Estructura modular de la dinámica de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Marzo de 2026, revisado y ampliado en octubre de 2026

Resumen

En este trabajo se estudia la dinámica de la función de Collatz desde una perspectiva estructural basada en la clasificación modular de los números naturales. Se introduce el grafo modular asociado a la dinámica y se describe la existencia de once ciclos modulares elementales que recogen los comportamientos locales de la función.

De estos once ciclos elementales, nueve son incondicionalmente contractivos, salvo el circuito trivial $4 \to 2 \to \underline{1} \to 4$, que conserva el valor, y exactamente dos pueden producir expansión bajo condiciones aritméticas precisas. Cada circuito de estos dos aumenta el valor; medido el balance hasta el término que sigue a k circuitos consecutivos, que se obtiene por una división, el crecimiento neto se produce exactamente para $k \geq 2$ en el ciclo $(7, \underline{8}, 7)$, el mecanismo expansivo dominante, con coeficiente dinámico $(3/2)^k/2$, y para $k \geq 6$ en el ciclo $(7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7)$, el mecanismo secundario, con coeficiente dinámico $(9/8)^k/2$.

Se caracterizan aritméticamente los enteros que recorren el ciclo crítico: un número par de raíz digital 7 completa exactamente r circuitos si y sólo si $\nu_2(x+2) = r+1$, de modo que la proporción de los que completan al menos r circuitos dentro de su clase es $1/2^r$. Se obtiene la caracterización análoga del ciclo $(7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7)$ mediante $\nu_2(x+20)$, que cada circuito reduce en 3: el umbral $k \geq 6$ se alcanza, y el menor entero que lo hace es 4 718 572. Las longitudes de los bloques de ambos ciclos siguen leyes geométricas de razón 2^{-d}, donde d es lo que cada circuito reduce la valuación correspondiente.

Mediante una descomposición del itinerario modular de cada órbita en ciclos elementales se demuestra que toda órbita cuyo itinerario, a partir de algún momento, no contiene los ciclos $(7, \underline{8}, 7)$ y $(7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7)$ alcanza el 1, y que lo mismo ocurre si, a partir de algún momento, la órbita no recorre en pasos consecutivos ningún circuito de esos dos ciclos. En consecuencia, una órbita divergente o un ciclo no trivial, si existieran, tendrían que recorrer uno de esos dos ciclos infinitas veces; y si prescindieran definitivamente del ciclo crítico, tendrían que completar infinitas veces al menos dos circuitos consecutivos del ciclo $(7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7)$. Se muestra, por último, que los argumentos basados en información finita no bastan para decidir si una órbita puede reentrar indefinidamente en ese ciclo.

Índice

1. Introducción **3**

2. Definiciones básicas **3**

3. Sistema modular y grafo asociado **4**

4. Clasificación de los once ciclos elementales **6**

5. Circuitos del ciclo crítico **11**

6. Caracterización aritmética del ciclo crítico **12**

7. Densidad de los números admisibles **13**

8. Análisis dinámico local de los once conjuntos **14**
8.1. Circuitos elementales y coeficiente dinámico de salida 14

9. Coeficientes individuales del ciclo crítico y del retorno **17**

10. Caracterización aritmética del ciclo 11 **18**
10.1. La transformación por circuito 18
10.2. La valuación que gobierna los circuitos 19
10.3. Familia explícita y umbral expansivo 20

11. Distribución y cotas de los bloques del ciclo 11 **21**
11.1. Densidad entre los pares de raíz digital 7 21
11.2. Parametrización de los bloques 21
11.3. Distribución geométrica y autosemejanza 22
11.4. Contracción y expansión de bloques individuales 23
11.5. Promedios exactos 24
11.6. Envolvente superior óptima 25

12. Convergencia en ausencia de los ciclos 6 y 11 **26**
12.1. Convergencia sin circuitos de los ciclos 6 y 11 28

13. Reentradas en el ciclo 11 y límites del método **32**

14. Preguntas abiertas **34**

15. Conclusión **35**

A. Programas de verificación **36**

1. Introducción

La conjetura de Collatz describe la dinámica de la función definida sobre los números naturales por

$$T(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

A pesar de su formulación elemental, el comportamiento global de sus órbitas sigue siendo un problema abierto. Uno de los enfoques habituales consiste en estudiar la dinámica mediante clasificaciones modulares que permiten identificar regularidades estructurales en la evolución de las secuencias.

En este trabajo se adopta un enfoque basado en la estructura modular inducida por las raíces digitales, lo que permite construir un grafo dinámico finito que describe las posibles transiciones locales de la función. Este grafo tiene dieciocho nodos (nueve clases de raíz digital, cada una con sus versiones par e impar) y sus transiciones quedan completamente determinadas por las reglas aritméticas de la función de Collatz.

El estudio de los ciclos de este grafo conduce a una clasificación precisa: de los once ciclos elementales posibles, nueve son incondicionalmente contractivos, salvo el circuito trivial $4 \to 2 \to \underline{1} \to 4$, que conserva el valor. Los dos restantes pueden producir expansión, pero solo bajo condiciones aritméticas estrictas. El ciclo $(7, \underline{8}, 7)$ es el mecanismo dominante, con umbral $k \geq 2$ circuitos elementales. El ciclo $(7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7)$ es un mecanismo secundario, con umbral mucho más alto $k \geq 6$. Ambos umbrales están cuantificados exactamente a partir de sus coeficientes elementales $\lambda = 3/2$ y $\lambda = 9/8$ respectivamente.

El objetivo del trabajo es formalizar esta estructura, caracterizar aritméticamente los enteros que recorren el ciclo crítico y demostrar que, en ausencia de los dos ciclos condicionalmente expansivos, toda órbita converge. De ahí se sigue que una órbita no convergente, si existiera, tendría que apoyarse indefinidamente en alguno de ellos.

El trabajo caracteriza también el ciclo $(7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7)$, estudia la distribución de las longitudes de sus bloques y examina las reentradas en él, que delimitan el alcance de los métodos empleados. Reúne en una versión única tres escritos publicados anteriormente por separado: *Estructura modular de la dinámica de Collatz*, *Caracterización aritmética del ciclo secundario* C_{11} y *Distribución de longitudes y cotas exactas para los bloques del ciclo* C_{11}.

En adelante utilizaremos un subrayado para distinguir los nodos impares dentro del sistema modular.

2. Definiciones básicas

Definición 2.1. *La función de Collatz es la aplicación* $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definida por*

$$T(n) = \begin{cases} n/2 & \textit{si } n \textit{ es par,} \\ 3n+1 & \textit{si } n \textit{ es impar.} \end{cases}$$

Definición 2.2. *Dado* $n \in \mathbb{N}$*, se llama* ***órbita de Collatz*** *de* n *a la sucesión*

$$n,\ T(n),\ T^2(n),\ T^3(n), \ldots$$

donde T^k denota la k-ésima iteración de la función T.

Definición 2.3. *Se define la valuación 2-ádica $\nu_2(n)$ como el mayor entero k tal que*

$$2^k \mid n.$$

Definición 2.4. *Diremos que un paso impar produce k divisiones si*

$$\nu_2(3n+1) = k.$$

Esto significa que tras aplicar $3n+1$ aparecen exactamente k divisiones consecutivas entre 2.

3. Sistema modular y grafo asociado

Definición 3.1. *La raíz digital $\mathrm{rd}(n)$ de un número natural n es el valor obtenido al sumar repetidamente sus cifras decimales hasta obtener un número entre 1 y 9; equivalentemente, el residuo de n módulo 9, tomando 9 en lugar de 0. Dos números con la misma raíz digital pertenecen a la misma **clase modular digital**, de modo que hay nueve clases, $1, \ldots, 9$.*

Definición 3.2. *Un **nodo modular** es una clase modular digital junto con una paridad; los nodos impares se representan subrayados. El **grafo modular de Collatz** es el grafo dirigido cuyos dieciocho nodos son los nodos modulares y en el que hay una arista entre dos nodos si existe al menos un número natural cuya imagen por T realiza esa transición.*

Cada nodo es, por tanto, el conjunto de los enteros positivos con una raíz digital y una paridad dadas, es decir, una clase de restos módulo 18; por ejemplo, el nodo par de raíz digital 7 está formado por los enteros $18k + 16$, con $k \geq 0$. Los dieciocho nodos forman una partición de los enteros positivos, y el itinerario de una órbita (Definición 12.1) es su proyección sobre el grafo.

Este grafo describe, desde el punto de vista modular, los comportamientos locales posibles de la dinámica de Collatz: sus transiciones dependen tanto de la paridad como de la clase modular.

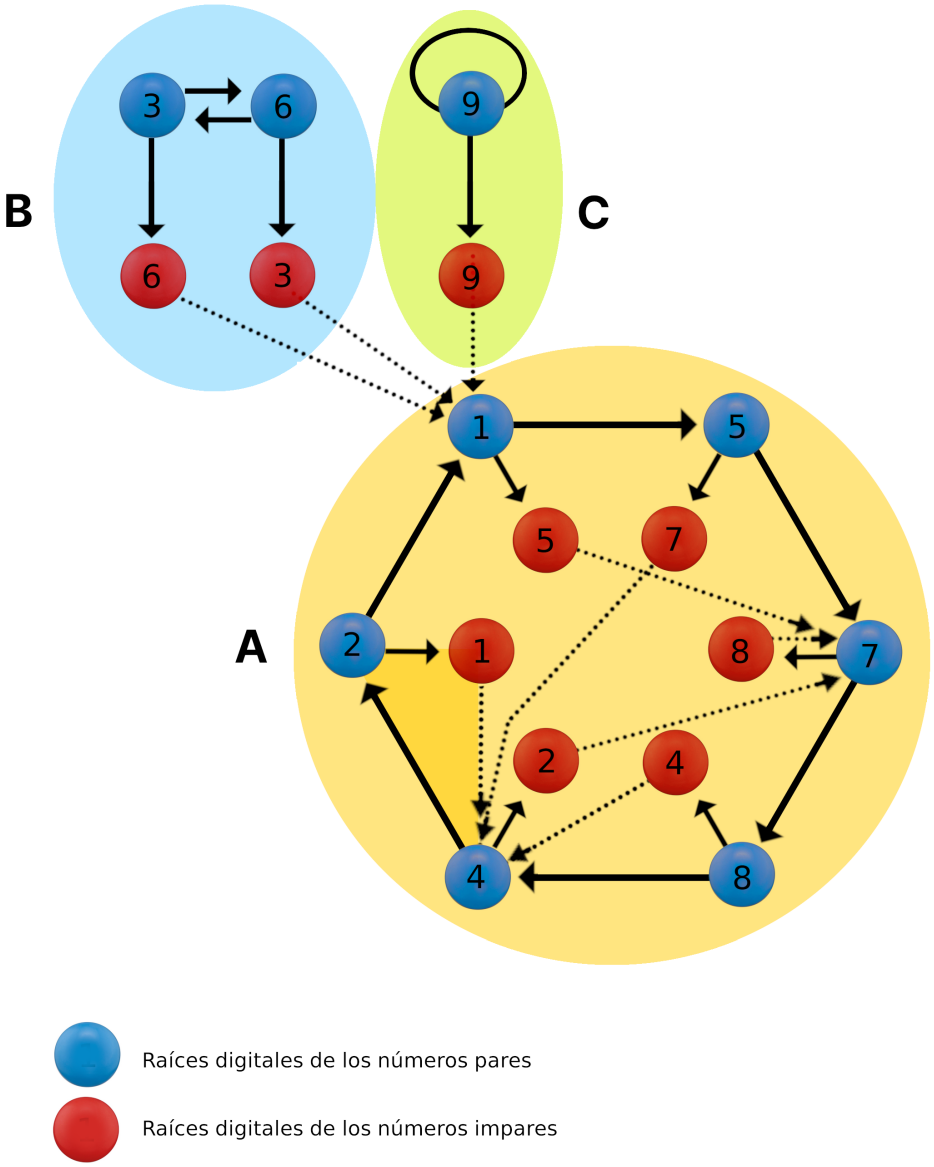


Figura 1: Grafo modular de la dinámica de Collatz según las raíces digitales. Los nodos impares se representan en color rojo y los pares en azul.

El grafo puede explorarse en el generador tridimensional de https://www.collatz.es/articulos/seccion4_1/grafo-collatz-3d.php, que dispone los seis nodos pares de raíces $1, 2, 4, 5, 7, 8$ en un hexágono y sus nodos impares debajo, y la órbita de cualquier número puede descomponerse en los ciclos del grafo con el analizador modular que acompaña a este artículo.

Definición 3.3. *Un **ciclo modular** es un recorrido cerrado dentro del grafo modular; es **elemental** si no repite nodos. Salvo que se diga otra cosa, los ciclos considerados en adelante son elementales y se identifican salvo rotación.*

4. Clasificación de los once ciclos elementales

El estudio del grafo modular asociado a la dinámica de Collatz permite identificar once ciclos elementales entre las clases modulares.

Lema 4.1 (Reglas de transición modular)**.** *Sea $d(n)$ la raíz digital de n, con convenio $d(n) \in \{1, \ldots, 9\}$.*

1. *Si n es par, entonces $d(n/2) \equiv 5\, d(n) \pmod 9$, tomando 9 en lugar de 0.*
2. *Si n es impar, entonces $d(3n+1) \equiv 3\, d(n) + 1 \pmod 9$, tomando 9 en lugar de 0.*

Demostración. Como $2 \cdot 5 \equiv 1 \pmod 9$, el número 5 es el inverso de 2 módulo 9. Por tanto, si n es par, $d(n/2) \equiv 5\, d(n) \pmod 9$. Si n es impar, la raíz digital es compatible con las operaciones aritméticas módulo 9, de modo que $d(3n+1) \equiv 3\, d(n) + 1 \pmod 9$. □

El Lema 4.1 permite calcular de forma algebraica y exhaustiva todas las transiciones del grafo modular. La Tabla 1 recoge el resultado para cada una de las nueve clases de raíz digital, distinguiendo paridad.

Cuadro 1: Reglas de transición del grafo modular de Collatz.

