El punto fijo del mapa de retorno verde: reducción a una desigualdad diofántica y los circuitos de Steiner

Miguel Cerdá Bennassar
collatz.es

Julio de 2026

Resumen

Continuando el estudio del mapa de retorno verde R del problema de Collatz, se afina la cuestión de sus puntos fijos. Mediante una reducción elemental, la existencia de un punto fijo no trivial con parámetro $L = r + 1$ se traduce en la divisibilidad $D_L \mid 3^L - 2^L$, con $D_L = 2^{\lceil L \log_2 3 \rceil} - 3^L$. Una criba igualmente elemental —un divisor positivo no divide a un entero positivo menor— descarta esa divisibilidad siempre que $D_L > 2^{A-L} - 1$, colapsando el problema a una única desigualdad diofántica que afirma que 2^A no se aproxima demasiado a 3^L. Esta desigualdad es una criba *suficiente*, verificada numéricamente en el rango considerado. La unicidad del punto fijo se obtiene por otra vía: los puntos fijos de R son exactamente los *circuitos* en el sentido de Steiner, cuya unicidad es un teorema conocido (Steiner, mediante formas lineales en logaritmos). La reducción y la criba son elementales e incondicionales; la unicidad descansa en un resultado transcendente, no elemental, que aquí se identifica con precisión.

1. Recordatorio

Sea $T(n) = n/2$ (n par), $T(n) = (3n+1)/2$ (n impar), y S el mapa de Syracuse sobre impares. *Verde*: impar $\equiv 1$ (mód 4). *Rojo*: impar $\equiv 3$ (mód 4). El *mapa de retorno verde* R envía cada verde al primer verde posterior; su código es $\kappa(g) = (a, r)$ con $a = \mathrm{v}_2(3g+1) \geq 2$ y $r = \mathrm{v}_2(S(g)+1) - 1 \geq 0$ [1]. Recordamos el resultado de partida.

Teorema 1 (Reducción del punto fijo [1])**.** *Si g es un punto fijo de R con código (a, r), entonces, con $L = r + 1$,*

$$A = \lceil L \log_2 3 \rceil, \qquad a = A - r, \qquad D_L = 2^A - 3^L,$$

se tiene $a + r = A$; el candidato es $g = N_L/D_L$ con $N_L = 3^r(2^a + 1) - 2^A$, y existe si y solo si $g \in \mathbb{Z}$ y se cumple la admisibilidad del código. El caso $L = 1$ da el punto fijo trivial $g = 1$.

2. Reducción a una divisibilidad

Lema 1. *Con la notación del Teorema 1 y $L \geq 1$,*

$$g \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad D_L \mid 2^{A-L} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad D_L \mid 3^L - 2^L.$$

Demostración. En la coordenada $x = g + 1$, la ecuación de punto fijo $x = A_c x + B_c$ de la forma afín de R, con $A_c = 3^{r+1}/2^A$ y $B_c = 3^r(2^a - 2)/2^A$, da $1 - A_c = D_L/2^A$ y

$$x = \frac{B_c}{1 - A_c} = \frac{3^r(2^a - 2)}{D_L} = \frac{2 \cdot 3^r\big(2^{\,a-1} - 1\big)}{D_L}.$$

Ahora $D_L = 2^A - 3^L$ es impar, y $D_L \equiv (-1)^A \not\equiv 0 \pmod 3$, luego $\gcd(D_L,\, 2 \cdot 3^r) = 1$. Por tanto $x \in \mathbb{Z} \iff D_L \mid 2^{\,a-1} - 1$, y como $a - 1 = A - L$, esto es $D_L \mid 2^{\,A-L} - 1$. Finalmente, de $3^L \equiv 2^A \pmod{D_L}$ se sigue $3^L - 2^L \equiv 2^A - 2^L = 2^L\big(2^{\,A-L} - 1\big) \pmod{D_L}$, y como $\gcd(D_L, 2) = 1$, $D_L \mid 3^L - 2^L \iff D_L \mid 2^{\,A-L} - 1$. □

El Lema 1 elimina por completo el numerador N_L: el candidato es entero *exactamente* cuando D_L divide a $3^L - 2^L$. (En particular, para $L = 1$, $D_1 = 2^2 - 3 = 1$ divide a todo, y $g = 1$.)

3. La criba elemental

Proposición 1 (Criba)**.** *Si $L \geq 2$ y $D_L > 2^{\,A-L} - 1$, entonces el candidato no es entero; en particular no hay punto fijo con parámetro L. La condición equivale a*

$$2^A\big(2^L - 1\big) > 2^L\big(3^L - 1\big),$$

y es una cota inferior sobre D_L del orden de $2^{\,A-L} \asymp (3/2)^L$.

