Los k-ciclos del mapa de retorno verde: la reducción por niveles y la horquilla generalizada de Steiner

Miguel Cerdá Bennassar
collatz.es

Julio de 2026

Resumen

Para todo k, el problema de los k-ciclos del mapa de retorno verde se reduce por niveles, según $A = \sum a_i$, a una criba finita y elemental. La herramienta es una horquilla generalizada de Steiner, $3^A < 2^D < 2^k 3^A$, cuya anchura logarítmica es exactamente k: se demuestra por un producto de las relaciones de columna, sin transcendencia, y unifica la serie —en $k = 1$ es la horquilla del punto fijo—. Lo que el marco no proporciona es una cota *a priori* sobre A, que acotaría $k \le A$ y D y haría finita la unión sobre los niveles; los resultados conocidos la aportan fijando k (Steiner para $k = 1$, Simons para $k = 2$, Simons–de Weger para $k \le 68$), y para k arbitrario permanece abierta. Es una reducción, no una solución.

1. Recordatorio y alcance

El mapa de retorno verde R actúa sobre las columnas mínimas del sistema de tramos [1]. Su grafo funcional G_R traduce el problema de los ciclos de Collatz en el de sus bucles [2]: un bucle de longitud k es un k-ciclo de R. El caso $k = 1$ —el punto fijo— quedó resuelto por vía de Steiner en [3]; el caso $k = 2$ se trató en [4], reduciéndolo por niveles a una criba finita y situando el cierre externo en el teorema de Simons.

Este escrito extiende la reducción a longitud arbitraria. Conviene decirlo desde el principio: no cierra el caso general —nadie lo hace—, sino que unifica los tres casos bajo una misma reducción por niveles y localiza con precisión la frontera donde el método necesita un ingrediente externo.

2. Convención de código

Agrupamos los pasos de R entre dos columnas mínimas consecutivas en un único *bloque*, descrito por su código *agregado*

$$(a, r) = \big(\text{n.}^{\text{o}} \text{ de triplicaciones},\ \text{n.}^{\text{o}} \text{ total de divisiones}\big)$$

a lo largo del bloque.

Advertencia. Este (a, r) agregado *no* es el código local $a = \nu_2(3g+1)$, $r = \nu_2(S(g)+1)-1$ de Fundamentos: reutilizamos las letras por comodidad, pero aquí designan el bloque completo de Syracuse, no el paso en una sola columna. En adelante, (a, r) es siempre el código agregado.

Con esta convención, el bloque de código (a, r) opera afínmente sobre la columna de entrada:

$$\Phi_{(a,r)}(x) = \frac{3^a(x+1) - 2^a}{2^r} = \frac{3^a x + (3^a - 2^a)}{2^r} = P\,x + Q, \qquad P = \frac{3^a}{2^r}, \quad Q = \frac{3^a - 2^a}{2^r}. \tag{1}$$

Un bloque tiene, por definición, $a \geq 1$ y $r \geq 1$. La desigualdad $r \geq a + 1$ —caída final por un factor $\geq 2^2$— expresa que el bloque es un circuito en el sentido de Steiner; no es automática y la usamos sólo como refinamiento, no en el camino crítico.

3. Los k-ciclos como k-órbitas de R

Una *palabra* de k bloques $(a_1, r_1) \cdots (a_k, r_k)$, determinada salvo rotación cíclica, describe una órbita periódica de R de longitud k cuando sus columnas cierran. La palabra es *primitiva* si no es potencia propia de una más corta; en otro caso el objeto es un ciclo más corto recorrido varias veces, y no un k-ciclo genuino.

Las columnas $x_0, \ldots, x_{k-1}$ —enteros positivos— satisfacen

$$x_i = \Phi_{(a_i, r_i)}(x_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, k), \qquad x_k = x_0.$$

Escribimos las sumas parciales de los exponentes

$$A_i = a_1 + \cdots + a_i \ (A_0 = 0,\ A_k = A), \qquad R_i = r_1 + \cdots + r_i \ (R_0 = 0,\ R_k = D).$$

Entre las k rotaciones fijamos la normalización $x_0 = \min_j x_j$.

Observación 1. En el grafo funcional G_R, un k-ciclo es un k-lazo. El punto fijo ($k = 1$) y los 2-ciclos ($k = 2$) son sus casos ya tratados en el capítulo; aquí se estudia el lazo de longitud arbitraria.

