La reducción canónica de los tramos de Collatz a fibras finitas

Miguel Cerdá Bennassar
collatz.es

Julio de 2026

Resumen

Los tramos de la dinámica simplificada de Collatz se organizan en una tabla que *recubre* los impares con repetición: cada columna, encabezada por un impar, contiene como colas a las de sus sucesores. Reducir cada columna a su cola verde terminal induce una partición en *fibras*: cadenas de columnas anidadas, totalmente ordenadas por inclusión. Probamos que toda fibra es finita, con una única *columna máxima* (la más larga, sin cabecera anterior) y una única *columna mínima* (la cola verde terminal); el argumento es elemental, pues al ascender por una fibra las cabeceras decrecen estrictamente. Sobre esa partición, una sección final define la dinámica inducida —el mapa de retorno verde—, que ya no actúa sobre todos los tramos sino sobre sus representantes canónicos. Subrayamos que la finitud de las fibras no dice nada sobre la terminación de las órbitas.

1. La tabla y las columnas anidadas

Sobre los impares, el paso simplificado de Collatz es $U(m) = (3m+1)/2$. Si $m \equiv 3 \pmod 4$ (*rojo*), $U(m)$ es de nuevo impar; si $m \equiv 1 \pmod 4$ (*verde*), $U(m)$ es par. El objeto primario de este escrito es la *columna* (o *tramo*) de un impar m: la sucesión de impares

$$C_m = \big(m,\ U(m),\ U^2(m),\ \ldots,\ g\big),$$

que prosigue mientras sus términos son rojos y termina en el único verde g del tramo (que todo tramo alcance ese verde es el lema de descenso; [1]). Los impares no son sino las *cabeceras* de las columnas; toda la geometría vive sobre estas.

Dispuestas en tabla —en la fila $n = 0$ los impares $1, 3, 5, \ldots$, y cada columna desarrollando su tramo hacia abajo— las columnas se *anidan*. En efecto, si m es rojo, $C_{U(m)}$ es C_m sin su cabecera; como conjuntos,

$$C_{U(m)} \subset C_m.$$

La tabla, por tanto, no particiona los impares: los *recubre con repetición*, pues una misma cola pertenece a muchas columnas.

Tomemos la fila de labels $32, 48, 72, 108, 162, 243$. Sus columnas están encabezadas por $63, 95, 143, 215, 323, 485$ y encajan por inclusión:

$$C_{63} \supset C_{95} \supset C_{143} \supset C_{215} \supset C_{323} \supset C_{485},$$

todas con la misma cola, que termina en el verde 485 (y su par 728). Lo único nuevo en C_{63} respecto de las demás es su cabecera 63; el número 485 aparece en las seis. Llamamos *columna verde* a la encabezada por un verde ($\equiv 1 \pmod 4$); C_{485} lo es.

2. Fibras de columnas y finitud

Cada columna se reduce a la cola verde que comparte con sus prolongaciones. Definimos la *reducción* $\rho(C_m) = C_g$, donde g es el verde terminal del tramo de m; por el lema de descenso [1], ρ está definida sobre toda columna y es unívoca.

Definición 1 (Fibra)**.** La *fibra* de una columna verde C_g es el conjunto de columnas que se reducen a ella,

$$F(g) = \{\, C_m : \rho(C_m) = C_g \,\},$$

totalmente ordenado por inclusión. En el ejemplo, $F(485) = \{C_{63}, C_{95}, C_{143}, C_{215}, C_{323}, C_{485}\}$.

Al estar totalmente ordenada por inclusión, cada fibra tiene un único máximo y un único mínimo, conceptos objetivos:

- la *columna máxima por inclusión*: la de mayor longitud (C_{63}), que no es cola de ninguna otra; su cabecera no tiene preimagen impar.
- la *columna mínima por inclusión*: la de menor longitud (C_{485}), cola común de todas; su cabecera es el verde terminal.

Ambos extremos lo son por inclusión, no por valor: la columna máxima tiene, de hecho, la cabecera *menor* de la fibra (63), y la mínima la mayor (485). En adelante abreviamos "máxima" y "mínima". La columna máxima, como conjunto, *es* la fibra de números $\{63, 95, 143, 215, 323, 485\}$: la fibra de columnas y la fibra de números son las dos caras del mismo objeto:

$$\boxed{\text{fibra de columnas } \equiv \text{ fibra de números}}$$

Observación 1. La fibra admite dos lecturas equivalentes: como familia de columnas anidadas o como el conjunto de sus cabeceras. No son objetos distintos, sino dos descripciones del mismo bloque.

