Collatz e indecidibilidad

II. Secciones de origen único y funciones de tipo primo relativo

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

En el escrito I de este programa se propuso la idea de que la función de Collatz tiene *dos orígenes*, los puntos fijos 0 y -1 de sus dos ramas, frente al origen único de los programas FRACTRAN de Conway, y se planteó si esa diferencia podía obstruir la universalidad (Problemas 9.3 y 9.4). Este escrito resuelve la cuestión en su forma original de manera negativa: se construye, a partir de cualquier programa FRACTRAN, una función tipo Collatz equivalente cuyas ramas tienen puntos fijos distintos y se alternan en cada paso (Teorema 3.2). La idea sobrevive, sin embargo, en una forma más precisa: la construcción anterior admite una *sección de origen único*, un conjunto de clases de restos en el que la aplicación de primer retorno tiene un solo punto fijo común. Se demuestra que ninguna función de tipo primo relativo, en el sentido de Möller, Matthews y Watts, admite una sección de ese tipo (Teorema 5.7). Esta clase contiene la función de Collatz acelerada y todas las funciones $qx+1$ con q impar. La pregunta de si la clase de tipo primo relativo contiene funciones universales queda abierta y sustituye a las dos anteriores.

1. Introducción

En el escrito I [1] se observó que toda rama afín $x \mapsto ax+b$ con $a \neq 1$ tiene un único punto fijo, $b/(1-a)$, al que llamamos su *origen*; que las ramas de un programa FRACTRAN comparten el origen 0; y que las dos ramas de la función de Collatz acelerada

$$T(x) = \begin{cases} x/2, & x \text{ par}, \\ (3x+1)/2, & x \text{ impar}, \end{cases}$$

tienen orígenes distintos, 0 y -1. Se preguntó si la presencia de varios orígenes, usados de forma entrelazada, podía impedir la universalidad.

La Sección 3 muestra que no, al menos a nivel de ramas. La Sección 4 identifica lo que la construcción no puede ocultar: una sección con aplicación de retorno de origen único. La Sección 5 demuestra que las funciones de tipo primo relativo carecen de tales secciones. La Sección 6 reúne las consecuencias y formula la nueva pregunta.

2. Preliminares

Definición 2.1. Una *función tipo Collatz* de módulo m es una aplicación $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que, en cada clase $x \equiv i \pmod m$, $g(x) = a_i x + b_i$ con $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Llamamos *ramas* a las aplicaciones afines $x \mapsto a_i x + b_i$. Si $a_i \neq 1$, el *origen* de la rama es su punto fijo $b_i/(1-a_i)$.

Una composición de ramas es de nuevo afín, y tiene un único punto fijo racional si su coeficiente es distinto de 1.

Definición 2.2. Sea $S \subseteq \mathbb{Z}$ una unión no vacía de clases de restos. Para $x \in S$, sea $\tau_S(x) = \min\{t \geq 1 : g^t(x) \in S\}$, si existe. La *aplicación de primer retorno* es $R_S(x) = g^{\tau_S(x)}(x)$. Si x recorre las clases $i_0, i_1, \ldots, i_{\tau-1}$ antes de volver, R_S coincide en x con la composición afín de las ramas correspondientes; a cada composición que se realiza así para algún $x \in S$ la llamamos *rama de retorno*.

Definición 2.3. Una *sección de origen único* de g es una unión no vacía S de clases de restos tal que todas las ramas de retorno de R_S tienen coeficiente distinto de 1 y el mismo origen.

Ejemplo 2.4. Todo programa FRACTRAN, visto como función tipo Collatz, tiene a $S = \mathbb{Z}$ como sección de origen único: todas sus ramas son de la forma $x \mapsto fx$ y fijan el 0.

3. Universalidad con varios orígenes por rama

Sea $P = (f_1, \ldots, f_r)$ un programa FRACTRAN, con $f_j \neq 1$, y sea m el mínimo común múltiplo de los denominadores. Escribimos $P(N)$ para el resultado de un paso de P sobre N, si alguna fracción es aplicable.