Zona	**Nodo origen**	**Operación**	**Nodo destino**
B	par rd(3)	$n \mapsto n/2$	par/impar rd(6)
B	par rd(6)	$n \mapsto n/2$	par/impar rd(3)
B	impar rd(3)	$n \mapsto 3n+1$	par rd(1)
B	impar rd(6)	$n \mapsto 3n+1$	par rd(1)
C	par rd(9)	$n \mapsto n/2$	par/impar rd(9)
C	impar rd(9)	$n \mapsto 3n+1$	par rd(1)
A	par rd(1)	$n \mapsto n/2$	par/impar rd(5)
A	par rd(2)	$n \mapsto n/2$	par/impar rd(1)
A	par rd(4)	$n \mapsto n/2$	par/impar rd(2)
A	par rd(5)	$n \mapsto n/2$	par/impar rd(7)
A	par rd(7)	$n \mapsto n/2$	par/impar rd(8)
A	par rd(8)	$n \mapsto n/2$	par/impar rd(4)
A	impar rd(1)	$n \mapsto 3n+1$	par rd(4)
A	impar rd(2)	$n \mapsto 3n+1$	par rd(7)
A	impar rd(4)	$n \mapsto 3n+1$	par rd(4)
A	impar rd(5)	$n \mapsto 3n+1$	par rd(7)
A	impar rd(7)	$n \mapsto 3n+1$	par rd(4)
A	impar rd(8)	$n \mapsto 3n+1$	par rd(7)

Proposición 4.2. *El grafo modular de Collatz admite exactamente once ciclos elementales, es decir, recorridos cerrados que no repiten nodos.*

Demostración. Por el Lema 4.1, las reglas de transición del grafo modular están completamente determinadas y quedan recogidas en la Tabla 1. El grafo resultante

tiene dieciocho nodos (nueve clases de raíz digital, cada una con sus versiones par e impar) y sus aristas son las indicadas en dicha tabla.

Obsérvese que todo nodo impar mapea siempre a un nodo par (pues $3n+1$ es par cuando n es impar), de modo que ningún nodo impar puede ser punto intermedio de un ciclo salvo como paso de entrada a un nodo par.

El grafo se descompone en tres componentes según el comportamiento modular:

- **Zona B** (raíces 3 y 6): los nodos pares forman un ciclo de dos pasos ($\mathrm{rd}(3) \leftrightarrow \mathrm{rd}(6)$), y los nodos impares salen hacia la Zona A. Esto produce un ciclo local.
- **Zona C** (raíz 9): el nodo par rd(9) mapea a sí mismo (pues $5 \cdot 9 \equiv 9 \pmod 9$). Los impares salen hacia la Zona A. Esto produce un ciclo local.
- **Zona A** (raíces $1, 2, 4, 5, 7, 8$): los nodos pares forman el ciclo

$$1 \to 5 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

  Los nodos impares de esta zona mapean únicamente a los nodos pares rd(4) y rd(7), desde donde la órbita continúa dentro del mismo ciclo de pares.

Ninguna transición de la Zona A conduce a las zonas B o C, pues ni $5d$ ni $3d+1$ son múltiplos de 3 cuando d no lo es. Por tanto todo ciclo está contenido en una sola zona, y las zonas B y C aportan exactamente un ciclo cada una. En particular, como $3n+1$ nunca es múltiplo de 3 y dividir por 2 no altera la divisibilidad por 3, tras el primer número impar una órbita no vuelve a contener múltiplos de 3 y permanece en la Zona A.

Para la Zona A, situemos los seis nodos pares en el anillo

$$1 \to 5 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

y numeremos sus posiciones $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Cada nodo impar $\underline{d}$ está entre su predecesor par e, con $5e \equiv d \pmod 9$, y su sucesor par $3d+1$, y actúa como atajo entre ambos:

- hacia delante: $\underline{5}$ (de 1 a 7) y $\underline{4}$ (de 8 a 4), que avanzan lo mismo que el anillo, y $\underline{7}$ (de 5 a 4), que avanza tres posiciones saltando 7 y 8;
- de retroceso: $\underline{8}$ (de 7 a 7), $\underline{1}$ (de 2 a 4, una posición atrás) y $\underline{2}$ (de 4 a 7, dos posiciones atrás).

Un ciclo elemental no repite nodos pares. Si sólo avanza, da exactamente una vuelta al anillo: con el salto $\underline{7}$ hay un ciclo, y sin él hay cuatro, según se use o no cada uno de los atajos $\underline{5}$ y $\underline{4}$. Si usa un retroceso, sólo puede usar uno —el lazo $\underline{8}$ ya es un ciclo completo, y combinar $\underline{1}$ con $\underline{2}$ obliga a repetir el nodo 4—, no puede dar además la vuelta al anillo sin repetir nodos, y se cierra con un avance desde el destino del retroceso hasta su origen: un ciclo para $\underline{8}$, uno para $\underline{1}$ (el avance $4 \to 2$) y dos para $\underline{2}$ (de 7 a 4 pasando o no por $\underline{4}$). En total, $5 + 4 = 9$ ciclos, recogidos en la Tabla 2.

Cuadro 2: Los nueve ciclos locales de la Zona A.

Conj.	**Secuencia de nodos**	**Pasos p/i**	**Coef. elemental λ**
3	$1 \to 5 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$	$6+0$	$\frac{1}{64}$
4	$1 \to \underline{5} \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$	$5+1$	$\frac{3}{32}$
5	$5 \to \underline{7} \to 4 \to 2 \to 1 \to 5$	$4+1$	$\frac{3}{16}$
6	$7 \to \underline{8} \to 7$	$1+1$	$\frac{3}{2}^*$
7	$8 \to \underline{4} \to 4 \to 2 \to 1 \to 5 \to 7 \to 8$	$6+1$	$\frac{3}{64}$
8	$7 \to 8 \to 4 \to \underline{2} \to 7$	$3+1$	$\frac{3}{8}$
9	$4 \to 2 \to \underline{1} \to 4$	$2+1$	$\frac{3}{4}$
10	$1 \to \underline{5} \to 7 \to 8 \to \underline{4} \to 4 \to 2 \to 1$	$5+2$	$\frac{9}{32}$
11	$7 \to 8 \to \underline{4} \to 4 \to \underline{2} \to 7$	$3+2$	$\frac{9}{8}^*$

* El coeficiente dinámico de salida tras k circuitos es $\mu(k) = \lambda^k/2$. Los ciclos 6 y 11 son los únicos con $\lambda > 1$; su naturaleza expansiva o contractiva depende de k según se detalla en la Sección 8.1.

En total, $1 + 1 + 9 = 11$ ciclos locales, representados en la Figura 2. □

Estos ciclos describen los comportamientos locales que pueden aparecer en la dinámica cuando se consideran conjuntamente la paridad y la raíz digital.

Figura 2 · Lámina 1 de 2

Azul: par Rojo: impar

C1

2 pares · 0 impares · λ = 1/4

C2

1 par · 0 impares · λ = 1/2

C3

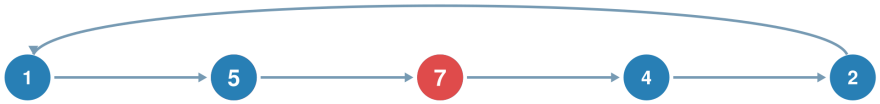
6 pares · 0 impares · λ = 1/64

C4

5 pares · 1 impar · λ = 3/32

C5

4 pares · 1 impar · λ = 3/16



C6

1 par · 1 impar · λ = 3/2

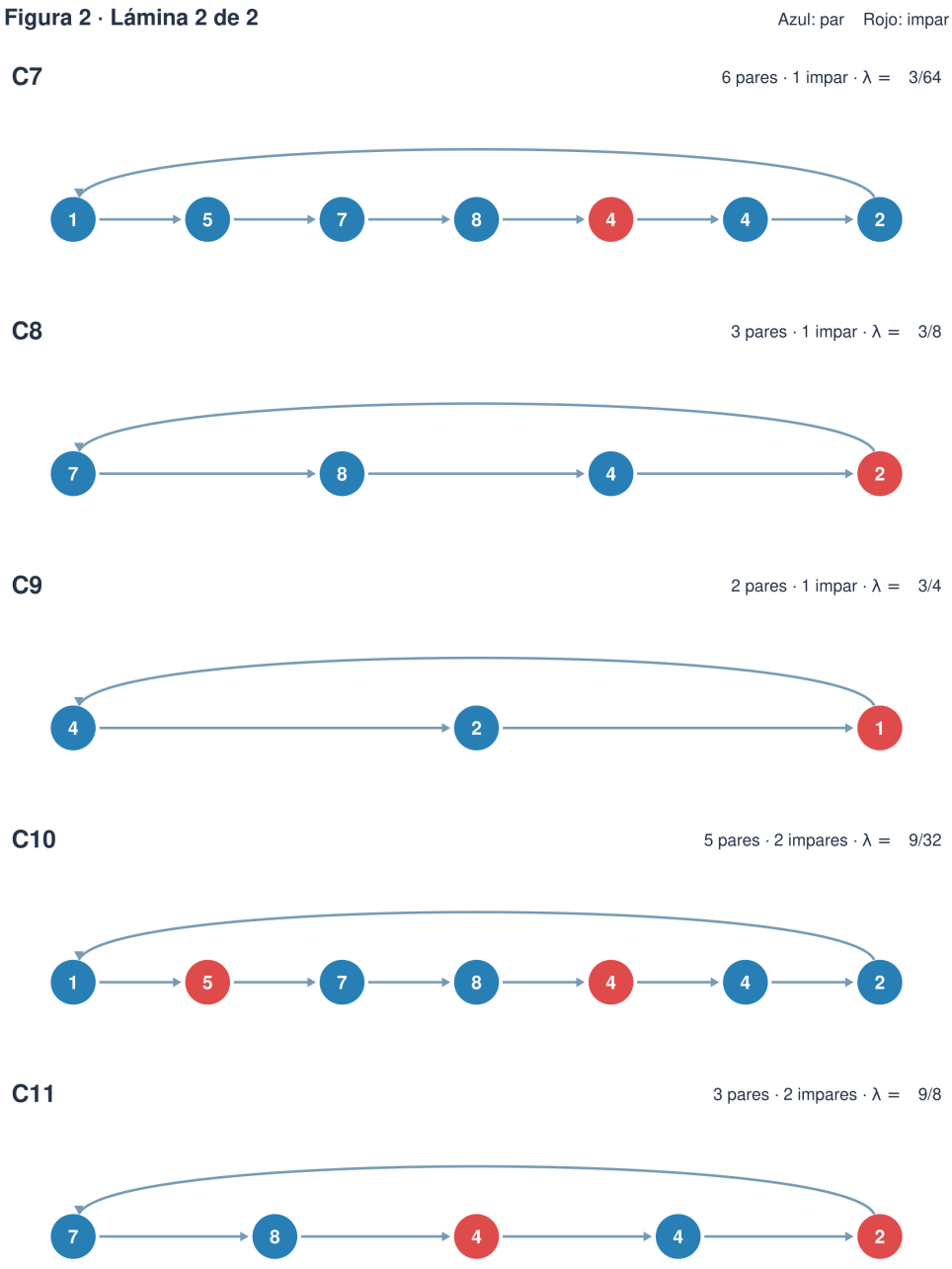


Figura 2: Clasificación de los once ciclos elementales de la dinámica modular. La notación C_i designa el ciclo i de la clasificación de la Tabla 2. Los nodos azules corresponden a pasos pares y los rojos a pasos impares. Se indica para cada ciclo su coeficiente elemental λ.

Definición 4.3. *Diremos que un ciclo es:*

- ***expansivo*** *si puede producir crecimiento local del valor orbital;*
- ***contractivo*** *si produce una reducción del valor orbital.*

Definición 4.4. *Llamaremos* ***ciclo crítico*** *al ciclo modular*

$$(7, \underline{8}, 7),$$

formado por números pares con raíz digital 7 *e impares con raíz digital* 8.

Este es el mecanismo expansivo dominante de la dinámica: produce crecimiento neto a partir de $k \geq 2$ *circuitos elementales consecutivos. El ciclo* 11 *constituye un mecanismo expansivo secundario, con umbral más alto* $k \geq 6$.

No todo número par de raíz digital 7 puede iniciar el ciclo crítico; cuando esta condición falla, la órbita abandona inmediatamente el mecanismo expansivo.

Proposición 4.5. *Entre los once ciclos elementales, nueve son incondicionalmente contractivos, salvo el circuito trivial* $4 \to 2 \to \underline{1} \to 4$*, cuyo cociente es* 1*. Los ciclos* 6 *y* 11 *son condicionalmente expansivos: medido el balance hasta el término que sigue al último circuito, el ciclo* 6 *produce expansión neta para* $k \geq 2$ *circuitos elementales, y el ciclo* 11 *para* $k \geq 6$.

5. Circuitos del ciclo crítico

El ciclo localmente expansivo dominante identificado en el grafo modular es el ciclo $(7, \underline{8}, 7)$.

Definición 5.1. *Llamaremos* ***circuito crítico completado*** *al recorrido*

$$7 \to \underline{8} \to 7.$$

Este circuito sólo puede comenzar en aquellos números pares de raíz digital 7 *cuyo siguiente término* $n/2$ *sea un número impar de raíz digital* $\underline{8}$.

Si $n/2$ *no es impar, entonces el circuito crítico no puede iniciarse y la órbita abandona inmediatamente este mecanismo.*

Definición 5.2. *Diremos que un número par de raíz digital* 7 *es* ***admisible para el ciclo crítico*** *si satisface*

$$\nu_2(n+2) \geq 2.$$

Equivalentemente,

$$n \equiv 34 \pmod{36}.$$

Sólo estos números pueden iniciar un circuito crítico.

Definición 5.3. *Llamaremos* ***bloque expansivo*** *a una concatenación máxima de circuitos críticos completados.*

Proposición 5.4. *En un bloque expansivo, todos los impares interiores que permiten continuar el ciclo son de la forma* $4n + 3$*, mientras que el último impar antes de abandonar el bloque es necesariamente de la forma* $4n + 1$.