En particular, las fibras de números particionan los impares: todo impar pertenece a una única fibra —la determinada por su verde terminal—, pues cuantas columnas lo contienen comparten ese mismo verde.

Corolario 1 (Idempotencia)**.** *La reducción es idempotente, $\rho^2 = \rho$: una vez en la columna mínima ya no se reduce más. En consecuencia, ρ es una retracción sobre las columnas mínimas, que son precisamente sus puntos fijos.*

Teorema 1 (Partición)**.** *Las fibras $\{F(g) : C_g$ columna verde$\}$ particionan las columnas: cada columna pertenece a exactamente una fibra, la de su columna mínima.*

Demostración. ρ es total (lema de descenso) y unívoca (el tramo es determinista): a cada columna le corresponde una única columna mínima. Las fibras son las clases de la relación "compartir la misma ρ", que particiona el conjunto de columnas. □

Teorema 2 (Finitud de fibras)**.** *Toda fibra es una cadena finita*

$$C_{r_0} \supset C_{r_1} \supset \cdots \supset C_{r_\ell}, \qquad r_0 > r_1 > \ldots > r_\ell, \quad r_{i+1} = \frac{2r_i - 1}{3},$$

donde C_{r_0} es la columna máxima (cabecera r_0 sin preimagen impar, $r_0 \not\equiv 2 \pmod 3$) y $C_{r_\ell} = C_g$ es la columna mínima.

Demostración. La única preimagen impar de una cabecera r bajo U es $(2r-1)/3$, entera si y solo si $r \equiv 2 \pmod 3$; equivale a prolongar la columna con una cabecera anterior. La fibra es la cadena de esas prolongaciones a partir de C_g. Ahora bien, cada nueva cabecera es estrictamente menor que la anterior,

$$\frac{2r-1}{3} < r \iff 2r-1 < 3r \iff r > -1,$$

cierto para todo $r \geq 1$. Luego las cabeceras $r_\ell < \ldots < r_1 < r_0$ forman una sucesión estrictamente decreciente en $\mathbb{Z}^+$ al ascender por la fibra, que termina tras finitos pasos en una cabecera r_0 sin preimagen impar. Por tanto la fibra es finita. □

Observación 2 (Familias máximas). Cuando la columna mínima es C_g con $g = 2 \cdot 3^n - 1$ (label 3^n), la fibra es una fila completa del triángulo de Nicómaco: sus labels son $2^n, 2^{n-1} \cdot 3, \ldots, 3^n$ (la cadena $\times \frac{3}{2}$), con la columna máxima encabezada por $2^{n+1} - 1$ (label 2^n). La cabecera máxima puede ser múltiplo de 3: por ejemplo $63 = 2^6 - 1$, para $n = 5$.

Observación 3 (Interior coprimo con 3). Como $U(m) = (3m+1)/2 \equiv 2 \pmod 3$ para todo m, el interior de toda columna es coprimo con 3; solo la cabecera que *arranca* un tramo puede ser múltiplo de 3 (como 63). Las columnas mínimas se separan así en dos clases: las coprimas con 3 y las múltiplo de 3 (como C_9), que encabezan fibras singleton de arranque. Sobre las primeras actúa la dinámica inducida (§siguiente).

Observación 4 (Alcance). La finitud de cada fibra es la estructura *estática* de una familia de columnas; no dice nada sobre la terminación de las órbitas. Una órbita de Collatz visita infinitas fibras, cada una finita; que ese recorrido termine —la no-divergencia— es una cuestión aparte, ajena a este teorema.

3. La dinámica inducida sobre las fibras

Cada fibra posee una única columna mínima. Sobre las columnas mínimas coprimas con 3 —aquellas por las que discurre la dinámica, frente a las múltiplo de 3 como C_9, que son singletons de arranque— la dinámica de Collatz induce una aplicación: a cada columna mínima le asocia la que contiene el siguiente verde alcanzado por la órbita. Esta aplicación es precisamente el mapa de retorno verde R [1].

El mapa de retorno verde se obtiene, así, proyectando la dinámica de Collatz sobre los representantes canónicos de las fibras. Su estudio puede realizarse entonces sobre las columnas mínimas, en lugar de sobre todos los tramos: el espacio dinámico relevante deja de ser el conjunto de todos los tramos y pasa a ser el de sus representantes canónicos, sostenido por la estructura estática establecida en los teoremas anteriores.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Fundamentos del mapa de retorno verde en el problema de Collatz*, collatz.es, Capítulo 50, Sección 50.1.