Fundamentos del mapa de retorno verde en el problema de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar
collatz.es

Julio de 2026

Resumen

Se introduce y estudia el *mapa de retorno verde* R, el mapa de primer retorno de la dinámica de Collatz al conjunto de los impares $\equiv 1 \pmod 4$. La Parte A reúne los resultados demostrados: una identidad de descenso 2-ádica que hace de toda racha de impares $\equiv 3 \pmod 4$ un descenso forzado de longitud determinada; la reducción consiguiente de la dinámica a su esqueleto verde (representantes $\{1, 5\} \pmod{12}$ tras la criba de múltiplos de 3); la forma cerrada y la forma afín de R; la correspondencia entre ciclos de Collatz y órbitas periódicas de R; y la reducción del problema de los puntos fijos a una única condición de divisibilidad por cada parámetro. La Parte B recoge, claramente identificados como evidencia numérica, conjeturas y programa de investigación, la estructura estadística del código (a, r), la deriva media y la cuestión de la uniciclidad. Los resultados de la Parte A son incondicionales.

Parte A. Resultados

1. Notación

Mapa de Collatz acortado $T(n) = n/2$ si n es par, $T(n) = (3n + 1)/2$ si es impar; mapa de Syracuse sobre impares $S(x) = (3x + 1)/2^{a(x)}$ con $a(x) = \mathrm{v}_2(3x + 1)$. Para un impar m,

$$t(m) = \mathrm{v}_2(m + 1) = \#\{\text{unos finales de } m \text{ en binario}\}.$$

Verde: impar $\equiv 1 \pmod 4$ ($t = 1$). *Rojo*: impar $\equiv 3 \pmod 4$ ($t \geq 2$). Para un rojo $a = 1$ y $S = T$; para un verde $a \geq 2$. Sea $V = \{\, m \text{ impar} : m \equiv 1 \pmod 4 \,\}$.

2. Invariante módulo 3

Proposición 1. *Si $v \not\equiv 0 \pmod 3$, todos sus sucesores cumplen lo mismo; en consecuencia, después del primer término impar, ningún término de la trayectoria es múltiplo de* 3 (*el primer impar sí puede serlo*).

Demostración. Para v par, $v/2 \equiv 0 \iff v \equiv 0 \pmod 3$. Para v impar, $3v + 1 \equiv 1 \pmod 3$. El primer impar produce sucesor coprimo con 3, y la propiedad se propaga. □

3. El descenso forzado

Lema 1 (Identidad de descenso)**.** *Si* $m \equiv 3 \pmod 4$*, entonces* $T(m)$ *es impar y* $\mathrm{v}_2(T(m)+1) = \mathrm{v}_2(m+1) - 1$*.*

Demostración. $3m+1 \equiv 2 \pmod 4$, luego $T(m) = (3m+1)/2$ impar; y $T(m)+1 = 3(m+1)/2$, de donde $\mathrm{v}_2(T(m)+1) = \mathrm{v}_2(m+1) - 1$. □

Corolario 1 (Longitud del descenso)**.** *Todo impar con* $t(m) = t$ *alcanza un verde tras exactamente* $t-1$ *pasos de* T*, todos los intermedios rojos. En particular todo impar alcanza un verde en tiempo finito y determinado.*

4. Reducción a columnas genuinas

Teorema 1 (Reducción)**.** *El mapa de primer retorno* $R : V \to V$ *está definido en todo* V*. Las columnas genuinas constituyen un esqueleto completo: los rojos son rachas deterministas entre verdes, sin grados de libertad. Incondicional.*

Demostración. Para $g \in V$, $T(g)$ es par; sea m' el primer impar de su descenso. Por el Corolario 1, m' alcanza un verde en $t(m') - 1$ pasos. Composición finita. □

Corolario 2 (Representantes módulo 12)**.** *Tras suprimir los múltiplos de* 3 *(Proposición 1), los representantes genuinos son exactamente* $\{1, 5\} \pmod{12}$*.*