Demostración. Mientras un bloque expansivo continúa, cada impar intermedio satisface

$$\nu_2(3n+1) = 1,$$

lo que equivale a que sea de la forma $4n+3$. El bloque termina precisamente cuando esta condición deja de cumplirse. En ese instante aparece un impar para el cual

$$\nu_2(3n+1) \geq 2,$$

y eso caracteriza exactamente a los impares de la forma $4n+1$. □

6. Caracterización aritmética del ciclo crítico

Definición 6.1. *Sea x un número par de raíz digital 7 admisible para el circuito crítico. Entonces el siguiente número par de raíz digital 7 tras completar un circuito viene dado por*

$$\Phi(x) = \frac{3x+2}{2}.$$

Esta transformación sólo está definida cuando el circuito crítico puede completarse.

Demostración. El circuito comienza con un número par x de raíz digital 7. El siguiente término es $x/2$, que es impar de raíz digital 8. Aplicando la función de Collatz a este impar se obtiene

$$3\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = \frac{3x+2}{2},$$

que es de nuevo un número par de raíz digital 7. □

Proposición 6.2. *Un número par x de raíz digital 7 completa exactamente r circuitos críticos si y sólo si*

$$\nu_2(x+2) = r+1.$$

Demostración. Mientras el circuito crítico pueda seguir completándose, el número par de raíz digital 7 evoluciona según

$$x_{j+1} = \frac{3x_j+2}{2}.$$

Sumando 2 en ambos lados:

$$x_{j+1} + 2 = \frac{3x_j+2}{2} + 2 = \frac{3x_j+6}{2} = \frac{3(x_j+2)}{2}.$$

Por tanto,

$$\nu_2(x_{j+1}+2) = \nu_2(x_j+2) - 1.$$

Cada circuito completado reduce en una unidad la valuación 2-ádica de x_j+2. El proceso puede continuar exactamente mientras $\nu_2(x_j+2) \geq 2$, es decir, mientras $x_j \equiv 2 \pmod 4$, lo que garantiza que $x_j/2$ sea impar y pueda actuar como nodo intermedio 8.

Así, si inicialmente

$$\nu_2(x+2) = r+1,$$

entonces se completan exactamente r circuitos y en el siguiente paso el ciclo se rompe. □

Corolario 6.3. *Los números que completan exactamente r circuitos críticos son de la forma*

$$x = 2\big(9 \cdot 2^r(2m-1) - 1\big), \qquad m \geq 1.$$

Demostración. La condición $\nu_2(x+2) = r+1$ equivale a escribir

$$x + 2 = 2^{r+1} \cdot 9(2m-1),$$

pues x debe pertenecer a la clase modular digital 7, lo que fuerza el factor 9, y el factor impar restante puede escribirse como $2m-1$. Despejando:

$$x = 2\big(9 \cdot 2^r(2m-1) - 1\big).$$

□

En particular, para los primeros valores de r se obtienen exactamente las familias

$$72m - 38, \qquad 144m - 74, \qquad 288m - 146, \qquad 576m - 290, \ldots$$

que corresponden respectivamente a uno, dos, tres, cuatro, ... circuitos completados.

Los mínimos de cada familia son

$$34,\ 70,\ 142,\ 286,\ 574, \ldots$$

y satisfacen

$$C(r) = 2(9 \cdot 2^r - 1).$$

Observación 6.4. *Escribiendo $o = x/2$, la condición $\nu_2(x+2) = r+1$ equivale a $\nu_2(o+1) = r$: es la conocida descripción de las rachas de pasos impares con una sola división mediante la valuación de $o+1$, caso particular del hecho, establecido por Terras [2], de que la sucesión de paridades de los primeros k pasos depende sólo del residuo módulo 2^k. Lo propio de la lectura modular es que la clase 8 módulo 9 es invariante bajo esos pasos, pues $5\,(3 \cdot 8 + 1) \equiv 8 \pmod 9$; por eso cada paso de la racha que parte de un impar de raíz digital 8 es un circuito del ciclo crítico.*

7. Densidad de los números admisibles

No todos los números pares de raíz digital 7 pueden iniciar un circuito crítico. Esta posibilidad depende de la valuación 2-ádica de $x+2$.

Definición 7.1. *Diremos que un número par de raíz digital 7 es **admisible** si puede iniciar al menos un circuito crítico, es decir, si*

$$\nu_2(x+2) \geq 2.$$

Equivalentemente,

$$x \equiv 34 \pmod{36}.$$

Proposición 7.2. *La proporción de números pares de raíz digital 7 que son admisibles es exactamente $\frac{1}{2}$.*

Demostración. Todo número par de raíz digital 7 puede escribirse como

$$x = 18k + 16.$$

Entonces:

$$x + 2 = 18k + 18 = 18(k + 1).$$

Por tanto:

$$\nu_2(x + 2) = \nu_2(18) + \nu_2(k + 1) = 1 + \nu_2(k + 1).$$

Para que exista al menos un circuito crítico debe cumplirse

$$\nu_2(x + 2) \geq 2,$$

lo que equivale a

$$\nu_2(k + 1) \geq 1.$$

Esto ocurre exactamente cuando k es impar. Como la mitad de los enteros son impares, exactamente la mitad de los pares rd7 son admisibles. □

Teorema 7.3. *Dentro de los números pares de raíz digital 7, la proporción de los que completan exactamente r circuitos críticos es $1/2^{r+1}$, y la de los que completan al menos r circuitos es $1/2^r$.*

Demostración. Con la notación de la proposición anterior, $x = 18k + 16$ y $\nu_2(x + 2) = 1 + \nu_2(k + 1)$. Completar exactamente r circuitos equivale a $\nu_2(x + 2) = r + 1$, es decir, a $\nu_2(k + 1) = r$, y la proporción de los enteros k con esa valuación es $1/2^{r+1}$. Completar al menos r circuitos equivale a $\nu_2(k+1) \geq r$, con proporción $1/2^r$. □

Corolario 7.4. *Los números capaces de producir bloques expansivos largos se vuelven exponencialmente raros.*

Observación 7.5. *Esto muestra que el mecanismo expansivo dominante no sólo está localizado estructuralmente, sino que es también progresivamente restrictivo desde el punto de vista aritmético.*

8. Análisis dinámico local de los once conjuntos

8.1. Circuitos elementales y coeficiente dinámico de salida

Definición 8.1. *Llamaremos **circuito elemental** a una vuelta completa dentro de un ciclo local del grafo modular, considerada desde un nodo base especificado. Un **bloque** de circuitos de un ciclo es una concatenación máxima de circuitos consecutivos de ese ciclo desde su nodo base; el bloque termina cuando no puede completarse otro circuito consecutivo del mismo patrón.*

Observación 8.2. *Una órbita puede recorrer varias veces seguidas un mismo ciclo local. Este fenómeno ocurre, por ejemplo, en el ciclo crítico $(7, \underline{8}, 7)$, donde una órbita puede completar varios circuitos elementales consecutivos antes de terminar ese bloque, y volver más adelante a recorrerlo en otro bloque.*

Definición 8.3. *Definiremos el* ***coeficiente dinámico de salida*** *de un ciclo local tras k circuitos elementales consecutivos como el cociente entre el término que sigue al último de esos circuitos y el valor de entrada inicial. En los ciclos 6 y 11, cuyos circuitos empiezan y terminan en un par de raíz digital 7, ese término se obtiene por una división por 2. Puede ser impar, como el $\underline{8}$ al que se llega cuando la órbita entra a continuación en el ciclo crítico, y puede estar todavía en un nodo del ciclo, como el 8 par en el ciclo 11, sin que se complete otro circuito.*

Definición 8.4. *El* ***coeficiente elemental*** *de un ciclo local con i nodos impares y p nodos pares es $\lambda = 3^i/2^p$: el cociente entre el valor al completar un circuito elemental y el valor de entrada, prescindiendo de los sumandos $+1$ de los pasos impares. Cuando los circuitos se toman empezados y terminados en un nodo par, como el par de raíz digital 7 en los ciclos 6 y 11, el término que sigue al último es su mitad, y el* ***coeficiente principal de salida*** *tras k circuitos es*

$$\mu(k) = \lambda^k \cdot \frac{1}{2},$$

donde el factor $\frac{1}{2}$ corresponde a la división que sigue al último circuito.

Proposición 8.5. *El cociente exacto entre el valor al completar un circuito elemental y el valor de entrada es*

$$\lambda \prod_m \Big(1 + \frac{1}{3m}\Big),$$

donde m recorre los valores impares de la órbita en los pasos del circuito. En particular, λ y $\mu(k)$ son los coeficientes principales de los cocientes exactos, a los que se aproximan cuando los valores son grandes.

Demostración. Un paso par multiplica el valor exactamente por $\frac{1}{2}$, y un paso impar sobre m lo multiplica por $3 + \frac{1}{m} = 3\big(1 + \frac{1}{3m}\big)$. Al multiplicar los factores de los pasos del circuito, los factores principales dan $3^i 2^{-p} = \lambda$. □

Observación 8.6. *Para los nueve ciclos con $\lambda < 1$, el coeficiente principal cumple $\mu(k) < 1/2$ para todo $k \geq 1$.*

Para el ciclo 6, $\lambda = 3/2$, y se tiene:

$$\mu(k) = \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} > 1 \iff k \geq 2.$$

Es el ciclo estructuralmente más sensible: basta con $k = 2$ circuitos elementales para producir expansión neta.

Para el ciclo 11, $\lambda = 9/8$, y se tiene:

$$\mu(k) = \left(\frac{9}{8}\right)^k \cdot \frac{1}{2} > 1 \iff k \geq 6.$$

Este ciclo puede volverse expansivo, pero requiere al menos seis circuitos elementales consecutivos, lo que lo hace estructuralmente mucho más restrictivo que el ciclo 6.

La Proposición 8.11 muestra que estos umbrales valen también para los cocientes exactos.

Definición 8.7. *Llamaremos* ***bloque mínimo de retorno*** *al recorrido*

$$7 \to 8 \to \underline{4} \to 4 \to \underline{2} \to 7 \to \underline{8},$$

que lleva desde el número par de raíz digital 7 *con el que termina un bloque expansivo hasta el impar de raíz digital* 8 *que reabre el ciclo crítico. Es el camino más corto del grafo modular entre esa salida y la reentrada en el ciclo crítico.*

Proposición 8.8. *Sea x un número par de raíz digital* 7*. El bloque mínimo de retorno se realiza a partir de x si y sólo si $x \equiv 124 \pmod{288}$, y en ese caso el impar de raíz digital* 8 *que reabre el ciclo crítico es*

$$R(x) = \frac{9x + 20}{16}.$$

Demostración. Siguiendo el recorrido paso a paso:

$$x \;\to\; \frac{x}{2} \;\to\; \frac{x}{4} \;\to\; \frac{3x+4}{4} \;\to\; \frac{3x+4}{8} \;\to\; \frac{9x+20}{8} \;\to\; \frac{9x+20}{16}.$$

Las raíces digitales son las del recorrido por el Lema 4.1, y las paridades exigidas son: $x/2$ par y $x/4$ impar, es decir $x \equiv 4 \pmod 8$; $(3x+4)/8$ impar, que con lo anterior equivale a $x \equiv 12 \pmod{16}$; y $(9x+20)/16$ impar, que equivale a $9x + 20 \equiv 16 \pmod{32}$, es decir $x \equiv 28 \pmod{32}$. Las tres condiciones juntas son $x \equiv 28 \pmod{32}$, y junto con $x \equiv 16 \pmod{18}$ (par de raíz digital 7) dan $x \equiv 124 \pmod{288}$. □

Observación 8.9. *La condición $x \equiv 4 \pmod 8$ no basta: para $x = 52$ la órbita sigue $52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5$ y abandona el recorrido en el cuarto paso. Si $x \equiv 268 \pmod{288}$, el recorrido llega al par $(9x+20)/8$ de raíz digital* 7*, pero éste es múltiplo de* 4 *y no reabre el ciclo crítico.*

Corolario 8.10. *El coeficiente del bloque mínimo de retorno, medido entre el par de salida y el impar que reabre el ciclo crítico, es* 9/16*:*

$$R(x) = \frac{9x + 20}{16} < x \qquad \text{para todo } x > \frac{20}{7}.$$

Demostración. Basta observar que

$$\frac{9x + 20}{16} < x \iff 9x + 20 < 16x \iff 20 < 7x.$$

□

Proposición 8.11 (Umbrales exactos)**.** *Con los cocientes exactos, incluidos los sumandos* $+1$*:*

1. *Cada circuito de uno de los nueve ciclos distintos de* 6 *y* 11 *reduce estrictamente el valor, salvo un circuito del ciclo* 9 *cuyo impar es $m = 1$, es decir, un paso por el ciclo trivial $4 \to 2 \to 1 \to 4$, cuyo cociente es exactamente* 1*.*

2. *Si un par x de raíz digital* 7 *completa k circuitos del ciclo* 6*, el cociente entre el término que sigue al último circuito y x es mayor que* 1 *si y sólo si $k \geq 2$.*

3. *Si un par x de raíz digital 7 completa k circuitos del ciclo 11, el cociente entre el término que sigue al último circuito y x es mayor que 1 si y sólo si $k \geq 6$.*

Demostración. (1) Por la Proposición 8.5, y como cada factor $1+\frac{1}{3m}$ es como mucho $\frac{4}{3}$, con igualdad sólo para $m=1$: los ciclos sin nodos impares tienen cociente $\lambda \leq \frac{1}{2}$; los de un nodo impar tienen $\lambda \leq \frac{3}{4}$, y por tanto cociente $\leq \frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{3m}\right) \leq 1$, con igualdad sólo si $\lambda = \frac{3}{4}$ (ciclo 9) y $m=1$; y el ciclo 10, con dos nodos impares, tiene cociente $\leq \frac{9}{32}\cdot\frac{16}{9} = \frac{1}{2}$.

