Collatz e indecidibilidad

IV. Catalan, los dos orígenes y la contracción en la iteración de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

¿Por qué el 3? Se estudia qué tiene de específico el multiplicador 3 en la iteración de Collatz, comparando la función T_3 con la familia $T_q(x) = x/2$ o $(qx+1)/2$, con q impar. El resultado central relaciona los ciclos con la conjetura de Catalan, demostrada por Mihăilescu: las palabras de paridades cuyo denominador $2^K - 3^o$ vale ± 1 producen ciclos enteros automáticamente, y hay exactamente cuatro pares (K, o) con esa propiedad. Dan cuatro de los cinco ciclos enteros conocidos de T_3: $\{0\}$, $\{-1\}$, $\{1, 2\}$ y $\{-5, -7, -10\}$. Los dos primeros son los dos orígenes estudiados en escritos anteriores del programa. Para la familia T_q se demuestra que 3 es el único multiplicador para el que existe una palabra de ciclo unimodular con al menos dos pasos impares, el único cuyo segundo origen es entero, y el único impar mayor que 1 que es a la vez de la forma $2^K + 1$ y $2^{K'} - 1$. Se demuestra además que 3 es el único multiplicador con contracción media, en un sentido preciso basado en la biyección de Terras. Se separan explícitamente estas propiedades específicas de otras que suelen atribuirse al 3 pero valen para todo q.

1. Introducción

¿Por qué el 3? Es habitual atribuir a este número un papel especial en el problema de Collatz, pero rara vez se precisa en qué consiste. Este escrito intenta hacerlo distinguiendo dos tipos de propiedades: las *específicas*, que se cumplen para $q = 3$ y fallan para los demás multiplicadores impares, y las *genéricas*, que se cumplen para toda la familia $qx+1$ y que, por tanto, no pueden explicar por sí solas el comportamiento particular de la función de Collatz.

La pregunta tiene sentido dentro de esta serie. En los escritos I y II [1, 2] se identificaron los dos orígenes de la función de Collatz acelerada, los puntos fijos 0 y -1 de sus ramas, y se mostró que su presencia impide el mecanismo de computación de Conway. En el escrito III [3] se vio que una función universal de tipo primo relativo tendría que estar en régimen mixto, con ramas contractivas y expansivas. Aquí se muestra que los dos orígenes y los ciclos pequeños de T proceden de la ecuación de Catalan, y que el 3 es el único multiplicador impar en régimen contractivo. Ambos hechos tienen la misma raíz: la cercanía entre las potencias de 2 y de 3.

Para q impar, $q \geq 3$, consideramos

$$T_q(x) = \begin{cases} x/2, & x \text{ par}, \\ (qx+1)/2, & x \text{ impar}, \end{cases}$$

sobre $\mathbb{Z}$. La función de Collatz acelerada es $T = T_3$. Todas ellas son de tipo primo relativo con módulo 2 en el sentido de Möller, Matthews y Watts [14, 2].

2. Ciclos racionales y denominadores

Una palabra de paridades es una sucesión finita $s = s_1 \cdots s_K \in \{0,1\}^K$; escribimos $o = o(s)$ para el número de unos. Sea $T_{q,s}$ la composición afín de las ramas $x \mapsto x/2$ (para $s_i = 0$) y $x \mapsto (qx+1)/2$ (para $s_i = 1$), en el orden de la palabra.

Lema 2.1 (Lagarias [10])**.** *Para toda palabra s de longitud K con o unos,*

$$T_{q,s}(x) = \frac{q^o x + \varphi_q(s)}{2^K}$$

con $\varphi_q(s) \in \mathbb{Z}$, y el único punto fijo racional de $T_{q,s}$ es

$$x_s = \frac{\varphi_q(s)}{2^K - q^o}.$$

Este punto genera un ciclo de T_q en los racionales de denominador impar, cuyo vector de paridades es s^∞.

Demostración. Por inducción sobre K: si $T_{q,s}(x) = (q^o x + \varphi)/2^K$, prolongar la palabra con un 0 da $(q^o x + \varphi)/2^{K+1}$, y prolongarla con un 1 da $(q^{o+1}x + q\varphi + 2^K)/2^{K+1}$. Como $2^K - q^o$ es impar, x_s tiene denominador impar. Que x_s tenga vector de paridades s^∞ es el Lema 5.5 del escrito II [2], aplicado a T_q, que es de tipo primo relativo. □

El ciclo generado por s es entero si y solo si $2^K - q^o$ divide a $\varphi_q(s)$ (y a los numeradores de las rotaciones de s). La situación más favorable es la de denominador ± 1.

Definición 2.2. Una palabra s es *unimodular* para q si $|2^K - q^o| = 1$.

