El grafo funcional de las columnas mínimas

Miguel Cerdá Bennassar
collatz.es

Julio de 2026

Resumen

Establecida en [1] la partición de los tramos de Collatz en fibras finitas —cada una con una columna mínima por inclusión—, la dinámica de Collatz induce sobre esos representantes canónicos el mapa de retorno verde R [2]. Lo representamos como un grafo funcional G_R —nodos las columnas mínimas, grado de salida 1—, cuyas órbitas son caminos deterministas y cuyos bucles corresponden, salvo rotación, a los ciclos no triviales de Collatz. El grafo describe solo las transiciones entre fibras; la estructura interna de cada fibra queda absorbida por la reducción. En este lenguaje, el problema de los ciclos se reformula como el de los bucles de G_R: resuelto únicamente el de longitud 1 (trivial, [3], vía Steiner), abierto el resto. Subrayamos que esta reformulación reviste el problema sin descomponerlo en piezas más fáciles.

1. De las columnas mínimas al grafo

En [1] se establece que la reducción parte los tramos en fibras finitas, cada una con una única columna mínima por inclusión, encabezada por un verde coprimo con 3. Sobre el conjunto $\mathcal{C}$ de esas columnas mínimas, la dinámica de Collatz se proyecta como una aplicación: a cada columna mínima le asocia aquella que contiene el siguiente verde alcanzado por la órbita. Esta aplicación es el mapa de retorno verde $R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, construido en [2].

Una aplicación de un conjunto en sí mismo se representa como un grafo dirigido: los elementos como nodos, y de cada uno una flecha a su imagen. Llamamos $G_R = (\mathcal{C}, E)$ a ese grafo, con $E = \{(C, R(C)) : C \in \mathcal{C}\}$. Los nodos son, pues, las columnas mínimas; las aristas, la ley de transición R.

2. El grafo funcional

Teorema 1 (Grafo funcional)**.** *Todo nodo de G_R tiene grado de salida exactamente* 1*:*

$$\mathrm{outdeg}(C) = 1 \qquad \textit{para toda } C \in \mathcal{C}.$$

En consecuencia, G_R es un grafo funcional dirigido.

Demostración. $\mathrm{outdeg}(C) \leq 1$ porque R es una aplicación (un único valor $R(C)$); y $\mathrm{outdeg}(C) \geq 1$ por la totalidad de R —toda columna mínima tiene sucesora, [2]—. Luego $\mathrm{outdeg}(C) = 1$. □

Observación 1*.* G_R no se construye sobre todos los tramos de Collatz, sino únicamente sobre sus representantes canónicos. Toda la complejidad interna de cada fibra queda absorbida por la reducción; el grafo describe exclusivamente las transiciones entre fibras.

El grado de entrada, en cambio, es variable: $\mathrm{indeg}(C) = |R^{-1}(C)| \geq 0$. Una columna mínima puede ser imagen de varias, de una o de ninguna. Esa asimetría —salida única, entrada variable— gobierna la forma del grafo (§5).

3. Órbitas como caminos, ciclos como bucles

Como de cada nodo sale una sola arista, la proyección de una órbita de Collatz sobre $\mathcal{C}$ es un camino determinista: desde una columna mínima, el futuro está fijado. Iterar R es seguir ese camino.

Proposición 1 (Correspondencia; [2])**.** *Los ciclos no triviales de Collatz están en correspondencia con las órbitas periódicas de R, salvo rotación; y una órbita periódica de R es, en G_R, un bucle dirigido. Por tanto*

$$\textit{ciclos no triviales de Collatz} \longleftrightarrow \textit{órbitas periódicas de } R \longleftrightarrow \textit{bucles de } G_R,$$

salvo rotación.

La primera equivalencia es el resultado de [2]; la segunda es la lectura gráfica de "órbita periódica", pues en un grafo funcional un bucle dirigido es exactamente un ciclo de la aplicación. El ciclo trivial se proyecta en el bucle de longitud 1 en la columna de 1, ya que $R(1) = 1$.

4. Columnas espejo

Descendemos al nivel más fino, el de la adyacencia elemental. Sea T el mapa acelerado de Collatz ($T(n) = n/2$ si n es par, $(3n+1)/2$ si es impar), y para cada entero c el par $C(c) = (c, T(c))$: un número y su sucesor. (Estos pares de dos elementos no deben confundirse con los tramos-columna de [1].)

Definición 1 (Columnas espejo)**.** Dos pares $C(a) = (a, T(a))$ y $C(b) = (b, T(b))$ son *espejo* si tienen los mismos dos elementos en orden inverso, esto es, $T(a) = b$ y $T(b) = a$.

