar el Problema 3.1 de CLXXXI.

Índice

1. Motivación	2
2. El mapa φ y el intervalo $[1, 2]$	2
3. Construcción del potencial V	2
4. Ecuación funcional	3
5. Monotonía de $h = V + \log$	3
6. Telescopio: el teorema principal	4
7. Consecuencia para $E_m(X)$	5
8. Optimalidad del exponente	5
9. Estado del trabajo	6

A. Evidencia empírica adicional sobre el Problema 3.1 (agosto 2026)	6
A.1. Extensión de los datos de p_k hasta $k = 58$	6
A.2. Distancia en variación total respecto a la uniforme, por precisión 3-ádica	7

1. Motivación

CLXXXI reduce el Problema 4.1 de CLXXX a $\limsup_k p_k < 1$ (Problema 3.1), un obstáculo 3-ádico estructural. La cota cruda descartada en la Sección 4.1 de CLXXXI — $p_{k+1} \leq 1/(1 + p_k)$ — parecía insuficiente por sí sola, pero aplicada dos veces seguidas y multiplicada da $(1 + p_k)(1 + p_{k+1}) \leq 3$ para todo k , sin ninguna hipótesis, produciendo ya $|E_m(X)| = O_m(X^{\log_2 \sqrt{3}})$ incondicionalmente. Este escrito muestra que ese truco de dos pasos está lejos de ser óptimo: la desigualdad de un solo paso, tratada como una restricción sobre un sistema dinámico completo en vez de combinada ad hoc, tiene una tasa de crecimiento extremal exacta —la razón áurea— demostrable mediante un potencial de Möbius.

2. El mapa φ y el intervalo $[1, 2]$

Definición 2.1. Sea $u_k := 1 + p_k$, donde $p_k \in [0, 1]$ es la fracción de nodos de L_k congruentes con 2 (mód 3) (Definición 1.2, CLXXXI). Como p_k es una fracción de un conjunto no vacío, $p_k \in [0, 1]$ y por tanto $u_k \in [1, 2]$ para todo k .

Definición 2.2. $\varphi : [1, 2] \rightarrow [1, 5, 2]$, $\varphi(u) := 1 + \frac{1}{u} = \frac{u+1}{u}$.

La cota cruda de la Sección 4.1 de CLXXXI se reescribe exactamente como $u_{k+1} \leq \varphi(u_k)$ para todo $k \geq 2$.

Observación 2.3 (Rango de φ). Para $u \in [1, 2]$, $1/u \in [1/2, 1]$, luego $\varphi(u) \in [1, 5, 2]$: φ manda todo el intervalo dentro de su mitad superior. En particular $\varphi(1) = 2$ y $\varphi(2) = 1,5$: φ es estrictamente decreciente en $[1, 2]$.

φ tiene dos puntos fijos, raíces de $u^2 = u + 1$:

$$\varphi^* = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618034, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618034,$$

con $\varphi^* + \psi = 1$ y $\varphi^* \psi = -1$. Solo $\varphi^* \in [1, 2]$.

3. Construcción del potencial V

Lema 3.1 (Contracción uniforme de φ^2). $\varphi^2 := \varphi \circ \varphi$ es Lipschitz en $[1, 2]$ con constante $\leq \frac{4}{9}$.

Demostración. $\varphi'(u) = -1/u^2$. Por la regla de la cadena, $(\varphi^2)'(u) = \varphi'(\varphi(u)) \varphi'(u) = \frac{1}{u^2 \varphi(u)^2}$. Como $u \geq 1$ y $\varphi(u) \geq 1,5$ (remark anterior), $u^2 \varphi(u)^2 \geq 1 \cdot (1,5)^2 = 2,25$, luego $|(\varphi^2)'(u)| \leq 1/2,25 = 4/9$. $\square$

Por el Lema 3.1 y el teorema del punto fijo de Banach, $\varphi^{2j}(u) \rightarrow \varphi^*$ geométricamente para todo $u \in [1, 2]$, con $|\varphi^{2j}(u) - \varphi^*| \leq (4/9)^j |u - \varphi^*|$.