Demostración. Los verdes son $\{1, 5, 9\} \pmod{12}$; el único múltiplo de 3 es 9. □

Proposición 2 (Tabla columnar)**.** *En la tabla de columnas* $k, T(k), T^2(k), \ldots$*, la fila del primer verde de la columna* k *impar es* $\mathrm{v}_2(k+1) - 1$*. (Inmediata del Corolario 1.)*

5. El mapa de retorno: formas cerrada y afín

Proposición 3 (Forma cerrada)**.** *Para* $g \in V$*,* $m' = S(g)$ *y* $r = \mathrm{v}_2(m'+1) - 1$*, se tiene* $R(g) = S^{r+1}(g)$ *y*

$$R(g) + 1 = \big(S(g) + 1\big)(3/2)^r.$$

Demostración. Si $r = 0$, m' es verde. Si no, la racha aplica $S = T$ r veces; como $T(x)+1 = \frac{3}{2}(x+1)$, $R(g)+1 = (m'+1)(3/2)^r$. Con $m'+1 = 2^{r+1}q$ resulta $R(g)+1 = 2 \cdot 3^r q$, verde. □

Definición 1. El *código* de $g \in V$ es $\kappa(g) = (a, r)$ con $a = \mathrm{v}_2(3g+1) \geq 2$ y $r = \mathrm{v}_2(S(g)+1) - 1 \geq 0$. El paso $g \to R(g)$ contiene $r+1$ triplicaciones y $a + r$ divisiones.

Proposición 4 (Forma afín)**.** *En* $x = g + 1$*,* $x_{i+1} = A_i x_i + B_i$*, con* $A_i = 3^{r_i+1}/2^{a_i+r_i} > 0$ *y* $B_i = 3^{r_i}(2^{a_i} - 2)/2^{a_i+r_i} > 0$*.*

Demostración. $x_{i+1} = (S(g_i)+1)(3/2)^{r_i}$ y $S(g)+1 = 3x/2^a + (2^a - 2)/2^a$ (de $3g+1 = 3x-2$). □

Proposición 5 (Cierre afín y primer cerrojo)**.** *Para una palabra periódica* $(a_i, r_i)_{i<k}$*, la composición da* $x_0 = Px_0 + Q$ *con* $P = \prod A_i = 3^L/2^A$ *y* $Q = \sum_i B_i \prod_{j>i} A_j > 0$*, donde* $L = \sum(r_i + 1)$*,* $A = \sum(a_i + r_i)$*. Luego* $x_0 = Q/(1-P)$*, y de* $x_0 > 0$*,* $Q > 0$ *se sigue* $P < 1$*, es decir* $2^A > 3^L$*.*

6. Ciclos y puntos fijos

Teorema 2 (Correspondencia ciclo–órbita)**.** *Los ciclos no triviales de Collatz están en biyección con las órbitas periódicas no triviales del mapa R. Cada órbita determina una palabra periódica admisible en el código (a, r), definida salvo rotación cíclica. Fijada la palabra, el ciclo, de existir, queda determinado por la única fracción $x_0 = Q/(1-P)$; o esa fracción es un entero verde admisible, o no hay ciclo.*

Demostración. Todo ciclo contiene un verde (una racha sin verde exigiría t decreciente sin cota, imposible para $x > 0$), luego se descompone en bloques verde→verde, dando la palabra periódica, y recíprocamente. La rigidez es la Proposición 5. □

El caso de periodo $k = 1$ (puntos fijos de R) admite la siguiente reducción incondicional.