(2) De $x_{j+1}+2 = \frac{3}{2}(x_j+2)$ se sigue $x_k = \left(\frac{3}{2}\right)^k(x+2)-2$, y tras la salida la órbita divide por 2. El cociente es

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^k(x+2)-2}{2x}.$$

Para $k=1$ vale $\frac{3x+2}{4x}$, menor que 1 para $x>2$, y todo par admisible cumple $x \geq 34$. Para $k \geq 2$, el numerador es al menos $\frac{9}{4}(x+2)-2 = 2x+\frac{x}{4}+\frac{5}{2} > 2x$.

(3) Por la demostración de la Proposición 8.8, un circuito del ciclo 11 a partir de un par x de raíz digital 7 exige $x \equiv 12 \pmod{16}$, es decir, $x \equiv 124 \pmod{144}$, y lleva a $\Psi(x) = \frac{9x+20}{8}$, con $\Psi(x)+20 = \frac{9}{8}(x+20)$. Tras k circuitos el valor es $x_k = \left(\frac{9}{8}\right)^k(x+20)-20$, y el cociente tras la división de salida es

$$\frac{\left(\frac{9}{8}\right)^k(x+20)-20}{2x}.$$

Para $k \geq 6$, como $\left(\frac{9}{8}\right)^6 > 2{,}027$, el numerador supera $2{,}027\,x+20{,}5 > 2x$. Para $k \leq 5$, como $\left(\frac{9}{8}\right)^5 < 1{,}803$, el numerador es menor que $1{,}803\,x+16{,}1$, que es menor que $2x$ para $x > 82$, y todo par que inicia un circuito del ciclo 11 cumple $x \geq 124$. □

Teorema 8.12. *De los once ciclos elementales del grafo modular, nueve son incondicionalmente contractivos, salvo el circuito trivial $4 \to 2 \to \underline{1} \to 4$, cuyo cociente es 1; uno es condicionalmente expansivo con umbral bajo, y uno es condicionalmente expansivo con umbral alto.*

Demostración. Es la Proposición 8.11. Los nueve ciclos distintos de 6 y 11 tienen coeficientes elementales

$$\frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2^6},\quad \frac{3}{2^5},\quad \frac{3}{2^4},\quad \frac{3}{2^6},\quad \frac{3}{2^3},\quad \frac{3}{2^2},\quad \frac{9}{2^5},$$

y cada uno de sus circuitos reduce estrictamente el valor, con la única excepción del paso por el ciclo trivial. El ciclo 6, con $\lambda = 3/2$, produce expansión neta exactamente a partir de $k \geq 2$ circuitos; el ciclo 11, con $\lambda = 9/8$, exactamente a partir de $k \geq 6$.

En consecuencia, el ciclo 6 es el mecanismo expansivo dominante del modelo modular, el ciclo 11 es un mecanismo expansivo secundario, aritméticamente mucho más exigente, y los nueve ciclos restantes son incondicionalmente contractivos. □

9. Coeficientes individuales del ciclo crítico y del retorno

Proposición 9.1. *Si un número par x de raíz digital 7 completa r circuitos críticos consecutivos, el valor del número tras el último circuito viene dado por*

$$x_r = \frac{3^r x + 2(3^r - 2^r)}{2^r}.$$

Demostración. De $x_{j+1}+2=\frac{3}{2}(x_j+2)$ se sigue $x_r+2=\left(\frac{3}{2}\right)^r(x+2)$, y despejando,

$$x_r=\frac{3^r(x+2)-2^{r+1}}{2^r}=\frac{3^r x+2(3^r-2^r)}{2^r}.$$

□

Corolario 9.2. *Para valores grandes de x, el coeficiente de r circuitos es aproximadamente*

$$\frac{x_r}{x}\sim\left(\frac{3}{2}\right)^r.$$

Observación 9.3 (Comparación de coeficientes individuales)**.** *El coeficiente de r circuitos críticos, $(3/2)^r$, y el del bloque mínimo de retorno, $9/16$, permiten comparar ambos mecanismos:*

$$\frac{9}{16}\left(\frac{3}{2}\right)^r>1\iff r\geq 2,$$

pues $\frac{9}{16}\cdot\frac{3}{2}=\frac{27}{32}<1$ y $\frac{9}{16}\cdot\frac{9}{4}=\frac{81}{64}>1$. Un solo circuito no compensa el coste del retorno mínimo; dos o más circuitos sí.

Se trata de una comparación entre coeficientes medidos por separado: el de los circuitos, entre dos pares de raíz digital 7; el del retorno, entre el par de salida y el impar que reabre el ciclo. Por eso no se encadenan como balance de una órbita: el producto de los coeficientes de bloques sucesivos no da la evolución de los valores. En el tramo

$$124\to 62\to 31\to 94\to 47\to 142\to 71\to 214\to 107\to 322\to 161\to 484,$$

el retorno de 124 a 71 tiene cociente $0{,}57\approx 9/16$, pero el tramo de 124 a 484 tiene cociente $3{,}90$, no $\frac{9}{16}\left(\frac{3}{2}\right)^3\approx 1{,}90$. La contabilidad exacta a lo largo de una órbita se hace en la Sección 12.

10. Caracterización aritmética del ciclo 11

Esta sección dota al ciclo 11 del análogo de la caracterización del ciclo crítico de la Proposición 6.2. En adelante escribimos C_6 para el ciclo crítico $(7,\underline{8},7)$ y C_{11} para el ciclo $(7,8,\underline{4},4,\underline{2},7)$.

10.1. La transformación por circuito

Recordemos el patrón de un circuito de C_{11}, en nodos del grafo modular (los impares, subrayados):

$$7\ \to\ 8\ \to\ \underline{4}\ \to\ 4\ \to\ \underline{2}\ \to\ 7,$$

es decir, partiendo de un par de raíz digital 7, la sucesión de paridades

$$(\text{par},\text{par},\text{impar},\text{par},\text{impar}),$$

que retorna a un par de raíz digital 7.

Lema 10.1. *Sea x un par de raíz digital 7 que inicia un circuito de C_{11}. El siguiente par de raíz digital 7, tras completar el circuito, viene dado por*

$$\Psi(x) = \frac{9x+20}{8}.$$

Demostración. Desarrollando los cinco pasos según la paridad indicada:

$$x \;\to\; \frac{x}{2} \;\to\; \frac{x}{4} \;\to\; 3\cdot\frac{x}{4}+1 = \frac{3x+4}{4} \;\to\; \frac{3x+4}{8} \;\to\; 3\cdot\frac{3x+4}{8}+1 = \frac{9x+20}{8}.$$

El término final es de nuevo par de raíz digital 7 (véase la Proposición 10.2). Es el cálculo de la demostración de la Proposición 8.8. □

Proposición 10.2. *La paridad requerida por un circuito de C_{11} se cumple si y sólo si*

$$x \equiv 12 \pmod{16}.$$

Además, las raíces digitales a lo largo del circuito quedan forzadas por las reglas del Lema 4.1 a la sucesión $7, 8, 4, 4, 2, 7$; basta, pues, partir de un par de raíz digital 7 con $x \equiv 12 \pmod{16}$.

Demostración. Imponemos las paridades paso a paso. La división $x/2$ par exige $x \equiv 0 \pmod 4$; que $x/4$ sea impar exige $x \equiv 4 \pmod 8$. Con $x = 8t+4$ se obtiene $(3x+4)/4 = 6t+4$, siempre par, y $(3x+4)/8 = 3t+2$, impar si y sólo si t es impar; es decir $x = 16s+12$. Recíprocamente, $x \equiv 12 \pmod{16}$ produce justamente las paridades $(\text{par}, \text{par}, \text{impar}, \text{par}, \text{impar})$.

Para las raíces digitales, partiendo de $\mathrm{d}(x) = 7$ y aplicando el Lema 4.1 según la paridad de cada término: $5\cdot 7 \equiv 8$, $5\cdot 8 \equiv 4$, $3\cdot 4+1 \equiv 4$, $5\cdot 4 \equiv 2$, $3\cdot 2+1 \equiv 7 \pmod 9$. La sucesión $7, 8, 4, 4, 2, 7$ está determinada y coincide con C_{11}. □

10.2. La valuación que gobierna los circuitos

Lema 10.3. *Para todo par admisible x,*

$$\Psi(x)+20 = \frac{9}{8}(x+20), \qquad \textit{y por tanto} \qquad \nu_2\big(\Psi(x)+20\big) = \nu_2(x+20) - 3.$$

Demostración. $\Psi(x)+20 = \dfrac{9x+20}{8}+20 = \dfrac{9x+180}{8} = \dfrac{9(x+20)}{8}$. Como $\nu_2(9) = 0$ y $\nu_2(1/8) = -3$, se sigue $\nu_2(\Psi(x)+20) = \nu_2(x+20) - 3$. □

La valuación $\nu_2(x+20)$ es para C_{11} lo que $\nu_2(x+2)$ es para C_6: una cantidad entera que decrece de forma estricta y uniforme con cada circuito —ahora en pasos de 3 en lugar de 1—. Obsérvese también que la condición de admisibilidad $x \equiv 12 \pmod{16}$ equivale a $\nu_2(x+20) \geq 4$, pues $x \equiv 12 \pmod{16} \iff 16 \mid (x+20)$. Además, todo par de raíz digital 7 cumple $9 \mid (x+20)$, pues $x+20 \equiv 7+20 \equiv 0 \pmod 9$, igual que $9 \mid (x+2)$ para el ciclo crítico.

Observación 10.4 (Los puntos fijos negativos)**.** *Las dos transformaciones tienen puntos fijos enteros negativos: $\Phi(-2) = -2$ y $\Psi(-20) = -20$. Ambos pertenecen a los ciclos de la función de Collatz sobre los enteros negativos,*

$$-1 \to -2 \to -1 \qquad y \qquad -5 \to -14 \to -7 \to -20 \to -10 \to -5,$$

cuyas proyecciones sobre el grafo modular son exactamente C_6 y C_{11}: en efecto, $-2 \equiv 7$ y $-1 \equiv 8$ (mód 9), y $-20, -10, -5, -14, -7$ son congruentes con $7, 8, 4, 4, 2$. Las identidades $\Phi(x) + 2 = \frac{3}{2}(x + 2)$ y $\Psi(x) + 20 = \frac{9}{8}(x + 20)$ expresan que cada circuito multiplica la distancia al punto fijo; las valuaciones $\nu_2(x + 2)$ y $\nu_2(x + 20)$ miden, por tanto, la cercanía 2-ádica de x a esos puntos fijos, y cada circuito la reduce en 1 y en 3 respectivamente. Ningún entero positivo es punto fijo, de modo que todo recorrido de C_6 o de C_{11} por enteros positivos termina.

Proposición 10.5. *Un par admisible x (de raíz digital 7, con $\nu_2(x + 20) \geq 4$) completa exactamente*

$$k = \left\lfloor \frac{\nu_2(x + 20) - 1}{3} \right\rfloor$$

circuitos de C_{11}. Equivalentemente, x completa exactamente k circuitos si y sólo si

$$\nu_2(x + 20) \in \{3k + 1,\ 3k + 2,\ 3k + 3\}.$$

Demostración. Por el Lema 10.3, tras j circuitos la valuación es $\nu_2(x + 20) - 3j$. El circuito $(j+1)$-ésimo puede ejecutarse mientras la admisibilidad persista, esto es, mientras $\nu_2(x + 20) - 3j \geq 4$. Sea $m = \nu_2(x + 20)$. El número de circuitos es el mayor k con $m - 3(k - 1) \geq 4$, es decir $m \geq 3k + 1$, de donde $k = \lfloor (m - 1)/3 \rfloor$. La caracterización equivalente se obtiene observando que k circuitos exigen $m \geq 3k + 1$ y la rotura $m - 3k \leq 3$, esto es $m \leq 3k + 3$. □

Observación 10.6. *La verificación computacional sobre todos los pares admisibles hasta $3 \cdot 10^6$ confirma la Proposición 10.5 sin excepción, y reproduce los tramos de C_{11} observados en órbitas concretas (por ejemplo, en la órbita de 27: entradas $124, 412, 700$ con $k = 1$ y 1132 con $k = 2$, correspondientes a $\nu_2(x + 20) = 4, 4, 4, 7$).*

10.3. Familia explícita y umbral expansivo

Corolario 10.7. *Los pares de raíz digital 7 que completan exactamente $k \geq 1$ circuitos de C_{11} son los de la forma*

$$x = 9 \cdot 2^m(2j - 1) - 20, \qquad m \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\}, \quad j \geq 1.$$

Demostración. Por la Proposición 10.5, la condición es

$$\nu_2(x + 20) \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\},$$

y como $9 \mid (x + 20)$, se escribe

$$x + 20 = 9 \cdot 2^m(2j - 1).$$

Recíprocamente, todo número de esa forma es par y congruente con $-20 \equiv 7$ (mód 9). □

Teorema 10.8. *El umbral expansivo $k \geq 6$ de C_{11} es alcanzable. Exige*

$$\nu_2(x + 20) \geq 19,$$

y el menor entero que lo realiza es

$$x = 2^{19} \cdot 9 - 20 = 4\,718\,572.$$

Demostración. Por la Proposición 10.5, $k \geq 6$ equivale a $\lfloor(\nu_2(x+20)-1)/3\rfloor \geq 6$, esto es $\nu_2(x+20) \geq 19$. Por el Corolario 10.7, $x+20 = 9 \cdot 2^m(2j-1)$ con $m \geq 19$, cuyo menor valor es $9 \cdot 2^{19}$, de donde $x = 2^{19} \cdot 9 - 20 = 4\,718\,572$. La simulación directa de la órbita confirma que x completa exactamente 6 circuitos de C_{11}. □

Por la Proposición 8.11, un bloque de k circuitos de C_{11} produce expansión neta, medida hasta el término que sigue al último circuito, si y sólo si $k \geq 6$; tales bloques existen por el Teorema 10.8.