Definición 3.1 (Función en dos fases)**.** Definimos $g_P \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ por

$$g_P(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \equiv 0 \pmod 4, \\ \dfrac{f_j}{2}(x-1), & x \equiv 1 \pmod 8 \text{ y } f_j \text{ aplicable}, \\ x, & \text{en los demás casos}, \end{cases}$$

donde, en el segundo caso, f_j es la primera fracción de P aplicable a $N = (x-1)/8$. Llamamos *fase A* a la clase $x \equiv 0 \pmod 4$ y *fase B* a la clase $x \equiv 1 \pmod 8$.

Teorema 3.2. *1. g_P es una función tipo Collatz de módulo $8m$.*

2. *Para todo $N \in \mathbb{Z}$, si $P(N)$ está definido, entonces $g_P^2(4N) = 4P(N)$. En consecuencia, para todos N, N', la órbita de N por P alcanza N' si y solo si la órbita de $4N$ por g_P alcanza $4N'$.*

3. *La rama de la fase A tiene origen -1. La rama de la fase B asociada a f_j tiene origen $f_j/(f_j-2)$ si $f_j \neq 2$, y es una traslación sin punto fijo si $f_j = 2$. Ninguna rama de la fase B tiene origen -1, y fracciones distintas dan orígenes distintos.*

4. *$S_A = 4\mathbb{Z}$ es una sección de origen único de g_P, con ramas de retorno $x \mapsto f_j x$.*

Demostración. (1) La fase de x depende de x mód 8, y en la fase B la fracción aplicable depende de N mód m, es decir, de x mód $8m$.

(2) Si $x = 4N$, entonces $g_P(x) = 8N+1$, que está en la fase B. Después,

$$g_P(8N+1) = \tfrac{f_j}{2} \cdot 8N = 4f_jN = 4P(N),$$

que es un múltiplo de 4 porque $f_jN \in \mathbb{Z}$. Por inducción, las órbitas se corresponden paso a paso, con un paso de P por cada dos de g_P.

(3) El punto fijo de $x \mapsto 2x+1$ es -1. La rama $x \mapsto c(x-1)$ con $c = f_j/2 \neq 1$ tiene punto fijo $c/(c-1) = f_j/(f_j-2)$. La igualdad $f_j/(f_j-2) = -1$ equivale a $f_j = 1$, excluido. La aplicación $f \mapsto f/(f-2)$ es inyectiva.

(4) Todo $x \in 4\mathbb{Z}$ es de la forma $4N$. Si alguna fracción es aplicable a N, la excursión es $4N \mapsto 8N+1 \mapsto 4f_jN$, y la rama de retorno es $x \mapsto f_jx$, de origen 0. Si ninguna es aplicable, $8N+1$ es un punto fijo de g_P y no hay retorno. Los puntos de $4\mathbb{Z}$ no pasan por las clases del tercer caso. □

Corolario 3.3. *Existen funciones tipo Collatz universales cuyas ramas tienen varios orígenes distintos y se alternan en cada paso de toda órbita que codifica una computación. En particular, la existencia de varios orígenes a nivel de ramas no es una obstrucción a la universalidad.*

Demostración. Basta aplicar el Teorema 3.2 a un programa FRACTRAN universal [2, 3]. □

Ejemplo 3.4 (PRIMEGAME en dos fases)**.** Para el programa PRIMEGAME de Conway [3, 1], la función g_P tiene módulo $8 \cdot 6\,469\,693\,230$ y quince orígenes distintos: -1 y los catorce valores $f_j/(f_j - 2)$, entre ellos $-17/165$ (para $f = 17/91$), $-1/33$ (para $f = 1/17$) y $55/53$ (para $f = 55$). Partiendo de $x = 8 = 4 \cdot 2$, los valores de la forma $4 \cdot 2^p$ que aparecen tienen exponentes $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$; se alcanzan en 22 722 pasos, exactamente el doble de los que necesita PRIMEGAME.

