Los 2-ciclos del mapa de retorno verde

Miguel Cerdá Bennassar
collatz.es

Julio de 2026

Resumen

Estudiamos las órbitas periódicas de longitud dos del mapa de retorno verde R. La composición de dos bloques produce una ecuación de cierre afín cuyo punto fijo se escribe $x_0 = N/(2^D - 3^A)$. Sobre ella montamos el hilo central del escrito: la existencia de un *candidato algebraico* de 2-ciclo se *reduce por niveles*, según $A = a_1 + a_2$, a un problema finito y explícito, que unas cribas elementales resuelven en cada nivel. Que un candidato sea un 2-ciclo real de R exige una capa adicional de admisibilidad. El único ingrediente externo necesario para cerrar globalmente la exclusión es una cota *a priori* para A, que aporta el teorema de Simons (2005) mediante formas lineales en logaritmos. Situamos así, con exactitud, la frontera entre lo que el marco resuelve por medios elementales y dónde entra el precedente de Simons.

1. Recordatorio

El mapa de retorno verde R actúa sobre las columnas mínimas del sistema de tramos [1]. A cada columna g se le asocia allí un *código local*

$$a = \nu_2(3g+1), \qquad r = \nu_2\big(S(g)+1\big) - 1,$$

que describe el paso elemental de R en esa columna. La órbita de longitud uno (punto fijo de R) recupera por vía elemental el resultado de Steiner sobre la inexistencia de 1-ciclos no triviales [2].

2. Convención de código

En este escrito conviene agrupar los pasos de R entre dos columnas mínimas consecutivas en un único *bloque*, y describirlo por su código *agregado*

$$(a, r) = \big(\text{n.}^{\text{o}} \text{ de triplicaciones},\ \text{n.}^{\text{o}} \text{ total de divisiones}\big)$$

a lo largo del bloque.

Advertencia. Este (a, r) agregado *no* es el código local $a = \nu_2(3g+1)$, $r = \nu_2(S(g)+1)-1$ de Fundamentos: reutilizamos las letras por comodidad, pero aquí designan el bloque completo de Syracuse, no el paso en una sola columna. En adelante, (a, r) es siempre el código agregado.

Con esta convención, el bloque de código (a, r) opera afínmente sobre la columna de entrada:

$$\Phi_{(a,r)}(x) = \frac{3^a(x+1) - 2^a}{2^r} = \frac{3^a x + \big(3^a - 2^a\big)}{2^r} = P\,x + Q, \qquad P = \frac{3^a}{2^r}, \quad Q = \frac{3^a - 2^a}{2^r}. \tag{1}$$

Un bloque tiene, por definición, al menos una triplicación ($a \geq 1$) y al menos una división ($r \geq 1$). La desigualdad $r \geq a+1$ —caída final por un factor $\geq 2^2$— *no* es automática: expresa que el bloque es un *circuito* en el sentido de Steiner. La usaremos sólo como refinamiento, cuando la estructura de columna mínima de [1] la garantice; los resultados centrales (§§4–6) descansan únicamente sobre $a \geq 1$, $r \geq 1$.

En esta convención, el punto fijo de R tiene columna

$$x_* = \frac{3^a - 2^a}{2^r - 3^a}, \tag{2}$$

con la horquilla $3^a < 2^r < 2 \cdot 3^a$, y su única solución admisible es la trivial.

3. Los 2-ciclos como 2-órbitas de R

Consideremos dos columnas mínimas distintas $x_0 \neq x_1$ enlazadas por

$$R(x_0) = x_1, \qquad R(x_1) = x_0.$$

Tal configuración es una órbita periódica de R de longitud dos; la llamamos un *2-ciclo*. Leída sobre los códigos, es una palabra de dos bloques

$$w = (a_1, r_1)(a_2, r_2),$$

determinada salvo rotación cíclica. Fijamos la normalización $x_0 = \min\{x_0, x_1\}$, que selecciona un representante de la clase de rotación.