Observación 10.9 (Dónde se mide la expansión)**.** *Conviene distinguir dos cocientes. Para $x = 4\,718\,572$, el par de raíz digital 7 alcanzado al cerrar el sexto circuito es $x_6 = 9\,565\,918$, con $x_6/x \approx 2{,}0273$, valor próximo a $(9/8)^6$. Pero ese par es el último nodo del ciclo, y el siguiente paso es forzosamente una división: el valor que sigue a la salida es $4\,782\,959$, con cociente $1{,}01365$. Es este segundo cociente, que corresponde al coeficiente de salida de la Definición 8.3, el que la Proposición 8.11 compara con 1.*

11. Distribución y cotas de los bloques del ciclo 11

Esta sección estudia los bloques máximos de circuitos consecutivos de C_{11}, considerados aisladamente, sobre familias aritméticas de entradas. Las densidades se refieren a entradas ordenadas aritméticamente y no implican equidistribución a lo largo de una órbita individual.

11.1. Densidad entre los pares de raíz digital 7

Corolario 11.1. *Dentro de los pares de raíz digital 7, la proporción de los que completan al menos k circuitos de C_{11} es 2^{-3k}. En particular, la de los que alcanzan el umbral expansivo $k \geq 6$ es 2^{-18}. Dentro de los pares que inician al menos un circuito, esas proporciones son $2^{-3(k-1)}$ y 2^{-15}.*

Demostración. Todo par de raíz digital 7 es de la forma $x = 18t + 16$. Entonces $x + 20 = 18(t+2)$ y $\nu_2(x+20) = 1 + \nu_2(t+2)$. Completar al menos k circuitos equivale a $\nu_2(x+20) \geq 3k+1$, es decir, a

$$\nu_2(t+2) \geq 3k,$$

con proporción 2^{-3k}. Iniciar al menos un circuito es el caso $k = 1$, con proporción 2^{-3}, y el cociente da la segunda afirmación. □

El recuento empírico ilustra esta rareza: entre los 20 833 pares menores que $3 \cdot 10^6$ que inician un circuito de C_{11}, el 87,5 % completa un solo circuito, el 10,9 % dos, y ninguna supera $k = 5$. El primer entero que alcanza el umbral expansivo, $x = 4\,718\,572$, queda muy por encima de ese rango.

11.2. Parametrización de los bloques

Consideramos las entradas pares admisibles para C_{11} y denominamos circuito a una vuelta completa del ciclo modular. Distinguimos entre una entrada admisible, que puede completar uno o más circuitos, y una cabeza de bloque, entendida como

una entrada sin predecesor admisible dentro del propio ciclo modular. Las distribuciones y medias que siguen se calculan sobre las familias aritméticas de entradas admisibles, sin restringirse necesariamente a las cabezas de bloque. Esta distinción no afecta a las identidades ni a las cotas obtenidas. La admisibilidad de las vueltas sucesivas se codifica por la valuación $\nu_2(x+20)$. Por la Proposición 10.5 y el Corolario 10.7, las entradas que completan exactamente $k \geq 1$ circuitos son

$$x = 9 \cdot 2^{3k+1}t - 20 = 18 \cdot 8^k t - 20, \qquad t \geq 1, \quad 8 \nmid t. \tag{1}$$

En efecto, $\nu_2(x+20) = 3k+1+\nu_2(t)$, y la condición $8 \nmid t$ equivale a $\nu_2(t) \in \{0,1,2\}$.

Proposición 11.2 (Salida exacta)**.** *Si x está dado por (1), después de sus k circuitos y de la división por 2 que sigue al último par del bloque, la salida es*

$$y = 9^{k+1}t - 10. \tag{2}$$

Además,

$$\frac{y+10}{x+20} = \frac{1}{2}\Big(\frac{9}{8}\Big)^k, \qquad \frac{y}{x} = \frac{1}{2}\Big(\frac{9}{8}\Big)^k + \frac{10}{x}\Big[\Big(\frac{9}{8}\Big)^k - 1\Big]. \tag{3}$$

Demostración. Iterando el Lema 10.3 se obtiene

$$\Psi^k(x) + 20 = \Big(\frac{9}{8}\Big)^k (x+20) = 18 \cdot 9^k t.$$

La división final produce $y = \Psi^k(x)/2 = 9^{k+1}t - 10$. Las otras igualdades son inmediatas. □

11.3. Distribución geométrica y autosemejanza

Para estudiar todas las entradas que completan al menos $h \geq 1$ circuitos, escribimos

$$x_h(t) = 9 \cdot 2^{3h+1}t - 20 = 18 \cdot 8^h t - 20, \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

El número exacto de circuitos de esta entrada es

$$K_h(t) = h + \Big\lfloor \frac{\nu_2(t)}{3} \Big\rfloor. \tag{5}$$

Todas las probabilidades que siguen son densidades naturales sobre los parámetros $t \geq 1$; no se introduce un modelo aleatorio para las trayectorias.

Teorema 11.3 (Ley geométrica condicionada)**.** *Para cualquier $h \geq 1$ y $j \geq 0$, la densidad de entradas de (4) que completan exactamente $h+j$ circuitos es*

$$\Pr(K_h = h + j) = \frac{7}{8^{j+1}}. \tag{6}$$

En particular,

$$\Pr(K_h \geq h + j) = 8^{-j}, \qquad \mathbb{E}[K_h] = h + \frac{1}{7}, \qquad \operatorname{Var}(K_h) = \frac{8}{49}. \tag{7}$$

Demostración. La condición $K_h = h + j$ equivale a $3j \leq \nu_2(t) \leq 3j+2$. La densidad de los t divisibles por 2^{3j} pero no por 2^{3j+3} es $2^{-3j} - 2^{-3j-3} = 7/8^{j+1}$. Si $J = K_h - h$, entonces $\Pr(J \geq j) = 8^{-j}$. Por la fórmula de colas, $\mathbb{E}[J] = \sum_{j \geq 1} 8^{-j} = 1/7$. La varianza geométrica correspondiente es $(1/8)/(7/8)^2 = 8/49$. □

La ley (6) no depende de h: entre las entradas que completan al menos h circuitos, la proporción de las que completan exactamente h es siempre $7/8$. Para $h = 1$, la proporción de entradas que completan al menos k circuitos es $2^{-3(k-1)}$, como establece el Corolario 11.1. La proporción de entradas que completan exactamente k circuitos es, en cambio, $7/8^k$.

Observación 11.4 (Una regla común a los dos ciclos)**.** *La ley (6) es un caso de una regla general. Si cada circuito de un ciclo consume d unidades de una valuación 2-ádica y la condición para iniciar otro circuito depende sólo de esa valuación, entonces, en densidad natural sobre las entradas, como en el Teorema 11.3, entre las que completan al menos h circuitos la proporción de las que completan exactamente $h + j$ es $(1 - 2^{-d})\, 2^{-dj}$: una ley geométrica de razón 2^{-d} que no depende de h. Para el ciclo crítico, $d = 1$ por la Proposición 6.2, y el Teorema 7.3 da la razón $1/2$; para C_{11}, $d = 3$, y la razón es $1/8$. La regla supone que las entradas admisibles forman una clase de restos, como ocurre en los dos ciclos (Definición 5.2 y Proposición 10.2); en densidad natural, los enteros de una clase de restos se reparten entonces por igual entre las clases módulo cualquier potencia de 2, que es lo que da la ley geométrica. No describe la frecuencia de las entradas visitadas por una órbita.*

Observación 11.5. *Si se restringen los parámetros a $9 \nmid t$, las densidades de (6) permanecen inalteradas, pues para cada potencia de 2 la divisibilidad por 9 es independiente de la valuación 2-ádica en densidad natural. La condición $9 \nmid t$ caracteriza las entradas que no son imagen por Ψ de otra entrada admisible: si $x + 20 = 18 \cdot 8^h t$, el único par w con $\Psi(w) = x$ cumple $w + 20 = 16 \cdot 8^h t$, y es una entrada admisible de raíz digital 7 si y sólo si $9 \mid t$. Son, por tanto, las entradas a las que ningún circuito de C_{11} puede preceder. Que una órbita concreta inicie su bloque en ellas depende del camino por el que llega.*

11.4. Contracción y expansión de bloques individuales

Proposición 11.6 (Umbral exacto)**.** *Para cualquier bloque descrito por (1),*

$$y - x = 9t\big(9^k - 2 \cdot 8^k\big) + 10. \tag{8}$$

Por tanto, $y < x$ si $1 \le k \le 5$, mientras que $y > x$ si $k \ge 6$.

Demostración. La identidad resulta de restar (1) de (2). Para $1 \le k \le 5$ se cumple $2 \cdot 8^k - 9^k \ge 7$, luego $y - x \le 10 - 63t < 0$ para todo $t \ge 1$. Para $k \ge 6$ se cumple $9^k > 2 \cdot 8^k$, y la diferencia es positiva. □

Es el umbral de la Proposición 8.11, obtenido aquí directamente de la salida exacta y válido para todo $t \ge 1$, sin la acotación auxiliar de aquella demostración.

Corolario 11.7. *Entre las entradas que completan al menos un circuito, la densidad de bloques expansivos es*

$$\Pr(K_1 \ge 6) = 8^{-5} = \frac{1}{32768}.$$

Condicionando a que el bloque sea expansivo, su longitud media es $6 + 1/7 = 43/7$.

Observación 11.8 (Cierre de la asimetría)**.** *Con estos resultados,* C_{11} *queda dotado del análogo de la Proposición 6.2: una transformación por circuito* (Ψ)*, una valuación que la gobierna* ($\nu_2(x+20)$*, decreciente en* 3*), una fórmula exacta del número de circuitos, una familia explícita de enteros, y la cuantificación de su densidad. La diferencia con* C_6 *es ahora puramente cuantitativa y queda nítida: en* C_6 *la valuación* $\nu_2(x+2)$ *baja en* 1 *por circuito y el umbral expansivo es* $k \geq 2$ ($\nu_2(x+2) \geq 3$*, proporción* 2^{-2} *entre los pares de raíz digital* 7*); en* C_{11} *la valuación* $\nu_2(x+20)$ *baja en* 3 *por circuito y el umbral es* $k \geq 6$ ($\nu_2(x+20) \geq 19$*, proporción* 2^{-18}*). El descenso triple de la valuación es la raíz aritmética de que* C_{11} *sea "mucho más exigente": exigente en* umbral*, no en* visita*, exactamente como se observaba empíricamente.*

11.5. Promedios exactos

Definimos el factor principal $M(k) = \frac{1}{2}(9/8)^k$ y el cociente exacto $Q = y/x$.

Proposición 11.9 (Media del factor principal)**.** *Sobre la familia de entradas que completan al menos* h *circuitos,*

$$\mathbb{E}\big[M(K_h)\big] = \frac{28}{55}\Big(\frac{9}{8}\Big)^h. \tag{9}$$

En particular,

$$\mathbb{E}\big[M(K_1)\big] = \frac{63}{110} \qquad y \qquad \mathbb{E}\big[M(K_6)\big] = \frac{28}{55}\Big(\frac{9}{8}\Big)^6.$$

Demostración. Por (6),

$$\mathbb{E}\big[M(K_h)\big] = \frac{1}{2}\Big(\frac{9}{8}\Big)^h \sum_{j\geq 0} \frac{7}{8^{j+1}}\Big(\frac{9}{8}\Big)^j = \frac{1}{2}\Big(\frac{9}{8}\Big)^h \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{1-9/64} = \frac{28}{55}\Big(\frac{9}{8}\Big)^h. \qquad \square$$

Observación 11.10. *El promedio sobre las entradas con* $K \geq 1$ *es* $63/110 < 1$*; el promedio condicionado a* $K \geq 6$ *es* $(28/55)(9/8)^6 \approx 1{,}032$*.*

Proposición 11.11 (Media logarítmica del factor principal)**.** *Sobre la familia de entradas que completan al menos* h *circuitos,*

$$\mathbb{E}\big[\log_2 M(K_h)\big] = \Big(h + \frac{1}{7}\Big)\log_2 \frac{9}{8} - 1. \tag{10}$$

En particular, $\mathbb{E}[\log_2 M(K_1)] = \frac{8}{7}\log_2 \frac{9}{8} - 1 \approx -0{,}806$*.*

Demostración. Como $\log_2 M(k) = k\log_2(9/8) - 1$ es afín en k, basta aplicar $\mathbb{E}[K_h] = h + 1/7$ de (7). $\square$

Teorema 11.12 (Medias asintóticas del cociente exacto)**.** *Sea* $y_h(t)$ *la salida del bloque iniciado en* $x_h(t)$ *de* (4)*, y sea* $Q_h(t) = y_h(t)/x_h(t)$*. Entonces, para cada* $h \geq 1$ *fijo,*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} Q_h(t) = \frac{28}{55}\Big(\frac{9}{8}\Big)^h, \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \log_2 Q_h(t) = \Big(h+\frac{1}{7}\Big)\log_2 \frac{9}{8} - 1. \tag{11}$$

Demostración. Sea $J(t) = \lfloor \nu_2(t)/3 \rfloor$, de modo que $K_h(t) = h + J(t)$. El número de $t \le N$ con $J(t) = j$ es $\lfloor N/8^j \rfloor - \lfloor N/8^{j+1} \rfloor$; dividido por N, tiende a $7/8^{j+1}$ y no supera 8^{-j}. Por tanto, si f es una función con $\sum_{j\ge 0} |f(j)|\, 8^{-j} < \infty$,

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} f\big(J(t)\big) = \sum_{j\ge 0} f(j)\,\frac{\lfloor N/8^j\rfloor - \lfloor N/8^{j+1}\rfloor}{N} \longrightarrow \sum_{j\ge 0} f(j)\,\frac{7}{8^{j+1}},$$

por convergencia dominada. Las funciones $f(j) = M(h+j)$, para la que $|f(j)|\,8^{-j}$ es proporcional a $(9/64)^j$, y $f(j) = \log_2 M(h+j)$, afín en j, cumplen la hipótesis, y los límites son (9) y (10).