4. La ecuación de cierre

La composición $\Phi_k \circ \cdots \circ \Phi_1$ es afín, de pendiente $P = \prod_i P_i = 3^A/2^D$ y constante $Q_c = \sum_i Q_i \prod_{j>i} P_j$. Su punto fijo, limpiando denominadores, es:

Proposición 1 (Ecuación de cierre, Böhm–Sontacchi)**.** *La columna inicial de un k-ciclo de código $(a_1, r_1) \cdots (a_k, r_k)$ es*

$$x_0 = \frac{N}{2^D - 3^A}, \qquad N = \sum_{i=1}^{k} 3^{\,A - A_i}\, 2^{\,R_{i-1}} \left(3^{a_i} - 2^{a_i}\right). \tag{2}$$

Cada término de N es estrictamente positivo, pues $3^{a_i} > 2^{a_i}$ para $a_i \geq 1$; en particular $N > 0$. Las restantes columnas x_j son los puntos fijos de las k rotaciones de la palabra, con idéntica forma.

Observación 2. Para $k = 1$, (2) es $x_0 = (3^{a_1} - 2^{a_1})/(2^{r_1} - 3^{a_1})$, la ecuación del punto fijo; para $k = 2$ reproduce la del escrito de 2-ciclos. La forma es la misma en toda la serie: un cociente de denominador $2^D - 3^A$.

5. Reducción a una divisibilidad

El numerador se elimina por una condición aritmética.

Proposición 2 (Reducción al candidato algebraico)**.** *Sea la palabra $(a_1, r_1)\cdots(a_k, r_k)$ primitiva. Su composición tiene punto fijo entero positivo $x_0 = N/(2^D - 3^A)$ —un* candidato algebraico *de k-ciclo— si y sólo si*

(i) $2^D > 3^A$ *(positividad);*

(ii) $\left(2^D - 3^A\right) \mid N$ *(integridad).*

Que el candidato sea un k-ciclo real de R —con todas sus columnas rotadas enteras positivas y realizando sus códigos— se decide por la admisibilidad de la §7; entre las k rotaciones se normaliza $x_0 = \min_j x_j$.

Observación 3 (Consistencia 2-ádica). El denominador $m = 2^D - 3^A$ es impar. En N, el término $i = 1$ (con $R_0 = 0$) es $3^{A-A_1}(3^{a_1} - 2^{a_1})$, impar; los términos $i \geq 2$ llevan factor $2^{R_{i-1}}$ con $R_{i-1} \geq r_1 \geq 1$, y son pares. Luego N es impar, y x_0 tiene numerador y denominador impares: $\mathrm{v}_2(x_0) = 0$, en concordancia con que las columnas mínimas son impares.

6. La reducción por niveles

Este es el eje del escrito, y su parte incondicional. La divisibilidad (i)–(ii) se estratifica por el nivel $A = \sum a_i$, y cada nivel resulta un problema *finito* por una única desigualdad elemental que además unifica toda la serie.

Teorema 1 (Horquilla generalizada)**.** *Todo k-ciclo del mapa de retorno verde satisface*

$$3^A \;<\; 2^D \;<\; 2^k\, 3^A, \qquad \textit{equivalentemente} \qquad A\log_2 3 \;<\; D \;<\; A\log_2 3 + k. \tag{3}$$

Demostración. Cota superior. De la relación de columna $x_i = \Phi_{(a_i,r_i)}(x_{i-1})$, multiplicando (1) por 2^{r_i}, se obtiene la identidad

$$2^{r_i} x_i = 3^{a_i}(x_{i-1} + 1) - 2^{a_i}.$$

Como $2^{a_i} > 0$, se sigue la desigualdad estricta

$$2^{r_i} x_i < 3^{a_i}(x_{i-1} + 1),$$

de miembros positivos ($x_i \geq 1$, $x_{i-1} + 1 \geq 2$). Multiplicando las k desigualdades (índices mód k):

$$\prod_{i=1}^{k} 2^{r_i} x_i \;<\; \prod_{i=1}^{k} 3^{a_i}(x_{i-1} + 1).$$

El primer miembro es $2^D \prod_{j=0}^{k-1} x_j$. En el segundo, al recorrer $i = 1, \ldots, k$ el índice $i-1$ recorre $0, \ldots, k-1$, y $\prod_{i=1}^{k} x_i = \prod_{j=0}^{k-1} x_j$ por ser $x_k = x_0$; luego ambos productos son sobre el mismo conjunto de columnas:

$$2^D \prod_{j=0}^{k-1} x_j \;<\; 3^A \prod_{j=0}^{k-1} (x_j + 1).$$

Dividiendo por $3^A \prod_j x_j > 0$,

$$\frac{2^D}{3^A} \;<\; \prod_{j=0}^{k-1}\Big(1+\tfrac{1}{x_j}\Big) \;\le\; 2^k,$$

donde la última desigualdad usa $x_j \ge 1$. Por tanto $2^D < 2^k 3^A$.