Corolario 2.3. *Si s es unimodular para q, todos los puntos del ciclo generado por s son enteros.*

3. Catalan y los ciclos de T_3

Teorema 3.1 (Mihăilescu [15])**.** *La única solución de $x^a - y^b = 1$ en enteros $x, y, a, b \geq 2$ es $3^2 - 2^3 = 1$.*

Teorema 3.2. *Los pares (K, o) con $K \geq 1$, $0 \leq o \leq K$ y $|2^K - 3^o| = 1$ son exactamente*

$$(1,0), \qquad (1,1), \qquad (2,1), \qquad (3,2).$$

Las palabras correspondientes generan los ciclos enteros

$$\{0\}, \qquad \{-1\}, \qquad \{1,2\}, \qquad \{-5,-7,-10\}.$$

Demostración. Si $o = 0$, la condición es $|2^K - 1| = 1$, luego $K = 1$. Si $o = 1$, es $|2^K - 3| = 1$, luego $2^K \in \{2,4\}$ y $K \in \{1,2\}$. Si $o \geq 2$ y $K = 1$, es $|2 - 3^o| = 1$, imposible. Si $o \geq 2$ y $K \geq 2$, por el teorema de Mihăilescu la única posibilidad es $3^2 - 2^3 = 1$, es decir, $(K, o) = (3, 2)$.

Los ciclos se obtienen del Lema 2.1. La palabra 0 da $x = 0/(2-1) = 0$. La palabra 1 da la rama $x \mapsto (3x+1)/2$, con punto fijo -1. Las palabras 01 y 10 dan los puntos 2 y 1. Las tres rotaciones de 011 dan -10, -7 y -5, y en efecto $T(-5) = -7$, $T(-7) = -10$, $T(-10) = -5$. □

Observación 3.3. Los ciclos enteros conocidos de T sobre $\mathbb{Z}$ son cinco: los cuatro anteriores y el ciclo de -17, de longitud 11 con 7 pasos impares. Se conjetura que no hay más [11]. El denominador del ciclo de -17 es $2^{11} - 3^7 = -139$, que no es unimodular; sus puntos son enteros porque 139 divide a los numeradores correspondientes. Así, *cuatro de los cinco ciclos enteros conocidos de T son consecuencia directa de que 8 y 9 sean las únicas potencias perfectas consecutivas*, y el quinto responde a una divisibilidad de otra naturaleza.

Observación 3.4 (Los dos orígenes). En los escritos I y II [1, 2] se llamaron *orígenes* de T a los puntos fijos 0 y -1 de sus dos ramas. El Teorema 3.2 muestra que son precisamente las dos soluciones degeneradas, con $K = 1$, de la ecuación $|2^K - 3^o| = 1$. Los dos orígenes, el ciclo trivial y el ciclo de -5 forman una única familia aritmética.

Observación 3.5 (Antecedentes). El marco de los ciclos racionales es de Lagarias [10], con cotas óptimas de Halbeisen y Hungerbühler [8]. En un preprint de Cox, Ghosh y Sultanow [5] se observa, en el contexto de los ciclos de $3n+c$, que el caso $2^2-3 = 1$ da el ciclo trivial y que el teorema de Mihăilescu impide otros ciclos de ese tipo, y se menciona el ciclo de -5 asociado a $2^3 - 3^2 = -1$. La bibliografía anotada de Lagarias [12] recoge además que los enteros $2^m k - 1$, $2^{3m} k - 5$ y $2^{11m} k - 17$ iteran a $3^m k - 1$, $3^{2m} k - 5$ y $3^{7m} k - 17$, con los pares de exponentes de los ciclos de -1, -5 y -17. No hemos encontrado formulada la clasificación completa del Teorema 3.2, ni su relación con los dos orígenes.

4. Lo específico del 3 en la familia $qx + 1$

Teorema 4.1. *Sea $q \geq 3$ impar.*

1. *El origen $1/(2-q)$ de la rama impar de T_q es entero si y solo si $q = 3$.*
2. *Existe una palabra unimodular para q con al menos dos unos si y solo si $q = 3$; en ese caso los parámetros son $(K, o) = (3, 2)$.*
3. *Existe una palabra unimodular para q con exactamente un uno si y solo si $q = 2^K \pm 1$ para algún $K \geq 1$. Si $q = 2^K - 1$, genera el ciclo positivo $\{1, 2, 4, \ldots, 2^{K-1}\}$; si $q = 2^K + 1$, genera el ciclo negativo $\{-1, -2, \ldots, -2^{K-1}\}$.*
4. *El único q que es a la vez de la forma $2^K + 1$ y $2^{K'} - 1$ es $q = 3$. En consecuencia, 3 es el único multiplicador con ciclos unimodulares de un paso impar tanto positivos como negativos.*

Demostración. (1) $1/(2-q) \in \mathbb{Z}$ exige $|2 - q| = 1$, y con $q \geq 3$ impar solo cabe $q = 3$.