Definición 3.2 (Potencial).

$$V(u) := \sum_{j=0}^{\infty} \log \frac{\varphi^{j+1}(u)}{\varphi^*}.$$

Proposición 3.3 (Convergencia absoluta y uniforme). *La serie que define V converge absoluta y uniformemente en $[1, 2]$; V es continua y acotada.*

Demostración. Por el Lema 3.1, $\varphi^n(u) \rightarrow \varphi^*$ geométricamente (con razón $\sqrt{4/9} = 2/3$ por paso, tras el primero). Como $\log$ es Lipschitz en un entorno de φ^* acotado lejos de 0 (todos los $\varphi^n(u) \geq 1$), existen $L, \rho < 1$ tales que $|\log(\varphi^{j+1}(u)/\varphi^*)| \leq L\rho^j$ para todo $u \in [1, 2]$, uniformemente en u . La serie está mayorada por una geométrica convergente, luego converge absoluta y uniformemente (criterio M de Weierstrass); la continuidad de V sigue de ser límite uniforme de sumas parciales continuas. $\square$

4. Ecuación funcional

Proposición 4.1 (Ecuación funcional exacta). *Para todo $u \in [1, 2]$,*

$$V(u) - V(\varphi(u)) = \log \frac{\varphi(u)}{\varphi^*}.$$

Demostración. Por definición, $V(\varphi(u)) = \sum_{j \geq 0} \log(\varphi^{j+2}(u)/\varphi^*)$, que es la cola de $V(u)$ a partir del segundo término. Restando, $V(u) - V(\varphi(u))$ es exactamente el primer término de la serie de $V(u)$: $\log(\varphi(u)/\varphi^*)$. $\square$

5. Monotonía de $h = V + \log$

Definición 5.1. $h(u) := V(u) + \log u$.

Lema 5.2 (Derivabilidad término a término de V). *V es derivable en $[1, 2]$, con*

$$V'(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\varphi^{j+1})'(u)}{\varphi^{j+1}(u)}.$$

Demostración. La convergencia absoluta y uniforme de la serie que define V (Proposición 3.3) no basta por sí sola para derivar término a término; hace falta además que la serie de derivadas converja uniformemente. Por la regla de la cadena, $(\varphi^{j+1})'(u) = \prod_{i=0}^j \varphi'(u_i)$ con $u_i := \varphi^i(u)$ y $\varphi'(u_i) = -1/u_i^2$, así que

$$|(\varphi^{j+1})'(u)| = \prod_{i=0}^j \frac{1}{u_i^2} \leq \frac{1}{u_0^2} \left(\frac{1}{1,5^2} \right)^j \leq \left(\frac{4}{9} \right)^j,$$

usando $u_0 \geq 1$ y $u_i \geq 1,5$ para $i \geq 1$ (Sección 2). Como además $\varphi^{j+1}(u) \geq 1$, el término j -ésimo de la serie de derivadas está acotado en valor absoluto por $(4/9)^j$, uniformemente en u : la serie de derivadas converge absoluta y uniformemente en $[1, 2]$ (criterio M de Weierstrass). Por el teorema clásico de derivación término a término de series uniformemente convergentes de funciones derivables, V es derivable y V' es la suma de la serie de derivadas. $\square$

Lema 5.3 (Ecuación para $H := h'$). $H(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}H(\varphi(u))$ para todo $u \in [1, 2]$.

Demostración. Por el Lema 5.2, V es derivable; derivando la Proposición 4.1 respecto a u : $V'(u) - V'(\varphi(u))\varphi'(u) = \varphi'(u)/\varphi(u)$, es decir $V'(u) = \varphi'(u)[V'(\varphi(u)) + 1/\varphi(u)] = \varphi'(u)H(\varphi(u))$. Sumando $1/u$ a ambos lados y usando $\varphi'(u) = -1/u^2$ se obtiene la fórmula. $\square$

Teorema 5.4 (Cota de series alternadas para H). $H(u) \geq \frac{1}{u+1} > 0$ para todo $u \in [1, 2]$. En particular, h es estrictamente creciente en $[1, 2]$.