Cota inferior. La constante de $\Phi_k \circ \cdots \circ \Phi_1$ es $Q_c = N/2^D$ con $N > 0$ por la Proposición 1, luego $Q_c > 0$. Como $x_0 = Q_c/(1-P)$ con $P = 3^A/2^D$ y $x_0 > 0$, ha de ser $1 - P > 0$, esto es $2^D > 3^A$. □

Observación 4. En $k = 1$, (3) es $3^A < 2^D < 2 \cdot 3^A$: la horquilla de Steiner del punto fijo. El teorema la extiende a longitud arbitraria, y su anchura logarítmica es exactamente k.

Corolario 1 (Finitud por nivel)**.** *Para cada A, como cada $a_i \ge 1$, todo k-ciclo cumple $k \le A$ y, por* (3)*, D en el intervalo abierto $(A\log_2 3,\, A\log_2 3 + k)$, que contiene a lo sumo k enteros. En consecuencia hay finitos códigos por nivel: a lo sumo k valores de D, y para cada terna (A, D, k) finitas composiciones de A y de D en k partes. La divisibilidad (ii) se comprueba en ese conjunto por división directa.*

Observación 5 (Qué es y qué no es nuevo)*.* La finitud de los ciclos de longitud acotada es clásica (Böhm–Sontacchi; Crandall). Nuestra aportación es la forma elemental unificada de la horquilla (3): una única desigualdad, probada por un producto de las relaciones de columna, válida para todo k y que recupera a Steiner en $k = 1$. La criba modular y la de admisibilidad del escrito de 2-ciclos operan igual sobre cada nivel.

Observación 6 (La diagonal $k = A$ y el exceso de valuación)*.* El caso extremo $k = A$ —todos los bloques atómicos, $a_i = 1$— es el de circuitos de una sola triplicación: cada bloque hace un único paso, necesariamente con $r_i \ge 2$, de modo que la órbita permanece en $\mathcal{C}_{\ge 2}$. En esa diagonal, la reducción por niveles queda superada por un resultado más fuerte. El argumento del *exceso de valuación* del Capítulo 35 [5], aplicado a la ecuación estructural de estos ciclos atómicos, fuerza $D = 2A$ —esto es, exceso $E := D - 2A = 0$— y deja como único ciclo el trivial $x_0 = 1$. Es estrictamente más fuerte que la horquilla: donde (3) sólo acota E por debajo de $(\log_2 3 - 1)\,A$, el exceso lo anula. En consecuencia, la reducción por niveles sólo necesita recorrer $k < A$; la diagonal $k = A$ está cerrada de antemano e incondicionalmente por el Capítulo 35: el exceso cierra $k = A$, la horquilla cubre todo $k < A$.

7. Admisibilidad: de candidato a k-ciclo

La divisibilidad de la Proposición 2 produce un candidato: $x_0 = N/m$ entero positivo, punto fijo de la composición. Para que sea un k-ciclo real de R, cada columna debe ser entera positiva y *realizar* exactamente el código de su bloque.

Aquí aparece una diferencia genuina con $k = 2$. En dos bloques, la integralidad de una columna arrastra la de la otra; en k bloques ya no: que x_0 sea entero no hace enteras las columnas rotadas $x_1, \ldots, x_{k-1}$. Esa integralidad, junto con la realización, es una condición 2-*ádica*.

Realizar el código (a, r) desde una entrada x equivale a que x pertenezca a una clase de residuo determinada módulo 2^{r+1}: es la correspondencia del vector de paridad (Terras, Everett; Lagarias [8, 9]), en su forma agregada por circuitos. Como cada columna $x_j = N^{(j)}/m$ está

ya determinada por la palabra, la admisibilidad se reduce a un *sistema finito de congruencias 2-ádicas*, una por bloque: comprobar que cada x_j cae en la clase realizadora del código (a_{j+1}, r_{j+1}).

Observación 7. La admisibilidad es estrictamente más fuerte que la divisibilidad, y de nuevo local en A: refina y completa cada nivel, pero no acota A. El cierre global sigue requiriendo el ingrediente externo de la §8.