(2) Con $o \geq 2$: si $K = 1$, $|2 - q^o| = 1$ es imposible porque $q^o \geq 9$. Si $K \geq 2$, el teorema de Mihăilescu obliga a $q^o = 9$ y $2^K = 8$, luego $q = 3$, $o = 2$, $K = 3$.

(3) Con $o = 1$, la condición es $|2^K - q| = 1$. Si $q = 2^K - 1$, la palabra $1\,0^{K-1}$ da $T_{q,s}(x) = (qx + 1)/2^K$, con punto fijo $1/(2^K - q) = 1$, y la órbita de 1 es $1 \mapsto (q+1)/2 = 2^{K-1} \mapsto \cdots \mapsto 1$. Si $q = 2^K + 1$, el punto fijo es -1, y la órbita es $-1 \mapsto (1-q)/2 = -2^{K-1} \mapsto \cdots \mapsto -1$.

(4) Si $2^K + 1 = 2^{K'} - 1$, entonces $2^{K'} - 2^K = 2$, luego $K = 1$ y $K' = 2$. □

Ejemplo 4.2. Para $q = 5 = 2^2 + 1$, el ciclo $\{-1, -2\}$; para $q = 7 = 2^3 - 1$, el ciclo $\{1, 4, 2\}$; para $q = 17 = 2^4 + 1$, el ciclo $\{-1, -8, -4, -2\}$. Hemos comprobado computacionalmente, para todo q impar con $3 \leq q \leq 31$ y $K \leq 12$, que las únicas palabras unimodulares son las descritas en el Teorema 4.1.

5. La contracción media

Proposición 5.1. *Sea $q \geq 3$ impar y sea $p_q(k)$ la proporción de clases $x \bmod 2^k$ para las que el coeficiente $q^o/2^k$ de T_q^k en esa clase es menor que 1. Entonces*

$$\lim_{k\to\infty} p_q(k) = \begin{cases} 1, & q = 3, \\ 0, & q \geq 5. \end{cases}$$

Demostración. Por la biyección de Terras [18], válida para toda T_q [2], al recorrer las 2^k clases módulo 2^k el vector de las k primeras paridades recorre $\{0,1\}^k$ exactamente una vez, de modo que el número o de pasos impares sigue la distribución binomial de parámetros k y $1/2$. La condición $q^o < 2^k$ equivale a $o/k < \log 2/\log q$. Por la ley de los grandes números, $o/k \to 1/2$ en proporción, y

$$\frac{\log 2}{\log q} > \frac{1}{2} \iff q < 4.$$

Si $q = 3$, el umbral $\log 2/\log 3 \approx 0{,}631$ es mayor que $1/2$ y la proporción tiende a 1; si $q \geq 5$, el umbral es menor que $1/2$ y tiende a 0. □

Numéricamente, $p_3(50) \approx 0{,}968$ y $p_3(200) \approx 0{,}9999$, mientras que $p_5(50) \approx 0{,}161$ y $p_5(200) \approx 0{,}028$.

Observación 5.2. El crecimiento logarítmico medio por paso es $\frac{1}{2}\log\frac{q}{4}$, negativo solo para $q = 3$; es la condición $|m_0 m_1| < d^d$ de Matthews y Watts [14] con $m = (1, q)$ y $d = 2$. Así, 3 es el único multiplicador impar mayor que 1 en el régimen contractivo, por ser el mayor impar menor que 2^2. En el plano riguroso, Terras [18] y Everett [6] demostraron que casi todo entero tiene tiempo de parada finito para $q = 3$, y, según recoge Siegel [17], el argumento de Terras adaptado muestra que para $q \geq 5$ casi todo entero acaba superando su valor inicial. La predicción de que para $q \geq 5$ casi todas las órbitas divergen procede de modelos estocásticos [9] y no está demostrada: no se conoce ninguna órbita de T_5 cuya divergencia esté probada.