Observación 1. La exigencia $x_0 \neq x_1$ es esencial: sin ella la palabra $(a, r)(a, r)$ con $x_0 = x_1$ reproduce el punto fijo (2) y no constituye un 2-ciclo genuino. En el grafo funcional G_R, un 2-ciclo es un 2-lazo propio, distinto de un lazo en un vértice.[1]

4. La ecuación de cierre

Compongamos los dos bloques. Con $\Phi_i = P_i\, x + Q_i$ según (1), la vuelta completa desde x_0 es $\Phi_2 \circ \Phi_1$, de parte lineal y término independiente

$$P = P_1 P_2 = \frac{3^A}{2^D}, \qquad Q = P_2 Q_1 + Q_2, \qquad A := a_1 + a_2, \quad D := r_1 + r_2.$$

El cierre $x_0 = P x_0 + Q$ da $x_0 = Q/(1 - P)$; limpiando denominadores:

Proposición 1 (Ecuación de cierre del 2-ciclo)**.** *La columna mínima de un 2-ciclo de código* $(a_1, r_1)(a_2, r_2)$ *es*

$$x_0 = \frac{N}{2^D - 3^A}, \qquad N := 3^{a_2}\big(3^{a_1} - 2^{a_1}\big) + 2^{r_1}\big(3^{a_2} - 2^{a_2}\big), \tag{3}$$

y su compañera $x_1 = R(x_0)$ *es la expresión simétrica bajo* $1 \leftrightarrow 2$*,*

$$x_1 = \frac{N'}{2^D - 3^A}, \qquad N' := 3^{a_1}\big(3^{a_2} - 2^{a_2}\big) + 2^{r_2}\big(3^{a_1} - 2^{a_1}\big). \tag{4}$$

El numerador N *es suma de dos términos estrictamente positivos, pues* $3^a > 2^a$ *para* $a \geq 1$*.*

Observación 2. La ecuación de cierre tiene la misma forma que en el punto fijo (2): un cociente cuyo denominador es una diferencia $2^{(\cdot)} - 3^{(\cdot)}$. Es su versión de dos bloques.

[1] Cotéjese esta lectura con la definición de lazo del escrito del grafo funcional del Capítulo 50.

5. Reducción a una divisibilidad

Como en el punto fijo, el numerador se elimina por una condición aritmética.

Los tres apartados que siguen caracterizan cuándo la composición $\Phi_2 \circ \Phi_1$ tiene un punto fijo entero positivo con la normalización elegida. Llamamos a tal configuración un *candidato algebraico* de 2-ciclo: es un punto periódico de la composición afín, no necesariamente una órbita de R.

Proposición 2 (Reducción del candidato algebraico)**.** *Existe un candidato algebraico de* 2*-ciclo de código* $(a_1, r_1)(a_2, r_2)$ *si y sólo si*

(i) $2^D > 3^A$ *(positividad),*

(ii) $\left(2^D - 3^A\right) \mid N$ *(integridad),*

(iii) $N < N'$ *(orden y no degeneración).*

Para que el candidato sea un 2*-ciclo real de* R *debe además satisfacer las condiciones de admisibilidad de la Sección* 7*.*

Observación 3 (Ruptura de la simetría)*.* Como el denominador $m := 2^D - 3^A > 0$ es común a (3) y (4), la normalización $x_0 = \min\{x_0, x_1\}$ junto con $x_0 \neq x_1$ equivale a $N < N'$. Esta desigualdad rompe la simetría $1 \leftrightarrow 2$: de cada par de códigos espejo $(a_1, r_1)(a_2, r_2)$ y $(a_2, r_2)(a_1, r_1)$ sobrevive exactamente uno.

Observación 4 (Consistencia 2-ádica)*.* El denominador m es impar. Cada factor $3^{a_i} - 2^{a_i}$ es impar y, como $r_1 \geq 1$,

$$N = \underbrace{3^{a_2}\left(3^{a_1} - 2^{a_1}\right)}_{\text{impar}} + \underbrace{2^{r_1}\left(3^{a_2} - 2^{a_2}\right)}_{\text{par}} \quad \text{es impar.}$$

Luego $\mathrm{v}_2(x_0) = 0$: las columnas mínimas son impares. La condición (ii) es, pues, compatible con la estructura 2-ádica sin imponer nada por valuación; el contenido reside en las clases módulo potencias mayores de 2.

6. La reducción por niveles

Este es el eje del escrito. La divisibilidad (i)–(iii) no se resuelve de golpe, pero se *estratifica*: agrupada por el nivel $A = a_1 + a_2$, cada nivel resulta un problema finito y cerrado. La clave es que A acota los exponentes.