4. El invariante: secciones de origen único

El Teorema 3.2 muestra que la construcción en dos fases solo *disfraza* el origen único de FRACTRAN: observada en su sección $4\mathbb{Z}$, vuelve a ser un programa FRACTRAN. Esto sugiere que el invariante significativo no es el conjunto de orígenes de las ramas, sino la existencia o no de una sección de origen único.

Observación 4.1. Las construcciones de universalidad de Conway [2] y de Kurtz y Simon [5] se basan en la codificación de registros como exponentes primos, en la que cada paso de la máquina es la multiplicación por una fracción. Cualquier implementación de este esquema mediante una función tipo Collatz, directa o en fases, contiene una sección en la que el retorno es multiplicativo, y por tanto de origen único. No afirmamos que toda construcción universal posible tenga esta propiedad; esa es precisamente la pregunta de la Sección 6.

5. Funciones de tipo primo relativo

Definición 5.1 (Möller [11]; Matthews y Watts [10])**.** Sea $d \geq 2$. Una función tipo Collatz de *tipo primo relativo* con módulo d es una aplicación

$$T(x) = \frac{m_i x - r_i}{d} \qquad \text{si } x \equiv i \pmod{d},$$

con $m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\gcd(m_i, d) = 1$ y $m_i i \equiv r_i \pmod{d}$ para cada i.

Ejemplo 5.2. La función de Collatz acelerada T es de tipo primo relativo con $d = 2$, $m = (1, 3)$, $r = (0, -1)$. También lo son las funciones $T_q(x) = x/2$ o $(qx + 1)/2$ con q impar. En cambio, la función original $C(x) = 3x+1$ para x impar, escrita como $(6x+2)/2$, no lo es.

La aplicación T se extiende continuamente a los enteros d-ádicos $\mathbb{Z}_d$. Para $x \in \mathbb{Z}_d$, su *itinerario* es la sucesión $(T^j(x) \bmod d)_{j \geq 0}$. Para una palabra $w = w_0 \cdots w_{n-1}$ sobre $\{0, \ldots, d-1\}$, sea T_w la composición afín $T_{w_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{w_0}$ de las ramas, y sea $Z(w)$ el conjunto de los $x \in \mathbb{Z}_d$ cuyo itinerario empieza por w.

Lema 5.3 (Terras generalizado)**.** *Para toda palabra w de longitud n, el conjunto $Z(w)$ es una única clase de restos módulo d^n, y $T^n = T_w$ aplica $Z(w)$ biyectivamente sobre $\mathbb{Z}_d$ mediante $r_w + d^n y \mapsto M_w y + s_w$, donde $M_w = \prod_j m_{w_j}$ es una unidad d-ádica y $s_w \in \mathbb{Z}_d$.*

Demostración. Para $n = 1$ y $w = i$: si $x = i + dy$, entonces $T(x) = m_i y + (m_i i - r_i)/d$, que recorre $\mathbb{Z}_d$ biyectivamente al recorrer y el conjunto $\mathbb{Z}_d$, porque m_i es una unidad. Para el paso inductivo, si $Z(w) = r_w + d^n \mathbb{Z}_d$ se aplica sobre $\mathbb{Z}_d$ por $y \mapsto M_w y + s_w$, la condición adicional $T^n(x) \equiv i \pmod{d}$ fija y módulo d, y la composición con la rama i se analiza como en el caso $n = 1$. □

Corolario 5.4 ([6, 9])**.** *T conserva la medida de Haar μ de $\mathbb{Z}_d$.*

Demostración. Por el Lema 5.3 con $n = 1$, cada rama aplica su clase, de medida $1/d$, sobre $\mathbb{Z}_d$ de forma afín con coeficiente unidad, luego $\mu(T^{-1}(A) \cap Z(i)) = \mu(A)/d$ para todo boreliano A. Sumando sobre las d clases, $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. □

Lema 5.5. *Para toda palabra w no vacía, la rama T_w tiene coeficiente distinto de 1 y un único punto fijo racional p_w. Este punto pertenece a $\mathbb{Z}_d$, está en $Z(w)$, y su itinerario es $w^\infty = www\cdots$.*