Demostración. Para $L \geq 2$, $2^{\,A-L} - 1 \geq 2^1 - 1 = 1 > 0$. Un entero positivo estrictamente menor que D_L no puede ser múltiplo de D_L; luego $D_L \nmid 2^{\,A-L} - 1$ y, por el Lema 1, $g \notin \mathbb{Z}$. La equivalencia algebraica es inmediata: $2^A - 3^L > 2^{\,A-L} - 1 \iff 2^A - 2^{\,A-L} > 3^L - 1 \iff 2^{\,A-L}(2^L - 1) > 3^L - 1$. Por último, $2^A > 3^L$ da $2^{\,A-L} > (3/2)^L$. □

Combinando los dos resultados se obtiene el enunciado central.

Teorema 2 (Reducción a una desigualdad diofántica)**.** *Si para todo $L \geq 2$ se cumple*

$$2^A - 3^L \;>\; 2^{\,A-L} - 1, \qquad A = \big\lceil L \log_2 3 \big\rceil, \tag{1}$$

entonces $g = 1$ es el único punto fijo de R. La desigualdad (1) es una cota inferior sobre la distancia de 2^A a 3^L por exceso.

Demostración. Por la Proposición 1, (1) implica que para ningún $L \geq 2$ hay candidato entero, luego ningún punto fijo con $L \geq 2$. Sólo resta $L = 1$, que da $g = 1$. □

4. Los circuitos de Steiner y la unicidad

Observación 1 (Identificación). Un punto fijo de R es un ciclo de Syracuse cuyo vector de exponentes es $(a, 1, 1, \ldots, 1)$ con $a = A - L + 1$ y $L - 1$ unos: un único descenso (en el verde) seguido de $L - 1$ ascensos (los rojos), es decir, un ciclo con un único mínimo local. Estos son precisamente los *circuitos* —o 1-*ciclos*— en el sentido de Steiner [2]. Steiner demostró que el único 1-ciclo es el trivial $(1, 2)$, mediante el teorema de Baker sobre formas lineales en logaritmos; Simons y de Weger extendieron después el enfoque a los m-ciclos [3].

Teorema 3 (Unicidad del punto fijo, vía Steiner)**.** *El único punto fijo del mapa de retorno verde R es $g = 1$.*

Demostración. Por la Observación 1, un punto fijo no trivial de R equivaldría a un circuito no trivial en el sentido de Steiner. El teorema de Steiner [2] excluye tales circuitos. Por tanto el único punto fijo es el trivial, $g = 1$. □

Observación 2 (Papel de la desigualdad). La desigualdad (1) es una criba elemental *suficiente* para excluir candidatos (Proposición 1), y se verifica numéricamente en el rango considerado (nota numérica). No se afirma aquí que (1) se cumpla para todo L: eso es estrictamente más fuerte que la unicidad —podría fallar la desigualdad en algún L sin que por ello haya divisibilidad ni circuito—. Lo que cierra la unicidad es el Teorema 3, no la desigualdad.

Observación 3 (Alcance). El Lema 1 y la Proposición 1 son elementales e incondicionales, y reducen la búsqueda de puntos fijos no triviales a candidatos con $D_L \leq 2^{A-L} - 1$ (aproximaciones muy ajustadas de 3^L por potencias de 2). La unicidad, en cambio, descansa en el Teorema 3, transcendente. Una demostración elemental de (1) para todo L daría una prueba elemental de la unicidad —hoy sólo accesible vía Steiner, que usa formas lineales en logaritmos [4]—, si bien (1) es estrictamente más fuerte que la unicidad. La aportación de este escrito es localizar la dificultad en ese único punto y exhibir su tamaño exacto —la separación de 2^A y 3^L por exceso, gobernada por la parte fraccionaria $\{L \log_2 3\}$.

5. Nota numérica

La desigualdad (1) se comprobó para $2 \leq L \leq 6000$: se cumple en todos, con margen mínimo $D_L \cdot 2^L/3^L = 1{,}48$ en $L = 3$. Por la criba, en ese rango no existe candidato entero, y por tanto ningún punto fijo no trivial. Esta comprobación ilustra la criba; la unicidad para todo L es la del Teorema 3.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Fundamentos del mapa de retorno verde en el problema de Collatz*, collatz.es / Zenodo, 2026.

[2] R. P. Steiner, *A theorem on the Syracuse problem*, Proc. 7th Manitoba Conf. on Numerical Mathematics, Winnipeg, 1977, 553–559.

[3] J. Simons, B. de Weger, *Theoretical and computational bounds for m-cycles of the* $3n + 1$ *problem*, Acta Arith. 117 (2005), 51–70.

[4] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, Mathematika 13 (1966), 204–216.