Proposición 3 (Acotación por nivel)**.** *En todo candidato de* 2*-ciclo (con* $a_i \geq 1$*,* $r_i \geq 1$*),*

$$2^{r_2} \leq 3^A + 3^{a_2}, \qquad 2^{r_1} \leq 3^A + 3^{a_1}. \tag{5}$$

Demostración. De $x_0 \geq 1$ y (3) se sigue $2^{r_1}2^{r_2} \leq N + 3^A$. Ahora

$$N + 3^A = 2 \cdot 3^A - 3^{a_2}2^{a_1} + 2^{r_1}\left(3^{a_2} - 2^{a_2}\right).$$

Dividiendo por $2^{r_1} \geq 2$ y descartando términos negativos,

$$2^{r_2} \leq \frac{2 \cdot 3^A}{2^{r_1}} + 3^{a_2} - 2^{a_2} \leq 3^A + 3^{a_2}.$$

La otra desigualdad es idéntica partiendo de $x_1 \geq 1$ y (4). □

Corolario 1 (Finitud por nivel)**.** *Para cada A hay finitas particiones $A = a_1 + a_2$ y, por* (5)*, finitas elecciones de (r_1, r_2). El conjunto de* candidatos *del nivel A es, pues, finito y efectivamente computable, y las condiciones (i)–(iii) se comprueban en él directamente.*

Observación 5 (Qué es y qué no es nuevo). La finitud del conjunto de ciclos de longitud acotada es clásica: se remonta a la parametrización de Böhm y Sontacchi [3], y sostiene por debajo a los trabajos de Steiner, Crandall y Simons. Nuestra aportación no es esa finitud, sino su *empaquetado a través de R*: la ecuación de cierre (3) y la acotación (5) dan una reducción por niveles autocontenida y explícita del conjunto de candidatos, sobre la que las cribas de §6.1 y §7 operan directamente.

Ejemplo 1 (El nivel $A = 2$)**.** Con $a_1 = a_2 = 1$, la cota (5) da $2^{r_i} \le 3^2 + 3 = 12$, luego $r_i \in \{1, 2, 3\}$; la positividad $2^D > 9$ exige $D \ge 4$. Como $N = 3 + 2^{r_1}$ y $N' = 3 + 2^{r_2}$, la condición $N < N'$ deja $r_1 < r_2$. Un barrido de los pocos pares admisibles no produce ningún candidato con $x_0 \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$: el nivel $A = 2$ no aporta 2-ciclos. Los niveles $A = 3, 4, \ldots$ se recorren igual con el Corolario 1.

6.1. Criba modular

Antes de la división exacta $m \mid N$ conviene un filtro por congruencias, mucho más barato. Para todo primo $p \mid m$ es necesario $p \mid N$; basta un p con $N \not\equiv 0 \pmod p$ para descartar el código sin dividir.

La versión estructural aprovecha los órdenes. Sea $p \nmid 6$ y sean $d_2 = \mathrm{ord}_p(2)$, $d_3 = \mathrm{ord}_p(3)$. Entonces

$$p \mid m \iff 2^D \equiv 3^A \pmod p,$$

condición sobre ($D \bmod d_2$, $A \bmod d_3$). Fijadas esas clases, $p \mid N$ se traduce en una condición sobre (a_i, r_i) módulo los órdenes; su incompatibilidad elimina familias enteras de códigos de un golpe. Es la lectura de $N \pmod m$ como sistema de congruencias parciales en r_1, r_2.

7. De candidato a 2-ciclo: la criba de admisibilidad

La Proposición 2 produce un candidato; esta sección decide cuándo el candidato es órbita de R. La divisibilidad $m \mid N$ sólo garantiza la existencia *algebraica* del punto periódico de la composición $\Phi_2 \circ \Phi_1$. Para que sea un 2-ciclo real de R, ambos valores x_0, x_1 deben ser enteros positivos admisibles y *reproducir exactamente los códigos asignados*. Estas condiciones constituyen una segunda criba, más fina que la divisibilidad.

Conviene deslindar qué añade y qué no. La integralidad de x_1 *no* es una condición extra: de $x_1 = \Phi_1(x_0)$ se obtiene la identidad

$$2^{r_1} N' = 3^{a_1} N + m\,(3^{a_1} - 2^{a_1}), \tag{6}$$

verificable directamente sobre las definiciones de N, N', m. Como m es impar, $\gcd(2^{r_1}, m) = 1$, y por tanto $m \mid N \iff m \mid N'$: exigir que x_1 sea entero no aporta nada. El contenido nuevo es de *valuación*. La forma afín (1), con constante $3^a - 2^a$, codifica el patrón de circuito —divisiones internas iguales a 1 salvo la última—; realizar el código (a, r) desde una entrada dada fija, por tanto, las valuaciones de la trayectoria real.