Demostración. El coeficiente de T_w es M_w/d^n, con M_w coprimo con d, luego distinto de ± 1 para $n \geq 1$. En $Z(w)$, la ecuación $T^n(x) = x$ se escribe $M_w y + s_w = r_w + d^n y$, es decir, $(M_w - d^n)\, y = r_w - s_w$. Como M_w es una unidad y d^n pertenece a todo ideal primo de $\mathbb{Z}_d$, $M_w - d^n$ es una unidad, y hay una única solución $y \in \mathbb{Z}_d$. El punto obtenido está en $Z(w)$ y es fijo por T^n, luego su itinerario es w^∞; como T_w tiene un único punto fijo racional, es p_w. □

Lema 5.6 (Lyndon–Schützenberger [8])**.** *Si dos palabras no vacías u y v cumplen $u^\infty = v^\infty$, entonces ambas son potencias de una misma palabra.*

Demostración. Los prefijos de longitud $|u|\,|v|$ dan $u^{|v|} = v^{|u|}$, y por el teorema de Lyndon y Schützenberger dos palabras con una potencia común son potencias de una misma palabra. □

Teorema 5.7. *Sea T una función de tipo primo relativo con módulo d. Ninguna unión no vacía S de clases de restos módulo una potencia d^k es una sección de origen único de T.*

Demostración. Vemos S como un subconjunto abierto y cerrado de $\mathbb{Z}_d$, de medida $\mu(S) > 0$. Para $x \in S$ con retorno, su *palabra de excursión* es la palabra w de longitud $\tau_S(x)$ formada por los primeros $\tau_S(x)$ términos de su itinerario, y la rama de retorno correspondiente es T_w.

Observemos primero que las ramas de retorno realizadas por puntos d-ádicos son las mismas que las realizadas por enteros: el conjunto de puntos de S con palabra de excursión w está determinado por los primeros $|w|+k$ términos del itinerario, luego, por el Lema 5.3, es una unión de clases módulo $d^{|w|+k}$, y si no es vacío contiene enteros.

Supongamos que todas las ramas de retorno tienen el mismo origen p. Por el Lema 5.5, w^∞ es el itinerario de p para toda palabra de excursión w, y por el Lema 5.6 todas las palabras de excursión son potencias de una misma palabra primitiva u.

Por el Corolario 5.4 y el teorema de recurrencia de Poincaré, casi todo punto de S vuelve a S infinitas veces. El itinerario de un punto así es la concatenación de sus sucesivas palabras de excursión, todas potencias de u, luego es u^∞. Por el Lema 5.3, dos puntos con el mismo itinerario coinciden (pertenecen a las mismas clases módulo d^n para todo n). Así, casi todo punto de S es un mismo punto, lo que contradice $\mu(S) > 0$. □

Corolario 5.8. *Si una función tipo Collatz de módulo d admite una sección de origen único formada por clases módulo una potencia de d, no es de tipo primo relativo con ese módulo. En particular, los programas FRACTRAN y sus versiones en dos fases no lo son.*

Demostración. Para FRACTRAN, $S = \mathbb{Z}$ es una sección de origen único; para g_P, lo es $S_A = 4\mathbb{Z}$, que es unión de clases módulo $8m$. □

Observación 5.9 (Verificación numérica). Hemos calculado, para enteros en rangos del orden de 10^4, las palabras de excursión y los orígenes de las ramas de retorno en varios casos:

Función	Sección	Palabras	Orígenes distintos
T	$x \equiv 1 \pmod 4$	79	79
T	$x \equiv 7 \pmod{16}$	718	718
T	$x \equiv 0, 5 \pmod 8$	530	529
T_5	$x \equiv 3 \pmod 8$	459	459
Möller*	$x \equiv 4 \pmod 9$	657	657

*Función de Möller con $d = 3$, $m = (1, 4, 5)$, $r = (0, 1, 1)$. La única coincidencia observada corresponde a dos palabras de excursión que son potencias de una misma palabra, lo que es compatible con el Lema 5.6.