Queda ver que $Q_h(t)$ puede sustituirse por $M(K_h(t))$. Por (3),

$$Q_h(t) = M\big(K_h(t)\big) + E_h(t), \qquad E_h(t) = \frac{10}{x_h(t)}\Big[\Big(\frac{9}{8}\Big)^{K_h(t)} - 1\Big] \ge 0.$$

Poniendo $\beta = \log_8(9/8) \in (0,1)$, se tiene $K_h(t) \le h + \log_8 t$, luego

$$\Big(\frac{9}{8}\Big)^{K_h(t)} \le \Big(\frac{9}{8}\Big)^{h} t^{\beta};$$

como además $x_h(t) \ge (18\cdot 8^h - 20)\,t$,

$$0 \le E_h(t) \le \frac{10\,(9/8)^h}{18\cdot 8^h - 20}\, t^{\beta-1}.$$

La media de esta cota es $O(N^{\beta-1})$ y tiende a cero, lo que da el primer límite. Para el segundo, como $M(K_h(t)) \ge \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{8} > \frac{1}{2}$,

$$0 \le \log_2 Q_h(t) - \log_2 M\big(K_h(t)\big) = \log_2\Big(1 + \frac{E_h(t)}{M(K_h(t))}\Big) \le \frac{2\,E_h(t)}{\ln 2},$$

cuya media también tiende a cero. □

Observación 11.13. *La media aritmética de los cocientes no equivale a la media de sus logaritmos ni al cociente de sumas; para un producto de factores sucesivos, la cantidad pertinente es la media logarítmica. Además, la ley aritmética de las entradas no tiene por qué coincidir con la distribución de las entradas visitadas por una órbita de Collatz.*

11.6. Envolvente superior óptima

Teorema 11.14 (Cota uniforme según el tamaño de la entrada)**.** *Sea x una entrada que completa al menos un circuito de C_{11} y sea y la salida de su bloque máximo. Con*

$$\alpha = \log_8 9 = 1 + \log_8 \frac{9}{8} > 1,$$

se verifica

$$y + 10 \le 9\Big(\frac{x+20}{18}\Big)^{\alpha}. \tag{12}$$

La igualdad se da si y sólo si $t = 1$ en (1). En consecuencia,

$$\frac{y}{x} \le \frac{9\big((x+20)/18\big)^{\alpha} - 10}{x}. \tag{13}$$

Demostración. De $x + 20 = 18 \cdot 8^k t$ e $y + 10 = 9^{k+1} t$, y como $8^\alpha = 9$, resulta

$$y + 10 = 9\Big(\frac{x + 20}{18}\Big)^{\alpha} t^{\,1-\alpha}.$$

Como $t \geq 1$ y $1 - \alpha < 0$, el último factor no supera 1, con igualdad exactamente cuando $t = 1$. □

Corolario 11.15. *Para cada longitud fija k, el cociente exacto de salida satisface*

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{9}{8}\Big)^k < \frac{y}{x} \leq \frac{9^{k+1} - 10}{18 \cdot 8^k - 20}.$$

La cota superior se alcanza en la entrada mínima $a_k = 18 \cdot 8^k - 20$, y el cociente decrece estrictamente al crecer t.

Demostración. La cota inferior se sigue de (3), cuyo segundo sumando es positivo. Para la superior, $y/x = (9^{k+1}t - 10)/(18 \cdot 8^k t - 20)$, y la derivada respecto de t tiene el signo de $-20 \cdot 9^{k+1} + 180 \cdot 8^k = 180\,(8^k - 9^k) < 0$; el máximo se alcanza, pues, en $t = 1$. □

Observación 11.16. *La envolvente es óptima sobre la familia de entradas admisibles, pero no es uniformemente contractiva: el cociente y/x que acota crece asintóticamente como $x^{\alpha-1}$. No se deduce de ella la convergencia de las órbitas.*

Observación 11.17 (Alcance)**.** *Las identidades, densidades, medias y cotas anteriores describen bloques aislados de C_{11}. En esta sección no se combinan bloques de distintos ciclos ni se presuponen frecuencias de visita en una trayectoria individual. En particular, la contracción aritmética media para $h = 1$ y la rareza de los bloques expansivos no constituyen una demostración de convergencia de Collatz. Por el Corolario 12.13, una órbita que no alcanzara el 1 y prescindiera del ciclo crítico a partir de algún momento tendría que completar infinitas veces bloques de al menos dos circuitos, cuya densidad entre las entradas es $\Pr(K_1 \geq 2) = 1/8$ por el Teorema 11.3; la rareza de los bloques expansivos, con densidad 8^{-5}, no afecta, por tanto, a esa condición. El problema de trasladar estas propiedades de familias aritméticas a sucesiones de entradas orbitales queda abierto.*

12. Convergencia en ausencia de los ciclos 6 y 11

Para estudiar órbitas completas se asocia a cada una su recorrido en el grafo modular y se descompone en ciclos elementales.

Definición 12.1. *El **itinerario modular** de la órbita de n es la sucesión de nodos $v_t = \big(\mathrm{rd}(T^t n),\, T^t n \bmod 2\big)$, $t \geq 0$. Es un camino en el grafo modular.*

Definición 12.2. *Dado un tramo $v_{t_0}, v_{t_0+1}, \ldots, v_{t_1}$ del itinerario, su **descomposición cronológica** se obtiene recorriéndolo en orden y manteniendo una pila de nodos: cada nodo nuevo se añade a la pila; si ya estaba en ella, el trozo de pila desde su aparición anterior se retira como ciclo, y el nodo queda en la pila una sola vez. Al terminar, la pila es un camino simple, el **camino residual**.*

Lema 12.3. *La descomposición cronológica de un tramo tiene estas propiedades:*

1. *cada paso del tramo pertenece exactamente a uno de los ciclos retirados o al camino residual;*

2. *cada ciclo retirado es un ciclo elemental del grafo, es decir, uno de los once ciclos de la Proposición 4.2;*

3. *el camino residual tiene como mucho* 17 *pasos, y cada ciclo, como mucho* 7*;*

4. *la descomposición de un tramo más largo con el mismo origen prolonga la del tramo más corto.*

Demostración. La pila nunca contiene nodos repetidos, así que cada trozo retirado es un recorrido cerrado sin repeticiones, esto es, un ciclo elemental, y el camino residual es simple. El grafo tiene 18 nodos, de donde la cota 17 para el camino residual; los ciclos más largos de la Tabla 2 tienen 7 nodos. La primera y la cuarta propiedad son inmediatas, pues el procedimiento lee el tramo una sola vez y en orden. □

Lema 12.4 (Identidad multiplicativa)**.** *Sea $x_t = T^t n$. En la descomposición cronológica del tramo entre t_0 y t_1,*

$$\frac{x_{t_1}}{x_{t_0}} = \prod_{c} \Big(\lambda_c \prod_{m \in I_c} \Big(1 + \frac{1}{3m} \Big) \Big) \cdot \rho,$$

donde c recorre los ciclos retirados, λ_c es su coeficiente elemental, I_c es el conjunto de valores impares de la órbita en los pasos de c, y ρ es el producto de los cocientes x_{t+1}/x_t sobre los pasos del camino residual.

Demostración. El cociente x_{t_1}/x_{t_0} es el producto de los cocientes de cada paso, que valen $1/2$ en los pasos pares y $3{+}1/m = 3\big(1{+}\frac{1}{3m}\big)$ en los impares. Por el Lema 12.3, el producto puede agruparse por ciclos y camino residual. Un ciclo con i nodos impares y p nodos pares aporta $3^i 2^{-p} = \lambda_c$ por los factores principales. □

Teorema 12.5 (Convergencia sin los ciclos 6 y 11)**.** *Sea $n \geq 1$. Si existe t_0 tal que, para todo $t_1 > t_0$, la descomposición cronológica del itinerario modular de n entre t_0 y t_1 no contiene ninguna copia —salvo rotación— de los ciclos $(7, \underline{8}, 7)$ y $(7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7)$, entonces la órbita de n alcanza el* 1.

Demostración. Supongamos que la órbita no alcanza el 1. Entonces todos sus valores impares son mayores o iguales que 3, y cada factor $1 + \frac{1}{3m}$ es como mucho $\frac{10}{9}$.

Los ciclos que pueden aparecer son los nueve restantes. Los de las zonas B y C y el ciclo 3 no tienen nodos impares y su coeficiente es como mucho $1/2$. Los ciclos 4, 5, 7, 8 y 9 tienen un nodo impar y $\lambda \leq 3/4$, así que aportan como mucho $\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{6}$. El ciclo 10 tiene dos nodos impares y $\lambda = 9/32$, y aporta como mucho $\frac{9}{32} \cdot \frac{100}{81} < \frac{1}{2}$. Cada ciclo retirado aporta, por tanto, un factor no mayor que $\frac{5}{6}$.

El camino residual tiene como mucho 17 pasos, sin dos pasos impares seguidos, luego como mucho 9 impares, cada uno con cociente no mayor que $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$, y los demás con cociente $\frac{1}{2}$. Así $\rho \leq K = (10/3)^9$.

Si $N(t_1)$ es el número de ciclos retirados entre t_0 y t_1, el Lema 12.3 da $N(t_1) \geq (t_1 - t_0 - 17)/7$, y el Lema 12.4 da

$$x_{t_1} \leq K \left(\frac{5}{6} \right)^{N(t_1)} x_{t_0} \xrightarrow[t_1 \to \infty]{} 0,$$

lo que es imposible para una sucesión de enteros positivos. Por tanto la órbita alcanza el 1. □

Corolario 12.6 (Reducción a los ciclos 6 y 11)**.** *Si la órbita de n no alcanza el* 1 *—es decir, si diverge o termina en un ciclo no trivial—, entonces para todo t_0 el número de copias de los ciclos* $(7, \underline{8}, 7)$ *y* $(7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7)$ *en la descomposición cronológica entre t_0 y t_1 tiende a infinito cuando $t_1 \to \infty$.*

Demostración. Si ese número estuviera acotado por B, las copias de los ciclos 6 y 11 aportarían en total un factor no mayor que $\max\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{9}, \frac{9}{8} \cdot \frac{100}{81}\right)^B$, y el resto de ciclos, cuyo número tiende a infinito, seguiría aportando un factor no mayor que $\frac{5}{6}$ cada uno. Como en la demostración del Teorema 12.5, x_{t_1} tendería a 0. □

Corolario 12.7 (Ciclos que se levantan a órbitas periódicas)**.** *Si una órbita periódica de enteros positivos tiene un itinerario modular que recorre repetidamente un solo ciclo elemental, esa órbita es el ciclo trivial* $\{1, 4, 2\}$*, que recorre el ciclo* 9*. En particular, de los once ciclos elementales sólo el ciclo* 9 *se levanta a una órbita periódica de enteros positivos.*

Demostración. Si el ciclo repetido es el 6, cada circuito cumple $x_{j+1} + 2 = \frac{3}{2}(x_j + 2)$, de modo que $x_j + 2$ crece estrictamente y la órbita no puede volver a su valor inicial. Si es el 11, ocurre lo mismo con $x_{j+1} + 20 = \frac{9}{8}(x_j + 20)$, por la demostración de la Proposición 8.11. Si es cualquier otro, la descomposición cronológica del itinerario sólo contiene copias de ese ciclo, y por el Teorema 12.5 la órbita alcanza el 1; siendo periódica, es el ciclo trivial. □

Observación 12.8. *Los ciclos* 6 *y* 11 *sí se levantan a órbitas periódicas de enteros negativos, como se vio en la Observación 10.4:* $-1 \to -2 \to -1$ *y* $-5 \to -14 \to -7 \to -20 \to -10 \to -5$*, cuyas proyecciones son exactamente esos dos ciclos. Una órbita periódica no trivial de enteros positivos, si existiera, tendría que combinar varios ciclos elementales y, por el Corolario 12.6, recorrer el* 6 *o el* 11 *infinitas veces.*

Observación 12.9. *El Teorema 12.5 es condicional: describe qué tendría que contener el itinerario de una órbita no convergente, pero no decide si tal órbita existe. El Corolario 12.6 tampoco separa los dos ciclos: no excluye una órbita que, a partir de algún momento, sólo usara el ciclo* 11*. Sobre las órbitas típicas se sabe mucho más por otras vías: el conjunto de los n cuya órbita desciende por debajo de n tiene densidad uno [2, 4], casi todas las órbitas descienden por debajo de n^c para todo $c > \log 3/\log 4$ [6], y casi todas alcanzan valores casi acotados [3]; véase [1] para el estado general del problema.*

12.1. Convergencia sin circuitos de los ciclos 6 y 11

El Teorema 12.5 se refiere a copias de los ciclos en la descomposición cronológica. Los circuitos de los ciclos 6 y 11 recorridos en pasos consecutivos admiten, en cambio, una descripción aritmética directa. Un término x de la órbita inicia un circuito crítico $7 \to \underline{8} \to 7$ si y sólo si $x \equiv 34 \pmod{36}$ (Definición 5.2), y inicia un circuito $7 \to 8 \to \underline{4} \to 4 \to \underline{2} \to 7$ del ciclo 11 si y sólo si es par de raíz digital 7 con $x \equiv 12 \pmod{16}$, es decir, $x \equiv 124 \pmod{144}$, como se vio en la demostración de la Proposición 8.11. Esta sección demuestra que excluir esas dos clases a partir de algún momento basta para que la órbita alcance el 1. La demostración utiliza un grafo finito que recuerda los últimos nodos recorridos.

Definición 12.10. *Sea G' el grafo modular obtenido al suprimir exclusivamente el nodo impar de raíz digital 8; el nodo par de raíz digital 8 permanece en G'. El* grafo con memoria $\mathcal{A}$ *tiene por estados las sucesiones $(v_1, \ldots, v_j)$, con $1 \le j \le 5$, de nodos consecutivos de un camino de G'. Hay una transición del estado $(v_1, \ldots, v_j)$ al estado formado por los últimos cinco nodos, o todos si son menos, de $(v_1, \ldots, v_j, u)$ cuando (v_j, u) es una arista de G' y la sucesión $(v_1, \ldots, v_j, u)$ no termina en $7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7$. Esa transición tiene* peso -1 *si v_j es par y $\log_2(22/7)$ si v_j es impar. El peso de un camino de $\mathcal{A}$ es la suma de los pesos de sus transiciones, y la* media *de un ciclo de $\mathcal{A}$ es su peso dividido por su longitud. Los estados alcanzables desde los de un solo nodo son* 230.