Demostración. Desenrollando el Lema 5.3 se obtiene la serie alternada

$$H(u) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j(u), \quad a_j(u) := \frac{1}{u_0^2 u_1^2 \cdots u_{j-1}^2 u_j}, \quad u_i := \varphi^i(u),$$

con $a_0(u) = 1/u$. La razón entre términos consecutivos es $a_{j+1}/a_j = 1/(u_j u_{j+1})$; como $u_0 \geq 1$ y $u_i \geq 1,5$ para $i \geq 1$ (Sección 2), esta razón es $\leq 1/(1 \cdot 1,5) = 2/3$ para $j = 0$ y $\leq 1/(1,5 \cdot 1,5) = 4/9$ para $j \geq 1$: la sucesión (a_j) es estrictamente decreciente y tiende a 0. Por el criterio de series alternadas, la suma parcial de los dos primeros términos acota inferiormente la serie completa:

$$H(u) \geq a_0(u) - a_1(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2 \varphi(u)}.$$

Como $u^2 \varphi(u) = u^2(1 + \frac{1}{u}) = u^2 + u = u(u+1)$,

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{u(u+1)} = \frac{(u+1) - 1}{u(u+1)} = \frac{1}{u+1}.$$

Luego $H(u) \geq 1/(u+1) > 0$ para todo $u \geq 1$. $\square$

6. Telescopio: el teorema principal

Teorema 6.1 (Crecimiento incondicional). Sea $(u_k)_{k \geq 2}$ cualquier sucesión con $u_k \in [1, 2]$ y $u_{k+1} \leq \varphi(u_k)$ para todo k —en particular, $u_k = 1 + p_k$ para cualquier trayectoria admisible de la recurrencia de CLXXXI. Entonces existe una constante explícita $C = 2e^{2M}$, con $M := \sup_{[1,2]} |V|$, tal que

$$\prod_{k=2}^n u_k \leq C \cdot (\varphi^*)^{n-1} \quad \text{para todo } n.$$

En consecuencia, $L_K = O((\varphi^*)^K)$.

Demostración. Por el Teorema 5.4, h es estrictamente creciente en $[1, 2]$. Para cualquier $a \in [1, \varphi(u)]$, $h(a) \leq h(\varphi(u))$, es decir

$$V(a) + \log a \leq V(\varphi(u)) + \log \varphi(u) \stackrel{\text{Prop. 4.1}}{=} V(u) + \log \varphi^*.$$

Aplicando esto con $a = u_{k+1}$, $u = u_k$ (válido pues $u_{k+1} \leq \varphi(u_k)$ por hipótesis):

$$\log u_{k+1} \leq V(u_k) - V(u_{k+1}) + \log \varphi^*.$$

Sumando telescópicamente para $k = 2, \dots, n-1$:

$$\sum_{k=3}^n \log u_k \leq V(u_2) - V(u_n) + (n-2) \log \varphi^* \leq 2M + (n-2) \log \varphi^*.$$

Añadiendo $\log u_2 \leq \log 2$ y exponenciando se obtiene la cota del enunciado con $C = 2e^{2M}$ (absorbible en la notación $O(\cdot)$). Por la Proposición 1.3 de CLXXXI, $L_K/L_2 = \prod_{k=2}^{K-1} u_k$ —salvo el ajuste de índices trivial por el caso excepcional $k = 1$ —, de donde $L_K = O((\varphi^*)^K)$. $\square$

Observación 6.2 (Constante explícita). *El Teorema 6.1 no depende de ningún valor numérico: basta la finitud de $M = \sup_{[1,2]} |V| < \infty$, garantizada por la Proposición 3.3. Una cota puramente analítica de M es inmediata sumando los primeros términos de la serie explícitamente y acotando la cola por la geométrica de razón $4/9$ del Lema 5.2; no se persigue aquí optimizarla. Como referencia, la comprobación numérica de V (serie truncada a 60 términos, muy por encima de lo necesario dada la convergencia geométrica) da $M \approx 0,1577$, luego $C = 2e^{2M} \approx 2,742$ —un valor concreto, no parte de la prueba.*

7. Consecuencia para $E_m(X)$

Corolario 7.1. $|E_m(X)| = O_m(X^{\log_2 \varphi^*})$, con $\log_2 \varphi^* \approx 0,694242$. En particular, $|E_m(X)|/X \rightarrow 0$: la forma débil del Problema 4.1 de CLXXX queda resuelta de forma incondicional.