Teorema 3 (Reducción del punto fijo)**.** *Si g es un punto fijo de R con código (a, r), entonces, definiendo*

$$A_r = \lceil (r+1)\log_2 3 \rceil, \qquad a = A_r - r,$$

se tiene $a + r = A_r$; en particular a queda determinado por r, y hay a lo sumo un candidato por cada $r \geq 0$. Sean

$$D_r = 2^{A_r} - 3^{r+1}, \qquad N_r = 3^r(2^a + 1) - 2^{A_r}.$$

Existe un candidato entero $g = N_r/D_r$ si y solo si $D_r \mid N_r$; dicho candidato es un punto fijo si, además, satisface las condiciones de admisibilidad del código:

$$g \equiv 1 \pmod 4, \qquad a = \mathrm{v}_2(3g+1), \qquad r = \mathrm{v}_2(S(g)+1) - 1.$$

El caso $r = 0$ da el punto fijo trivial $g = 1$, código $(2, 0)$.

Demostración. Un punto fijo es el caso $k = 1$ de la Proposición 5: $x = Ax+B$ da $x = B/(1-A)$ y $g = N_r/D_r$. El primer cerrojo da $2^{a+r} > 3^{r+1}$, es decir $a+r > (r+1)\log_2 3$. La admisibilidad $a = \mathrm{v}_2(3g+1)$ implica $2^a \mid 3g+1 = 3x-2$, luego $2^a \leq 3x-2 < 3x$; sustituyendo x y simplificando, $2^{a+r-1} < 3^{r+1}$, es decir $a + r < (r+1)\log_2 3 + 1$. Ambas cotas encierran $a + r$ en un intervalo abierto de longitud 1 que, por ser $(r+1)\log_2 3 \notin \mathbb{Z}$, contiene un único entero, A_r; así $a = A_r - r$. El candidato $g = N_r/D_r$ es entero si y solo si $D_r \mid N_r$, y entonces es punto fijo si y solo si cumple la admisibilidad del enunciado. □

Observación 1. El Teorema 3 no afirma que $g = 1$ sea el *único* punto fijo: para $r \geq 1$, decidir si $D_r \mid N_r$ es una cuestión de divisibilidad gobernada por la parte fraccionaria $\{(r+1)\log_2 3\}$, es decir, por la cercanía de 2^{A_r} a 3^{r+1} por exceso. La no existencia de puntos fijos no triviales se enuncia como conjetura en la Parte B.

Proposición 6 (Marginal del exponente de salida)**.** *Para g distribuido según la medida de Haar sobre V (uniforme módulo 2^N, $N \to \infty$), el exponente $a = \mathrm{v}_2(3g+1)$ cumple $\mathbb{P}(a = k) = 2^{-(k-1)}$, $k \geq 2$; en particular $\mathbb{E}[a] = 3$.*

Demostración. Para $g \in 1 + 4\mathbb{Z}_2$, $3g + 1 = 4(1 + 3t)$ con t de Haar; como 3 es unidad 2-ádica, $1+3t$ es de Haar y $\mathbb{P}(\mathrm{v}_2(1+3t) = j) = 2^{-(j+1)}$. De $a = 2 + \mathrm{v}_2(1+3t)$, $\mathbb{P}(a = k) = 2^{-(k-1)}$. □

Parte B. Evidencia numérica y programa de investigación

Las afirmaciones de esta parte **no** están demostradas. Se presentan como evidencia experimental, conjeturas o direcciones futuras.

7. Estructura estadística del código

Los experimentos (sobre 6×10^5 verdes coprimos con 3, $g < 2^{24}$) sugieren que la marginal de r y la relación entre a y r obedecen leyes geométricas independientes. Esto motiva la siguiente conjetura.

Conjetura 1 (Estructura del código)**.** Bajo la medida de Haar sobre V, los componentes $a = \mathrm{v}_2(3g+1)$ y $r = \mathrm{v}_2(S(g)+1) - 1$ son independientes, con $\mathbb{P}(r = s) = 2^{-(s+1)}$ *($s \geq 0$)*; en particular $\mathbb{E}[r] = 1$.