Proposición 2 (Única pareja espejo)**.** *La única pareja de pares espejo es* $(1, 2) \leftrightarrow (2, 1)$.

Demostración. Supongamos $T(a) = b$, $T(b) = a$. Si a es impar y b par, entonces $b = (3a+1)/2$ y $a = b/2$; de $b = 2a$ y $b = (3a+1)/2$ sale $4a = 3a + 1$, luego $a = 1$, $b = 2$. El caso a par, b impar es simétrico y da $(2, 1)$. Si ambos fueran pares, $b = a/2$ y $a = b/2$ forzarían $a = 0$, imposible. Si ambos fueran impares, $b = (3a+1)/2$ y $a = (3b+1)/2$ dan $a = -1$, imposible en $\mathbb{N}$. La única pareja positiva es $(1, 2) \leftrightarrow (2, 1)$. □

Corolario 1. *Fuera del ciclo trivial, dos pares distintos no contienen los mismos dos elementos: a lo sumo comparten uno. La inversión completa $(a, b) \leftrightarrow (b, a)$ solo ocurre en $(1, 2) \leftrightarrow (2, 1)$.*

Observación 2 (Nivel)*.* Un par espejo es un 2-ciclo de T: dos pasos elementales, $a \to b \to a$. No es un bucle de G_R —que sería un 2-ciclo de R, muchos pasos de T, el problema $k = 2$— ni el punto fijo de R. El ciclo trivial luce así dos caras: única pareja espejo a nivel de T (Proposición 2, elemental) y único punto fijo de R a nivel de retorno ([3], vía Steiner). Excluir las parejas espejo no dice nada sobre los 2-ciclos de R.

5. Ramificación y árboles inversos

La salida única obliga a una forma concreta allí donde hay un bucle: la componente consta de ese bucle y de árboles dirigidos hacia él, enraizados en sus nodos. La ramificación de esos árboles es el grado de entrada mayor que 1; sus hojas, las columnas mínimas de grado de entrada 0. Son los árboles inversos —los conjuntos de preimágenes iteradas $R^{-1}, R^{-2}, \ldots$— que confluyen hacia un bucle *cuando este existe*, y enlazan con el árbol inverso de la órbita de 27 estudiado por separado.

Observación 3 (G_R es infinito). La forma "un bucle con ramas afluentes" es la estructura canónica de un grafo funcional *finito*, donde seguir las aristas de salida fuerza a repetir nodo. En G_R, que es infinito, esto no es gratuito: una componente puede no contener bucle alguno y ser un rayo infinito sin repetición —una órbita divergente—. La descripción por ramas afluentes se aplica a las componentes que *sí* contienen un bucle.

6. Estado del problema

La Proposición 1 convierte el problema de los ciclos de Collatz en el de los bucles de G_R. En este lenguaje:

- el bucle de longitud 1 está resuelto: es único y es el trivial ([3], vía el teorema de circuitos de Steiner);
- los bucles de longitud ≥ 2 permanecen abiertos; el primer caso abierto corresponde a los bucles de longitud 2.

El marco sugiere una reformulación gráfica del problema completo, que recogemos por su valor de diccionario —dice *qué* habría que probar—, no como un programa de pasos más fáciles:

1. construir G_R;
2. probar que toda componente contiene un bucle;
3. probar que hay una única componente;
4. probar que el único bucle es el trivial.

Conviene decir dónde reside la dificultad. El paso 1 está hecho (Teorema 1); el paso 4, para la longitud 1 ([3]), y abierto para longitud ≥ 2. Y los pasos 2 y 3 no son escalones intermedios: por la Observación 3, en un grafo funcional infinito el paso 2 —toda componente tiene bucle— *es* la no-divergencia de Collatz, y el paso 3 —componente única— *es* la conectividad global. Ambos son tan difíciles como la propia conjetura. La reformulación reviste el problema en lenguaje estructural y hace transparente qué falta; no lo descompone en piezas más asequibles.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *La reducción canónica de los tramos de Collatz a fibras finitas*, collatz.es, Capítulo 50, Sección 50.1.

[2] M. Cerdá Bennassar, *Fundamentos del mapa de retorno verde en el problema de Collatz*, collatz.es, Capítulo 50, Sección 50.1.

[3] M. Cerdá Bennassar, *El punto fijo del mapa de retorno verde: reducción a una desigualdad diofántica y los circuitos de Steiner*, collatz.es, Capítulo 50, Sección 50.1.