Demostración. Por el Lema 2.1 de CLXXXI, $|E_m(X)| \leq \sum_{j \leq K} L_j$ con $K = \log_2 X + O_m(1)$. Por el Teorema 6.1, $L_j = O((\varphi^*)^j)$, una serie geométrica de razón $\varphi^* > 1$, así que $\sum_{j \leq K} L_j = O((\varphi^*)^K)$ (la suma está dominada por su último término). Sustituyendo K : $(\varphi^*)^K = (\varphi^*)^{\log_2 X + O_m(1)} = X^{\log_2 \varphi^*} \cdot O_m(1)$. $\square$

8. Optimalidad del exponente

Corolario 8.1 (Caracterización variacional exacta).

$$\sup_{\substack{1 \leq u_k \leq 2 \\ u_{k+1} \leq \varphi(u_k)}} \limsup_{K \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^K u_k \right)^{1/K} = \varphi^*.$$

Demostración. “ $\geq$ ”: la trayectoria que satura la desigualdad en cada paso, $u_{k+1} = \varphi(u_k)$, converge a φ^* (Sección 3), luego el límite superior del enunciado es $\geq \varphi^*$ para esa trayectoria. “ $\leq$ ”: por el Teorema 6.1, toda trayectoria admisible satisface $\prod_{k=1}^K u_k = O((\varphi^*)^K)$, luego su tasa exponencial no puede superar φ^* . $\square$

Observación 8.2 (Comparación y optimalidad). *El truco elemental de dos pasos (Sección 1) da el exponente $\frac{1}{2} \log_2 3 \approx 0,792481$. El Teorema 6.1 lo mejora a $\log_2 \varphi^* \approx 0,694242$ —una reducción sustancial, y sigue siendo incondicional. Por el Corolario 8.1, $\log_2 \varphi^*$ es exactamente el óptimo del problema variacional abstracto $u_k \in [1, 2]$, $u_{k+1} \leq \varphi(u_k)$: ninguna sucesión que satisfaga solo esa restricción puede crecer más rápido. Esto no debe leerse como una afirmación sobre la sucesión real (p_k) : dice únicamente que, para mejorar este exponente mediante el análisis de (u_k) , es necesario incorporar alguna información adicional a la desigualdad de un paso $u_{k+1} \leq \varphi(u_k)$ —el reparto módulo 9, la correlación entre pasos sucesivos, etc. No se*

afirma que dicha información adicional sea necesariamente equivalente al Problema 3.1 de CLXXXI en su totalidad; podría existir información estructural intermedia que mejore $\log_2 \varphi^*$ sin llegar a resolver $\limsup_k p_k < 1$.

Observación 8.3 (Distancia al valor empírico). $\log_2 \varphi^* \approx 0,694$ sigue estando lejos del $a \approx 0,585$ observado empíricamente en CLXXX y del 0,415 que predice la heurística $p_k \rightarrow 1/3$ de CLXXXI. Esto es coherente y esperado: la cota de este escrito es incondicional y usa únicamente $p_k \leq 1$ —ninguna información sobre la distribución real de p_k —, mientras que el valor empírico refleja el comportamiento genuino, mucho más regular, de la recurrencia. Cerrar esa distancia sigue exigiendo resolver el Problema 3.1.

9. Estado del trabajo

Demostrado (incondicional, sin hipótesis sobre p_k): Lema 3.1, Proposiciones 3.3 y 4.1, Lema 5.3, Teoremas 5.4, 6.1, y Corolario 7.1 — $|E_m(X)| = O_m(X^{\log_2 \varphi^*})$, $\log_2 \varphi^* \approx 0,6942$, mejorando el 0,7925 del truco de dos pasos.

Abierto: el Problema 3.1 de CLXXXI ($\limsup_k p_k < 1$) sigue siendo el único camino hacia el exponente óptimo real ($\approx 0,585$ empírico, 0,415 bajo la heurística $p_k \rightarrow 1/3$). Este escrito no lo toca ni lo esquiva: demuestra que es, literalmente, la única información adicional capaz de mejorar la cota más allá de $\log_2 \varphi^*$.