La marginal de a (Proposición 6) sí está probada. La marginal de r requeriría establecer que S transporta la medida de Haar de V a la de los impares; la independencia es la afirmación más fuerte. Una eventual demostración de la Conjetura 1 —junto con biyección y preservación de medida— permitiría afirmar que R es, en coordenadas 2-ádicas, conjugado a un shift de Bernoulli sobre $\{2, 3, \dots\} \times \{0, 1, \dots\}$. Eso queda como problema abierto; los datos lo sugieren, pero no lo demuestran.

8. Deriva media y tiempo de retorno

Condicionada a la Conjetura 1, la razón neta por retorno $\rho \approx 3^{r+1}/2^{a+r}$ tendría deriva

$$\mathbb{E}[\log \rho] = (\mathbb{E}[r]+1)\log 3 - (\mathbb{E}[a]+\mathbb{E}[r])\log 2 = 2\log 3 - 4\log 2 = \log \tfrac{9}{16} < 0,$$

es decir $\log(3/4)$ por odd-step, y tiempo medio de retorno $\mathbb{E}[1+r] = 2$ (consistente con la densidad $1/2$ de los verdes). Numéricamente: $\mathbb{E}[a] = 3{,}001$, $\mathbb{E}[r] = 1{,}000$, retorno 1,9999, deriva $-0{,}576$ frente a $\log(9/16) = -0{,}575$. Estas cifras son evidencia, no demostración: la deriva descansa en $\mathbb{E}[r]$, conjetural.

9. Uniciclidad

Conjetura 2 (Punto fijo único)**.** $g = 1$ es el único punto fijo de R; equivalentemente, $D_r \nmid N_r$ para todo $r \geq 1$ *(Teorema 3)*.

Verificado para $1 \leq r \leq 4999$. La Conjetura 2 es el primer caso ($k = 1$) del problema de uniciclidad; su dificultad reside, por el Teorema 3, en una única divisibilidad por cada r, gobernada por $\{(r+1)\log_2 3\}$.

Observación 2 (Los ciclos como gran desviación). Heurísticamente, un ciclo fuerza $\sum_i \log \rho_i = 0$, esto es, salvo correcciones $O(1/L)$, $A/L \to \log_2 3 = 1{,}585\ldots$, frente al valor genérico $A/L \to \mathbb{E}[a+r]/\mathbb{E}[1+r] = 2$ que sugiere la Conjetura 1. Un ciclo sería así una gran desviación hacia abajo del recuento de divisiones, con predominio de verdes de exponente mínimo $a_i = 2$.

10. Programa de investigación

El mapa R sugiere un programa por periodos crecientes:

Problema 1. *($k = 1$)* Demostrar la Conjetura 2: ausencia de puntos fijos no triviales.

Problema 2. *($k = 2$)* Excluir las órbitas de periodo 2 de R (palabras $(a_0, r_0), (a_1, r_1)$ no triviales, salvo rotación).

Problema 3. *(general)* Determinar el menor k cuya exclusión requiera, esencialmente, una cota de tipo Baker sobre $|A \log 2 - L \log 3|$. Ese umbral localizaría la frontera entre lo elemental y lo transcendente en la cuestión de la uniciclidad.

11. Comprobaciones numéricas

La identidad de descenso (Lema 1) se verificó sobre los 5×10^6 rojos por debajo de ese límite, sin excepciones (racha máxima 21). La totalidad de R y la longitud de las rachas, sobre 2×10^5 trayectorias completas; el invariante módulo 3 no falló, y la criba sobre verdes da $\{1, 5\}$ (mód 12). Las formas cerrada y afín reprodujeron R sobre 10^6 y 5×10^5 verdes sin discrepancias. La Proposición 6 y los datos del código (Parte B) se midieron sobre 6×10^5 muestras. El barrido de puntos fijos sobre $0 \le r \le 4999$ confirma como único admisible $(2, 0)$, $g = 1$.