6. Consecuencias y nueva pregunta

Estado del Problema 9.3 del escrito I. En su forma original, la pregunta de si existen funciones universales cuyas ramas tengan puntos fijos distintos y se usen todas de forma esencial queda respondida afirmativamente por el Corolario 3.3. La pregunta sobre si la construcción de Kaščák usa uno o varios orígenes pierde su interés inicial; conserva interés en la forma siguiente.

Problema 6.1. *¿Admite la función universal de módulo* 396 *de Kaščák [4] una sección de origen único?*

Estado del Problema 9.4 del escrito I. La clase «de varios orígenes» queda formulada como la clase de las funciones sin sección de origen único, y el Teorema 5.7 muestra que contiene la clase natural de las funciones de tipo primo relativo, que incluye T y todas las T_q con q impar. La segunda mitad del problema se convierte en la siguiente.

Problema 6.2. *¿Contiene la clase de tipo primo relativo alguna función tipo Collatz universal, es decir, alguna función T para la que el problema «dados $x, y \in \mathbb{Z}$, ¿existe t con $T^t(x) = y$?» sea indecidible?*

Observación 6.3. Lagarias [7] señala que la clase de tipo primo relativo es exactamente aquella en que la extensión d-ádica conserva la medida de Haar, y que la clase general de funciones tipo Collatz contiene problemas de iteración indecidibles. No hemos encontrado ningún resultado de universalidad, ni de no universalidad, para la subclase de tipo primo relativo.

Observación 6.4 (Alcance). El Teorema 5.7 excluye el *mecanismo* de Conway en la clase de tipo primo relativo, no la universalidad por otros mecanismos. Una respuesta negativa al Problema 6.2 implicaría que el problema de alcanzabilidad para T es decidible; eso no resolvería la conjetura de Collatz, que es un enunciado Π_2^0 sobre una función fija, pero descartaría una de las vías hacia su indecidibilidad. Una respuesta positiva exigiría un mecanismo de computación distinto de la codificación por exponentes primos, compatible con la conservación de la medida de Haar.

Problema 6.5. *Para cada $q \geq 3$ impar, ¿es decidible el problema de alcanzabilidad de T_q?*

Verificación

El Teorema 3.2 se ha verificado computacionalmente con PRIMEGAME, comprobando la correspondencia de las órbitas hasta el octavo primo. La tabla de la Observación final de la Sección 5 se ha obtenido por cálculo directo de las excursiones.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. I. Estado de la cuestión y preguntas abiertas*, septiembre de 2026.

[2] J. H. Conway, Unpredictable iterations, en *Proceedings of the 1972 Number Theory Conference*, Universidad de Colorado, Boulder, 1972, 49–52.

[3] J. H. Conway, FRACTRAN: a simple universal programming language for arithmetic, en T. M. Cover y B. Gopinath (eds.), *Open Problems in Communication and Computation*, Springer, 1987, 4–26.

[4] F. Kaščák, Small universal one-state linear operator algorithm, en *Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'92)*, Lecture Notes in Computer Science 629, Springer, 1992, 327–335.

[5] S. A. Kurtz y J. Simon, The undecidability of the generalized Collatz problem, en *Theory and Applications of Models of Computation (TAMC 2007)*, Lecture Notes in Computer Science 4484, Springer, 2007, 542–553.

[6] J. C. Lagarias, The $3x + 1$ problem and its generalizations, *American Mathematical Monthly* 92 (1985), 3–23.

[7] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem: an overview, en J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x + 1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010.

[8] R. C. Lyndon y M.-P. Schützenberger, The equation $a^M = b^N c^P$ in a free group, *Michigan Mathematical Journal* 9 (1962), 289–298.

[9] K. R. Matthews, Generalized $3x + 1$ mappings: Markov chains and ergodic theory, en J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x + 1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010.

[10] K. R. Matthews y A. M. Watts, A generalization of Hasse's generalization of the Syracuse algorithm, *Acta Arithmetica* 43 (1984), 167–175.

[11] H. Möller, Über Hasses Verallgemeinerung des Syracuse-Algorithmus (Kakutanis Problem), *Acta Arithmetica* 34 (1978), 219–226.