Un tramo de itinerario modular que no pasa por $\underline{8}$ ni contiene seis nodos consecutivos $7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7$ determina un camino de $\mathcal{A}$ de la misma longitud: el estado en cada instante está formado por los últimos nodos recorridos, hasta cinco.

Lema 12.11. *Sea H un grafo dirigido finito con N estados y pesos en sus transiciones, sea $w_{\max}$ el mayor de esos pesos y sea μ el máximo de las medias de sus ciclos elementales. Todo camino de H de longitud L tiene peso no mayor que*

$$\mu L + (N-1)\,(w_{\max} - \mu).$$

Demostración. Recorriendo el camino con una pila, como en la Definición 12.2, se descompone en ciclos elementales y un camino simple de longitud $\ell \le N-1$. Cada ciclo tiene peso no mayor que μ por su longitud, y el camino simple, no mayor que $\ell\, w_{\max}$. El peso total no supera $\mu(L-\ell) + \ell\, w_{\max} = \mu L + \ell\,(w_{\max} - \mu)$, y como $w_{\max} \ge \mu$, esta cantidad no supera la del enunciado. □

El máximo de las medias de los ciclos de $\mathcal{A}$ es

$$\mu = \frac{3\log_2(22/7) - 5}{8} = \frac{1}{8}\log_2\frac{10648}{10976} < 0,$$

y lo alcanza el ciclo de ocho transiciones que recorre repetidamente

$$7 \to 8 \to \underline{4} \to 4 \to 2 \to \underline{1} \to 4 \to \underline{2} \to 7,$$

es decir, el ciclo 11 con el ciclo 9 intercalado en el vértice 4 par, que tiene tres pasos impares, desde $\underline{4}$, $\underline{1}$ y $\underline{2}$, y cinco pares, entre ellos el que parte del nodo par de raíz digital 8. La media de un ciclo de $\mathcal{A}$ con i transiciones desde nodos impares y p desde nodos pares es $\rho\big(\log_2(22/7) + 1\big) - 1$, con $\rho = i/(i+p)$, de modo que el máximo de las medias corresponde a la mayor proporción ρ. Que ningún ciclo de $\mathcal{A}$ tenga $\rho > 3/8$ equivale a que $\mathcal{A}$ no tenga ciclos de peso positivo con pesos enteros 5 en las transiciones desde nodos impares y -3 en las demás; es una comprobación finita y exacta sobre los 230 estados, y el ciclo anterior tiene $\rho = 3/8$. Por tanto, $\mu = \frac{3}{8}\log_2\frac{22}{7} - \frac{5}{8}$, y su signo se sigue de $(22/7)^3 = 10648/343 < 32$. El programa que construye $\mathcal{A}$, efectúa esa comprobación y, como contraste, calcula la media máxima con el algoritmo de Karp [5] puede consultarse en `https://www.collatz.es/articulos/seccion4_1/verificacion_corolario_12_12.py`.

Corolario 12.12 (Convergencia sin circuitos de los ciclos 6 y 11)**.** *Sea $n \ge 1$ y sea $x_t = T^t(n)$. Si existe t_0 tal que ningún x_t con $t \ge t_0$ es congruente con* 34 *módulo* 36 *ni con* 124 *módulo* 144*, entonces la órbita de n alcanza el* 1.

Demostración. Supongamos que la órbita no alcanza el 1. Los únicos impares menores que 7 son 1, 3 y 5, y los tres conducen al 1, pues

$$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Por tanto, la órbita no pasa por ninguno de ellos, todos sus valores impares son mayores o iguales que 7, y cada paso impar multiplica el valor por $3 + 1/x_t \le 22/7$, mientras que cada paso par lo multiplica por $1/2$.

El nodo impar de raíz digital 8 sólo se alcanza desde un término congruente con 34 módulo 36, y seis nodos consecutivos $7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7$ sólo pueden comenzar en un término congruente con 124 módulo 144. Por la hipótesis, el itinerario modular a partir de t_0+1 determina un camino de $\mathcal{A}$, y por el párrafo anterior, para $t_0 < s < t$,

$$\frac{x_t}{x_s} \le 2^w,$$

donde w es el peso del camino de $\mathcal{A}$ recorrido entre s y t. Por el Lema 12.11, con $N = 230$ y $w_{\text{máx}} = \log_2(22/7)$,

$$x_t \le 2^C\, 2^{\mu(t-s)}\, x_s, \qquad C = 229\big(\log_2(22/7) - \mu\big),$$

y como $\mu < 0$, el miembro derecho tiende a 0 cuando $t \to \infty$, lo que es imposible para una sucesión de enteros positivos. □

La cota 7 para los valores impares no puede sustituirse por 5 en este argumento de medias de ciclo: con $3 + 1/5$ en lugar de $22/7$, el mismo ciclo tendría media $\big(3\log_2(16/5) - 5\big)/8 > 0$. Como toda órbita que alcanza el 1 termina en el ciclo $4 \to 2 \to 1$, cuyos términos no pertenecen a ninguna de las dos clases, el Corolario 12.12 caracteriza las órbitas convergentes.

El mismo método permite precisar qué tendría que hacer una órbita no convergente que prescindiera del ciclo crítico. Un par x de raíz digital 7 inicia dos circuitos consecutivos del ciclo 11 si y sólo si $x \equiv 12 \pmod{16}$ y $\Psi(x) = (9x + 20)/8 \equiv 12 \pmod{16}$; como $\Psi(x) + 20 = \frac{9}{8}(x + 20)$, ambas condiciones equivalen a $128 \mid x + 20$, y junto con $9 \mid x + 20$ dan $x \equiv 1132 \pmod{1152}$. Sea $\mathcal{A}_2$ el grafo definido como en la Definición 12.10, pero con estados de a lo sumo diez nodos y con el tramo prohibido de once nodos $7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7$, y con peso $\log_2(100/33)$ en las transiciones que salen de un nodo impar. Los estados alcanzables de $\mathcal{A}_2$ son 2085, y el máximo de las medias de sus ciclos es

$$\mu_2 = \frac{5\log_2(100/33) - 8}{13} = \frac{1}{13}\log_2\frac{10^{10}}{256 \cdot 33^5} < 0,$$

alcanzado por el ciclo de trece transiciones que recorre un circuito del ciclo 11 seguido del recorrido extremal anterior,

$$7 \to 8 \to \underline{4} \to 4 \to \underline{2} \to 7 \to 8 \to \underline{4} \to 4 \to 2 \to \underline{1} \to 4 \to \underline{2} \to 7,$$

con cinco pasos impares y ocho pares. Como antes, el máximo corresponde a la mayor proporción de transiciones desde nodos impares, y que ningún ciclo de $\mathcal{A}_2$ supere la proporción $5/13$ de ese ciclo equivale a que no tenga ciclos de peso positivo con pesos enteros 8 y -5; es una comprobación finita y exacta sobre los 2085 estados, que realiza el programa `https://www.collatz.es/articulos/seccion4_1/verificacion_corolario_12_13.py`.

Corolario 12.13 (Órbitas sin el ciclo crítico)**.** *Sea $n \geq 1$ y sea $x_t = T^t(n)$. Si existe t_0 tal que ningún x_t con $t \geq t_0$ es congruente con 34 módulo 36 ni con 1132 módulo 1152, entonces la órbita de n alcanza el 1. En particular, una órbita que no alcanza el 1 y que a partir de algún momento no recorre el ciclo crítico completa infinitas veces al menos dos circuitos consecutivos del ciclo 11.*

Demostración. Supongamos que la órbita no alcanza el 1. Los impares menores que 33 alcanzan el 1, como se comprueba directamente, de modo que todos los valores impares de la órbita son mayores o iguales que 33 y cada paso impar multiplica el valor por $3+1/x_t \leq 100/33$. Por la hipótesis y la caracterización anterior, el itinerario modular a partir de $t_0 + 1$ no pasa por el nodo impar de raíz digital 8 ni contiene el tramo prohibido de once nodos, y determina un camino de $\mathcal{A}_2$. El Lema 12.11, con $N = 2085$, $w_{\text{máx}} = \log_2(100/33)$ y $\mu_2 < 0$, da como en el Corolario 12.12 que x_t tendería a 0, lo que es imposible. □

La cota 33 no puede sustituirse por 31 en este argumento de medias de ciclo: con $3 + 1/31$ el mismo ciclo tendría media positiva, pues $(94/31)^5 > 256$. El Corolario 12.13 es una respuesta parcial al Problema 14.1: una órbita no convergente que prescindiera del ciclo crítico no podría limitarse a circuitos aislados del ciclo 11.

Observación 12.14 (Límite del método)**.** *El Corolario 12.13 no puede extenderse por el mismo método a tres circuitos consecutivos del ciclo 11. El grafo análogo a $\mathcal{A}_2$ que sólo prohíbe tres circuitos consecutivos admite el ciclo de dieciocho pasos*

$$7 \to 8 \to \underline{4} \to 4 \to 2 \to \underline{1} \to 4 \to \underline{2} \to 7 \\ \to 8 \to \underline{4} \to 4 \to \underline{2} \to 7 \to 8 \to \underline{4} \to 4 \to \underline{2} \to 7,$$

formado por el recorrido extremal del Corolario 12.12 seguido de dos circuitos del ciclo 11, con siete pasos impares y once pares. Su coeficiente elemental es $3^7/2^{11} = 2187/2048 > 1$, de modo que tiene peso positivo para cualquier cota de los valores impares. Su transformación exacta es $F(x) = (2187x + 20276)/2048$, cuyo único punto fijo es $-20276/139$.

Los enteros que recorren este ciclo R veces seguidas admiten una descripción exacta. Si los $j - 1$ primeros pasos de la órbita de n están fijados y contienen d pasos pares, el valor alcanzado es $(3^a n + B)/2^d$, cuya paridad sólo depende de n módulo 2^{d+1}: tras un paso impar es siempre par, y en otro caso, como 3^a es impar, sólo uno de los dos restos módulo 2^{d+1} compatibles con los pasos anteriores da la paridad exigida. Por inducción, los enteros cuyos primeros pasos siguen un itinerario de paridades dado forman una única clase módulo 2^{d+1}, donde d es el número de pasos pares que preceden al último. Los $11R$ pasos pares de R periodos preceden a su último paso, que es impar, de modo que los enteros que realizan los $18R$ pasos forman una única clase módulo 2^{11R+1}; la raíz digital, que por el Lema 4.1 queda determinada a lo largo del recorrido por la del primer término, añade la condición $n \equiv 7 \pmod 9$, compatible con la anterior por el teorema chino del resto. Estas clases están encajadas, y su intersección es el único entero 2-ádico cuya sucesión de paridades repite el patrón indefinidamente [2]; como F lo transforma en otro con la misma sucesión de paridades, es el punto fijo de F. Por tanto, los enteros que recorren el ciclo R veces seguidas son exactamente los que cumplen

$$n \equiv 7 \pmod 9, \qquad 139n + 20276 \equiv 0 \pmod{2^{11R+1}},$$

y existen para todo $R \geq 1$. La potencia adicional de 2 es necesaria: módulo 2^{11R} sólo queda fijada la paridad de los $18R - 1$ primeros pasos.

Ningún entero positivo recorre, en cambio, este ciclo indefinidamente: debería cumplir la segunda congruencia para todo R, de modo que $139n + 20276$ sería divisible por todas las potencias de 2 y, por tanto, nulo, y su única solución es $n = -20276/139 < 0$. Esto no excluye que una órbita recorra el ciclo muchas veces seguidas ni que lo combine con otros recorridos, y es esa combinación la que el método de medias de ciclo no puede controlar. Tampoco dice nada sobre el comportamiento de una órbita después de un número finito de repeticiones.

13. Reentradas en el ciclo 11 y límites del método

Esta sección examina qué ocurre entre dos bloques consecutivos de C_{11} de una misma órbita, y por qué los argumentos basados en información finita no bastan para decidir si una órbita puede reentrar en C_{11} indefinidamente.