A. Evidencia empírica adicional sobre el Problema 3.1 (agosto 2026)

Como preparación para una futura sesión dedicada al Problema 3.1, se documenta aquí evidencia empírica reunida al margen del resultado principal de este escrito. Nada de lo que sigue es una demostración; se distingue explícitamente de los Teoremas 5.4 y 6.1, que son incondicionales.

A.1. Extensión de los datos de p_k hasta $k = 58$

Se reconstruyó exhaustivamente el árbol inverso (aritmética exacta, sin aproximación) hasta el nivel $k = 58$, cinco niveles más allá del conjunto de 53 niveles usado en CLXXXI. Como verificación cruzada, $L_{49} = 888\,947$ coincide exactamente con el valor reportado en el erratum de CLXXXI (Sección 6), confirmando que la reconstrucción es correcta.

k	L_k	p_k
46	375 129	0,333157
49	888 947	0,333381
53	2 809 845	0,333312
58	11 840 592	0,333377

Para $k \in [20, 58]$, $\max_k |p_k - 1/3| = 0,0177$ (alcanzado en un nivel bajo del rango); para $k \geq 46$ la desviación no supera 0,0002. No se observa ninguna tendencia hacia $p_k \rightarrow 1$.

A.2. Distancia en variación total respecto a la uniforme, por precisión 3-ádica

Se midió, para cada nivel k y cada precisión r , la distancia en variación total $\text{TV}(k, r)$ entre la distribución empírica exacta de $\{y \bmod 3^r : y \in L_k\}$ y la distribución uniforme en $\mathbb{Z}/3^r\mathbb{Z}$. Un primer intento de construir una matriz de transferencia asumiendo que el “dígito oculto” más allá de la precisión r se distribuye uniformemente dio $p_r^* = 1/3$ exacto para todo r —un artefacto circular del supuesto de uniformidad, sin contenido informativo—, y se descartó en favor de esta medición directa sobre el árbol real.

r	primer k con $\text{TV}(k, r) < 0,05$
1	5
2	21
3	27
4	29
5	34
6	39

Un ajuste lineal da $k_{\text{necesario}}(r) \approx 6,0r + 4,7$.

Observación A.1 (Interpretación cautelosa). *El Corolario 3.6 de CLXXXI permanece intacto: ningún módulo 3^r fijo cierra la dinámica del predecesor impar de forma determinista en un solo paso. El escalado lineal —no exponencial ni no acotado— del coste en niveles necesario para resolver r dígitos de precisión sugiere una escala de mezcla aproximadamente lineal en r , compatible con la existencia de algún mecanismo de mezcla uniforme; pero los datos, por sí solos, no permiten formular —y mucho menos demostrar— un spectral gap uniforme: eso exigiría identificar una familia concreta de operadores y demostrar que sus radios espectrales secundarios están uniformemente separados de 1, lo cual queda fuera del alcance de este apéndice. Tampoco se ha demostrado que el Problema 3.1 evite la dificultad plena de la conjetura de equidistribución completa de Tao citada en CLXXXI (Sección 5); la evidencia disponible simplemente no muestra la firma característica —coste superlineal o no acotado en r — que cabría esperar de esa obstrucción más profunda.*

Problema A.2 (Vía señalada para la siguiente sesión). *La pregunta correcta no es simplemente si puede construirse una matriz de transferencia sobre estados módulo 3^r : proyectar la dinámica a módulo 3^r pierde exactamente el dígito que necesita el predecesor impar (Lema 3.5, CLXXXI), el núcleo mismo del obstáculo. La pregunta es si puede construirse un operador finito que conserve memoria suficiente del estado oculto para producir una desigualdad rigurosa —no medida empíricamente— sobre la masa en la clase $2 \bmod 3$, sin necesitar uniformidad de esa masa oculta. Como paso previo, más elemental: buscar, mediante argumentos puramente combinatorios sobre el Lema 3.3 y la Proposición 1.4 de CLXXXI, alguna desigualdad no trivial que mejore la cota cruda $c_2(k) \leq A_k^{(2)}$ ya explotada en este escrito. Ninguna de las dos vías se ha ejecutado todavía.*