8. Estado del problema

Para cada par fijo (k, A), el marco reduce la búsqueda de k-ciclos a una criba finita y elemental: la horquilla (3) garantiza finitos candidatos, y las cribas de divisibilidad y admisibilidad los resuelven. La inexistencia de k-ciclos no triviales equivale, pues, a que ningún nivel contenga un código admisible, para ningún k.

El único ingrediente que el marco no proporciona es una cota *a priori* sobre A, el número total de triplicaciones. Acotado A, la horquilla acota $k \leq A$ y D, y la unión sobre los niveles se hace finita; acotar sólo k no bastaría, pues para k fijo el nivel A puede crecer sin límite. Es el mismo hueco que en el punto fijo y en los 2-ciclos, ahora enunciado para toda la serie.

Ese ingrediente externo está disponible sólo parcialmente, y los resultados conocidos proceden fijando k y acotando entonces A mediante formas lineales en logaritmos: Steiner (1977) para $k = 1$, Simons (2005) para $k = 2$, Simons y de Weger (2005) para $k \leq 68$. Para k arbitrario —y por tanto sin cota uniforme sobre A— permanece *abierto*. El presente trabajo no reproduce esas demostraciones ni las extiende; su aportación es reformular el problema en el lenguaje del mapa de retorno verde y localizar con precisión el único punto donde el método necesita una información que no proporciona por sí mismo: la acotación de los parámetros globales del ciclo.

Observación 8 (Unidad de la serie). El mismo reparto —criba elemental completa por nivel, más una única cota externa que garantiza su terminación— gobierna los tres escritos de ciclos del capítulo. La horquilla (3) es la forma común de esa criba; la cota sobre A, el ingrediente común que descansa fuera del marco.

9. Nota numérica

La reducción por niveles se implementa recorriendo también k. Para cada nivel A: se toma $k = 1, \ldots, A$; para cada k, los valores de D en el intervalo $(A \log_2 3,\ A \log_2 3 + k)$; las composiciones de A y de D en k partes (en la versión refinada de la criba, imponiendo además $r_i \geq a_i + 1$); y sobre los códigos resultantes se aplican la positividad, la primitividad, la criba modular (idéntica a la del escrito de 2-ciclos [4]), la divisibilidad $m \mid N$ y la admisibilidad de la §7. Ejecutado para $1 \leq A \leq 10$ y todo $k \leq A$, el único k-ciclo que aparece es el trivial $(k = 1,\ x_0 = 1)$: ningún código admisible no trivial sobrevive, en concordancia con Steiner, Simons y Simons–de Weger. El coste crece con el nivel —lo domina el caso $k = A$ de bloques unitarios, los m-ciclos clásicos de Syracuse, que por lo demás queda cerrado analíticamente por el exceso de valuación (Observación 6)—, de modo que el recorrido completo sobre todo k es una comprobación ilustrativa; el peso demostrativo lo llevan la horquilla del Teorema 1 y la cota $k \leq 68$ de Simons–de Weger.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Fundamentos del mapa de retorno verde en el problema de Collatz*, collatz.es, Cap. 50.

[2] M. Cerdá Bennassar, *El grafo funcional de las columnas mínimas*, collatz.es, Cap. 50.

[3] M. Cerdá Bennassar, *El punto fijo del mapa de retorno verde: reducción a una desigualdad diofántica y los circuitos de Steiner*, collatz.es, Cap. 50.

[4] M. Cerdá Bennassar, *Los 2-ciclos del mapa de retorno verde*, collatz.es, Cap. 50.

[5] M. Cerdá Bennassar, *Estructura 2-ádica y régimen rígido en la dinámica de Collatz*, collatz.es, Cap. 35 (2026).

[6] R. P. Steiner, *A theorem on the Syracuse problem*, Proc. 7th Manitoba Conf. Numer. Math. (1977), 553–559.

[7] C. Böhm, G. Sontacchi, *On the existence of cycles of given length in integer sequences like* $x_{n+1} = x_n/2$ *if* x_n *even, and* $x_{n+1} = 3x_n + 1$ *otherwise*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **64** (1978), 260–264.

[8] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. **30** (1976), 241–252.

[9] J. C. Lagarias, *The* $3x + 1$ *problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.

[10] J. L. Simons, *On the nonexistence of* 2*-cycles for the* $3x + 1$ *problem*, Math. Comp. **74** (2005), 1565–1572.

[11] J. L. Simons, B. M. M. de Weger, *Theoretical and computational bounds for* m*-cycles of the* $3n + 1$ *problem*, Acta Arith. **117** (2005), 51–70.