6. Lo genérico que suele atribuirse al 3

Proposición 6.1. *Sea $q \geq 3$ impar.*

1. *Si x es impar, $T_q(x) \not\equiv 0 \pmod q$, y ninguna iteración posterior es múltiplo de q.*
2. *Si 2 es raíz primitiva módulo q^s, el resto módulo q^s del siguiente estado impar registra la longitud de la racha de mitades módulo $\varphi(q^s)$, como en el caso $q = 3$ [4].*

Demostración. (1) $T_q(x) = (qx+1)/2 \equiv 2^{-1} \pmod q$, que no es 0; dividir por 2 multiplica el resto por 2^{-1}, que es invertible módulo q, y aplicar la rama impar da de nuevo 2^{-1}. (2) Es el argumento del Teorema 4.3 de [4], que solo usa que 2 genere $(\mathbb{Z}/q^s\mathbb{Z})^\times$. □

Observación 6.2. La primera propiedad es completamente genérica. La segunda es semiespecífica: 2 es raíz primitiva módulo q^2 (y por tanto módulo toda potencia de q) para $q = 3, 5, 11, 13$, pero no para $q = 7$, donde tiene orden 3. Qué primos tienen a 2 como raíz primitiva es el objeto de la conjetura de Artin. En el mismo orden de ideas, el conocido patrón 3–6–9 de las raíces digitales de las potencias de 2 se explica porque 2 genera las unidades módulo 9 y los múltiplos de 3 forman un ideal que la duplicación no toca.

7. Resumen

Propiedad	**Alcance**
Contracción media (Proposición 5.1)	Específica: solo $q = 3$
Segundo origen entero (Teorema 4.1.1)	Específica: solo $q = 3$
Palabra unimodular con $o \geq 2$ (Teorema 4.1.2)	Específica: solo $q = 3$, por Catalan
Ciclos unimodulares de un paso impar de ambos signos (Teorema 4.1.4)	Específica: solo $q = 3$
Ciclo unimodular de un paso impar (Teorema 4.1.3)	Familia $q = 2^K \pm 1$
Registro de rachas módulo q^s (Proposición 6.1.2)	Semiespecífica: 2 raíz primitiva
Desaparición de los múltiplos de q (Proposición 6.1.1)	Genérica

Todas las propiedades específicas del 3 encontradas proceden de la misma fuente: la proximidad entre las potencias de 2 y de 3, que alcanza su expresión extrema en $3 = 2 + 1 = 4 - 1$ y en $9 = 8 + 1$. La tensión entre ambas bases, que en otros contextos aparece en el problema $\times 2 \times 3$ de Furstenberg [7, 16] y en el problema de Mahler sobre las potencias de $3/2$ [13], se manifiesta en la iteración de Collatz como contracción media y como la aritmética de sus ciclos pequeños.

Verificación. Los ciclos de los Teoremas 3.2 y 4.1, las palabras unimodulares para $3 \leq q \leq 31$ y $K \leq 12$, las proporciones de la Proposición 5.1 y la Proposición 6.1.1 para $q = 5, 7, 9, 11$ se han comprobado computacionalmente.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. I. Estado de la cuestión y preguntas abiertas*, septiembre de 2026.

[2] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. II. Secciones de origen único y funciones de tipo primo relativo*, septiembre de 2026.

[3] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. III. Conservación de la medida y computación*, septiembre de 2026.

[4] M. Cerdá Bennassar, *Parejas, ternas y reservas. Estructura aritmética del modelo material de Collatz*, septiembre de 2026.

[5] D. Cox, S. Ghosh y E. Sultanow, Collatz cycles and $3n + c$ cycles, arXiv:2101.04067, 2021.

[6] C. J. Everett, Iteration of the number-theoretic function $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+2$, *Advances in Mathematics* 25 (1977), 42–45.

[7] H. Furstenberg, Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation, *Mathematical Systems Theory* 1 (1967), 1–49.

[8] L. Halbeisen y N. Hungerbühler, Optimal bounds for the length of rational Collatz cycles, *Acta Arithmetica* 78 (1997), 227–239.

[9] A. V. Kontorovich y J. C. Lagarias, Stochastic models for the $3x + 1$ and $5x + 1$ problems and related problems, en J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x + 1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010, 131–188.

[10] J. C. Lagarias, The set of rational cycles for the $3x + 1$ problem, *Acta Arithmetica* 56 (1990), 33–53.

[11] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem: an overview, en J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x + 1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010.

[12] J. C. Lagarias, The $3x + 1$ problem: an annotated bibliography, II (2000–2009), arXiv:math/0608208.

[13] K. Mahler, An unsolved problem on the powers of 3/2, *Journal of the Australian Mathematical Society* 8(2) (1968), 313–321.

[14] K. R. Matthews y A. M. Watts, A generalization of Hasse's generalization of the Syracuse algorithm, *Acta Arithmetica* 43 (1984), 167–175.

[15] P. Mihăilescu, Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 572 (2004), 167–195.

[16] D. J. Rudolph, $\times 2$ and $\times 3$ invariant measures and entropy, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 10 (1990), 395–406.

[17] M. C. Siegel, (p, q)-adic analysis and the Collatz conjecture, arXiv:2412.02902, 2024.

[18] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arithmetica* 30 (1976), 241–252.