Observación 13.1 (Lo que esto cierra y lo que no)**.** *La Sección 10 demuestra que C_{11} admite tramos expansivos: los enteros que los realizan existen y son explícitos, y la órbita de cada uno de ellos los recorre. No dice nada sobre si una misma órbita puede recorrer tales tramos infinitas veces. Por el Corolario 12.6, una órbita que no alcanzara el 1 tendría que recorrer C_6 o C_{11} infinitas veces; si eso es posible sigue siendo una pregunta abierta. Por el Corolario 12.13, si además la órbita deja de recorrer el ciclo crítico a partir de algún momento, tiene que completar infinitas veces bloques de al menos dos circuitos de C_{11}, es decir, alcanzar infinitas veces pares de raíz digital 7 con $\nu_2(x + 20) \geq 7$. El umbral $k \geq 6$ del Teorema 10.8 se refiere a bloques aislados, medidos desde su entrada hasta la división que sigue a su salida; no es la condición que el Corolario 12.13 impone a una órbita.*

Observación 13.2 (Recorridos de reentrada y funciones de progreso)**.** *La pregunta abierta de la Observación 13.1 admite una formulación más precisa para C_{11} si se separan los bloques del ciclo de los recorridos que median entre ellos. Sea z la salida de un bloque maximal de C_{11}, de modo que $r = \nu_2(z + 20) \in \{1, 2, 3\}$ por la Proposición 10.5, y sea x' la siguiente entrada en C_{11} de la misma órbita. Si el recorrido de z a x' consta de a pasos impares y b divisiones por 2, se tiene $x' = (3^a z + B)/2^b$ con $B \geq 0$ determinado por el orden de las operaciones, y de ahí*

$$x' + 20 = \frac{3^a(z + 20) + D}{2^b}, \qquad D = B + 20\,(2^b - 3^a).$$

Como $\nu_2\big(3^a(z + 20)\big) = r \leq 3$ y la entrada exige $\nu_2(x' + 20) \geq 4$, todo recorrido de reentrada cumple $\nu_2(D) = r$. Esta condición no impone, sin embargo, una cota superior uniforme a la valuación de la nueva entrada, ni siquiera para un recorrido fijo de reentrada que evita C_6. Un ejemplo explícito lo muestra. El par 1996 completa un circuito de C_{11} y sale en $z = 2248$, con $r = 2$; el recorrido

$$2248 \to 1124 \to 562 \to 281 \to 844$$

no visita C_6 y conduce a la entrada $x' = 844$, con $a = 1$, $b = 3$, $B = 8$ y $D = 108$. Para todo $s \geq 0$, el entero $1996 + 9216\,s$ cumple $(1996 + 9216\,s) + 20 = 288\,(7 + 32s)$, completa igualmente un solo circuito y sale en $z_s = 2248 + 10368\,s$, con

$z_s + 20 = 324\,(7 + 32s)$. *Desde* z_s *se recorre el mismo camino, cuyos términos* z_s, $z_s/2$ *y* $z_s/4$ *son congruentes con* 16, 8 *y* 22 *módulo* 36, *hasta la entrada*

$$x'_s = 844 + 3888\,s, \qquad x'_s + 20 = 2^4 \cdot 27\,(2 + 9s).$$

Para cada $L \geq 0$, *la condición* $s \equiv 9^{-1}(2^{3L+1} - 2) \pmod{2^{3L+2}}$, *satisfecha por infinitos* $s \geq 0$, *da* $\nu_2(2 + 9s) = 3L + 1$, *y por tanto* $\nu_2(x'_s + 20) = 3L + 5$*: la nueva entrada inicia un bloque de exactamente* $L + 1$ *circuitos, cuya salida* z''_s *cumple* $\nu_2(z''_s + 20) = 2$, *igual que* z_s. *Además,*

$$x'_s + 20 = \frac{3}{8}\,(z_s + 20) + \frac{27}{2},$$

de modo que durante la reentrada $\log_2(x + 20)$ *disminuye en menos de* $\log_2(8/3)$, *mientras que* $\nu_2(x + 20)$ *aumenta en* $3L + 3$. *La regeneración de la valuación no exige, pues, en cada reentrada, un descenso logarítmico que crezca con la valuación recuperada; en particular, para ningún* $c > 0$ *es la función* $\log_2(x+20) + c\,\nu_2(x+20)$ *no creciente en todos los recorridos de reentrada que no visitan* C_6.

El tramo completo de z_s *a* z''_s *evita la clase* 34 (mód 36). *En el recorrido de reentrada se ha comprobado arriba; en el bloque, los pares de raíz digital* 7 *que inician cada circuito son congruentes con* 12 *módulo* 16, *los demás términos del circuito tienen raíz digital distinta de* 7, *y la salida cumple* $z''_s \equiv 0 \pmod 4$ *por ser* $\nu_2(z''_s + 20) = 2$. *La restricción a valuaciones de la forma* $3L + 5$ *garantiza que el extremo final no inicia* C_6 *y que ambas salidas tienen la misma valuación; en cambio, si la salida tuviera* $\nu_2(z''_s + 20) = 1$, *sería* $z''_s \equiv 34 \pmod{36}$ *y el extremo final iniciaría un circuito de* C_6. *Por el Lema 10.3,*

$$z''_s + 20 = \Big(\frac{9}{8}\Big)^{L+1}(x'_s + 20) > \Big(\frac{9}{8}\Big)^{L+1}\frac{3}{8}\,z_s, \qquad \textit{luego} \qquad \frac{z''_s}{z_s} > \frac{3}{8}\Big(\frac{9}{8}\Big)^{L+1} - \frac{20}{z_s},$$

y el cociente z''_s/z_s *no está acotado al crecer* L.

De aquí se sigue una limitación para las funciones de progreso de la forma

$$V(x) = \log_2 x + g(x),$$

con g *acotada sobre las salidas de* C_{11}*; en particular, para toda corrección que dependa de* x *módulo una potencia fija de* 2. *En efecto, si* $|g| \leq M$ *sobre las salidas, entonces*

$$V(z''_s) - V(z_s) \geq \log_2(z''_s/z_s) - 2M,$$

que supera cualquier cota al crecer L*; ninguna función de esa forma es, por tanto, no creciente en todos los tramos entre salidas consecutivas de* C_{11} *que evitan* C_6. *Si la corrección es de la forma* $g(x) = h\big(\nu_2(x + 20)\big)$, *la conclusión vale para cualquier función* h, *acotada o no, pues en los dos extremos del tramo construido la valuación es la misma y la corrección se cancela. El argumento se refiere a tramos aislados: no afirma nada sobre el comportamiento de la órbita después de* z''_s *ni sobre la existencia de órbitas que eviten* C_6 *definitivamente.*

Esta limitación se refiere a una clase de funciones, no a la pregunta misma: si la conjetura es cierta, el tiempo de parada total es una función que desciende estrictamente a lo largo de toda órbita hasta que esta alcanza el 1. *Lo que queda abierto es la existencia de restricciones globales sobre la concatenación de recorridos de reentrada en una misma órbita que evite* C_6.

Observación 13.3 (Salidas de los bloques y ausencia del ciclo crítico)**.** *Sea z la salida de un bloque maximal de C_{11} y sea $r = \nu_2(z+20) \in \{1,2,3\}$. Como z es par de raíz digital 7, el valor de r determina cómo empieza el recorrido siguiente:*

r	*Congruencia de la salida*	*Comienzo del recorrido siguiente*
1	$z \equiv 2 \pmod 4$, *es decir,* $z \equiv 34 \pmod{36}$	$7 \to \underline{8} \to 7$*: circuito crítico*
2	$z \equiv 0 \pmod 8$	$7 \to 8 \to 4$, *con 4 par*
3	$z \equiv 4 \pmod{16}$	$7 \to 8 \to \underline{4} \to 4 \to 2$, *con 2 par*

En efecto, si $r = 1$, entonces $z + 20 \equiv 2 \pmod 4$, luego $z \equiv 2 \pmod 4$, y junto con $z \equiv 7 \pmod 9$ resulta $z \equiv 34 \pmod{36}$: $z/2$ es impar de raíz digital 8. Si $r = 2$, se escribe $z + 20 = 4u$ con u impar, y $z = 4u - 20 \equiv 0 \pmod 8$, de modo que $z/2$ y $z/4$ son pares; el recorrido sigue el ciclo 8, $7 \to 8 \to 4 \to \underline{2} \to 7$, cuando además $z \equiv 8 \pmod{16}$. Si $r = 3$, entonces $z + 20 \equiv 8 \pmod{16}$, luego $z = 16s + 4$; $z/4$ es impar, y $(3z+4)/8 = 6s + 2$ es par, de modo que el circuito de C_{11} no se completa.

Por tanto, en una órbita que a partir de algún momento no recorre el ciclo crítico, todo bloque maximal posterior sale con $r \in \{2,3\}$, y su entrada x, que completa exactamente k circuitos, cumple

$$\nu_2(x+20) \in \{3k+2,\ 3k+3\}.$$

Es la traducción a valuaciones de la ausencia del ciclo crítico, que el grafo con memoria de la Definición 12.10 ya incorpora al suprimir el nodo $\underline{8}$; no es una restricción adicional.

Observación 13.4 (Realizabilidad de los encadenamientos finitos)**.** *Para la función compacta, que lleva n a $n/2$ o a $(3n+1)/2$ según su paridad, las paridades de los j primeros pasos dependen sólo del resto del valor inicial módulo 2^j, y cada sucesión de j paridades corresponde exactamente a una clase de restos [2]. Combinando esta propiedad con la condición de raíz digital mediante el teorema chino del resto, toda concatenación finita de bloques de C_{11} y recorridos de reentrada que corresponda a un camino del grafo modular, es decir, compatible con las reglas de paridad y de raíz digital, se realiza en infinitos enteros positivos. Para un recorrido fijo, la libertad consiste en variar la salida z dentro de la clase que lo realiza, como en la Observación 13.2; así la siguiente entrada puede tener cualquier valuación compatible con su nodo de llegada.*

En consecuencia, ningún argumento que dependa únicamente de excluir concatenaciones finitas admisibles puede demostrar que una órbita no puede reentrar infinitas veces en C_{11} sin recorrer el ciclo crítico. Una sucesión infinita de paridades determina un único entero 2-ádico, pero toda órbita de un entero positivo produce también una sucesión infinita: lo que habría que demostrar es que las sucesiones con infinitas reentradas en C_{11} y sin el ciclo crítico no corresponden a ningún entero positivo que no alcance el 1, y ningún tramo finito de la sucesión permite decidirlo.

14. Preguntas abiertas

El Corolario 12.6 deja planteadas dos preguntas.

Problema 14.1. *¿Puede una órbita que no alcanza el 1 prescindir, a partir de algún momento, del ciclo crítico $(7, \underline{8}, 7)$ y apoyarse sólo en el ciclo $(7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7)$?*

Problema 14.2. *¿Es compatible con la aritmética de la función de Collatz que una órbita recorra infinitas veces el ciclo* 6*, el ciclo* 11 *o ambos sin alcanzar el* 1*?*

Observación 14.3. *Por el Corolario 12.6, una respuesta negativa al segundo problema equivale a la conjetura de Collatz, pues una órbita convergente sólo recorre esos ciclos un número finito de veces. El primero es, en cambio, una pregunta parcial.*

Observación 14.4. *La rareza de los enteros que completan r circuitos críticos, con proporción $1/2^r$ en su clase, es una propiedad del conjunto de los enteros y no una obstrucción para una trayectoria individual: una órbita excepcional podría, en principio, visitar una y otra vez esas familias. Responder a las preguntas anteriores exige información que el grafo modular no conserva, pues la clase módulo* 9 *no determina la paridad, que es la que gobierna la dinámica.*

15. Conclusión

En este trabajo se ha analizado la dinámica de la función de Collatz desde su representación modular por raíces digitales.

El primer resultado es la **clasificación de los once ciclos elementales** del grafo modular: nueve tienen coeficiente elemental $\lambda < 1$ y son incondicionalmente contractivos, salvo el circuito trivial $4 \to 2 \to \underline{1} \to 4$, que conserva el valor, y dos pueden producir expansión. El ciclo crítico $(7, \underline{8}, 7)$, con $\lambda = 3/2$, produce expansión neta a partir de $k \geq 2$ circuitos; el ciclo $(7, 8, \underline{4}, 4, \underline{2}, 7)$, con $\lambda = 9/8$, a partir de $k \geq 6$.

El segundo es la **caracterización aritmética del ciclo crítico**: un par de raíz digital 7 completa exactamente r circuitos si y sólo si $\nu_2(x+2) = r+1$. Los enteros que completan al menos r circuitos forman, dentro de su clase, una proporción $1/2^r$.

El tercero es la **caracterización aritmética del ciclo 11**: un par de raíz digital 7 con $\nu_2(x+20) \geq 4$ completa exactamente $\lfloor (\nu_2(x+20)-1)/3 \rfloor$ circuitos, el umbral $k \geq 6$ se alcanza a partir de 4 718 572, y las longitudes de los bloques siguen una ley geométrica de razón $1/8$, como las del ciclo crítico siguen una de razón $1/2$.

El cuarto es la **convergencia en ausencia de los ciclos 6 y 11**: toda órbita cuyo itinerario modular, a partir de algún momento, no contiene los ciclos 6 y 11 alcanza el 1, y lo mismo ocurre si la órbita, a partir de algún momento, no recorre en pasos consecutivos ningún circuito de esos dos ciclos. En consecuencia, una órbita divergente o un ciclo no trivial, si existieran, tendrían que recorrer esos ciclos infinitas veces. Si además prescindieran definitivamente del ciclo crítico, no les bastarían circuitos aislados del ciclo 11: tendrían que completar infinitas veces al menos dos circuitos consecutivos de ese ciclo.

Estos resultados no constituyen una demostración de la conjetura de Collatz. Quedan abiertas la posibilidad de prescindir del ciclo crítico apoyándose sólo en el ciclo 11 y, más en general, la de que una órbita recorra alguno de los dos ciclos expansivos infinitas veces sin alcanzar el 1. La Sección 13 muestra que esa cuestión no puede decidirse con información finita: todo encadenamiento finito de bloques y retornos se realiza con enteros positivos, y la dificultad reside en las sucesiones infinitas.

A. Programas de verificación

Los cálculos finitos de la Sección 12 pueden reproducirse con dos programas en Python, que acompañan a este artículo y pueden consultarse en `https://www.collatz.es/articulos/seccion4_1/verificacion_corolario_10_12.py` y `https://www.collatz.es/articulos/seccion4_1/verificacion_corolario_10_13.py`. El primero construye el grafo con memoria $\mathcal{A}$ de la Definición 12.10; el segundo, el grafo $\mathcal{A}_2$ del Corolario 12.13. Cada uno calcula la media máxima de los ciclos con el algoritmo de Karp [5] y comprueba, con aritmética entera, que no existen ciclos de peso positivo con los pesos enteros indicados en el texto, lo que certifica la proporción máxima de pasos impares. El segundo programa comprueba además la congruencia $x \equiv 1132 \pmod{1152}$ para todos los enteros menores que 10^6, como contraste de la deducción algebraica del texto.

Referencias

[1] J. C. Lagarias, *The* $3x+1$ *Problem and Its Generalizations*, The American Mathematical Monthly, Vol. 92, No. 1 (1985), pp. 3–23.

[2] R. Terras, *A Stopping Time Problem on the Positive Integers*, Acta Arithmetica, Vol. 30, No. 3 (1976), pp. 241–252.

[3] T. Tao, *Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values*, Forum of Mathematics, Pi, Vol. 10 (2022), e12.

[4] C. J. Everett, *Iteration of the number-theoretic function* $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+2$, Advances in Mathematics, Vol. 25, No. 1 (1977), pp. 42–45.

[5] R. M. Karp, *A characterization of the minimum cycle mean in a digraph*, Discrete Mathematics, Vol. 23, No. 3 (1978), pp. 309–311.

[6] I. Korec, *A density estimate for the* $3x+1$ *problem*, Mathematica Slovaca, Vol. 44, No. 1 (1994), pp. 85–89.