Proposición 4 (Realización, primer paso)**.** *Sea* $(a_1, r_1)(a_2, r_2)$ *un código que cumple* (i)–(iii)*. Para que* x_0, x_1 *formen un* 2*-ciclo de* R *con esos códigos es necesario que*

$$\mathrm{v}_2(3x_0+1) = \begin{cases} 1, & a_1 \geq 2, \\ r_1, & a_1 = 1, \end{cases} \qquad \mathrm{v}_2(3x_1+1) = \begin{cases} 1, & a_2 \geq 2, \\ r_2, & a_2 = 1. \end{cases}$$

En el caso $a_i \geq 2$ *esto equivale a* $x_{i-1} \equiv 3 \pmod 4$*; en el caso* $a_i = 1$*, a* $3x_{i-1}+1 \equiv 2^{r_i} \pmod{2^{r_i+1}}$ (*índices mód* 2)*.*

Observación 6. La criba de admisibilidad es estrictamente más fuerte que la divisibilidad: un código puede superar $m \mid N$ y aun así producir un x_0 con $\mathrm{v}_2(3x_0+1) \neq a_1$, en cuyo caso el punto periódico algebraico no es órbita de R. Iterando las divisiones internas del circuito, las congruencias de la Proposición 4 se extienden hasta fijar x_0 y x_1 módulo una potencia de 2 explícita, que debe casar con los valores $x_0 = N/m$, $x_1 = N'/m$. Todo ello es de nuevo local en A: refina y acelera cada nivel, pero *no* acota A. El cierre global sigue requiriendo el ingrediente externo de la §8.

8. Estado del problema

El presente marco reduce la búsqueda de 2-ciclos a una familia de problemas finitos indexados por A. Las cribas desarrolladas en este escrito resuelven completamente cada nivel. Lo único que el método no proporciona es una cota global para A; sin ella, la sucesión de niveles no termina.

La inexistencia de 2-ciclos no triviales fue demostrada por Simons (2005) [4] mediante un enfoque diferente, basado en formas lineales en logaritmos. El presente trabajo no reproduce esa demostración; su aportación consiste en reformular el problema en el lenguaje del mapa de retorno verde y localizar con precisión el único punto donde el método necesita una información que no proporciona por sí mismo.

El mismo reparto —criba elemental completa, más una única cota externa que garantiza su terminación— gobierna el escrito del punto fijo, y da unidad a esta parte del capítulo.

9. Nota numérica

La reducción por niveles se implementa como cuatro filtros encadenados: para cada A se generan las particiones $a_1 + a_2 = A$; se recorren los (r_1, r_2) admisibles por (5); se aplica el orden $N < N'$ y la positividad $2^D > 3^A$; se pasa la criba modular de §6.1; y sobre los supervivientes se comprueba $m \mid N$ y la admisibilidad de §7.

Ejecutado el barrido para $2 \leq A \leq 50$, ningún nivel contiene un 2-ciclo real. Bajo la sola hipótesis $a_i, r_i \geq 1$, sobrevive a la divisibilidad un único candidato algebraico —el de código $(5,1)(2,11)$, con $x_0 = 1$—, que la criba de admisibilidad descarta por no realizar su código; imponiendo además la condición de circuito $r_i \geq a_i + 1$, no sobrevive ninguno. Todo ello en concordancia con el resultado de Simons [4].

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Fundamentos del mapa de retorno verde*, collatz.es, Cap. 50.

[2] M. Cerdá Bennassar, *El punto fijo del mapa de retorno verde*, collatz.es, Cap. 50.

[3] C. Böhm, G. Sontacchi, *On the existence of cycles of given length in integer sequences like* $x_{n+1} = x_n/2$ *if* x_n *even, and* $x_{n+1} = 3x_n + 1$ *otherwise*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **64** (1978), 260–264.

[4] J. L. Simons, *On the nonexistence of* 2*-cycles for the* $3x + 1$ *problem*, Math. Comp. **74** (2005), no. 251, 1565–1572.