Collatz e indecidibilidad

I. Estado de la cuestión y preguntas abiertas

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

Este escrito abre un programa de estudio paralelo, y compatible, con el programa principal sobre la conjetura de Collatz: el estudio de la conjetura desde la teoría de la computabilidad y la lógica. Se distinguen primero los dos sentidos en que puede hablarse de indecidibilidad y se analiza la forma lógica de la conjetura. Se exponen después los resultados establecidos: la construcción de Conway (1972) y su formalización como FRACTRAN, la Π_2^0-completitud del problema generalizado de Kurtz y Simon (2007), la función universal de módulo 396 de Kaščák (1992) y la aparición de problemas tipo Collatz en la frontera inferior de la computación a través de la competición de los castores atareados. Finalmente se propone una observación estructural propia, la de los *dos orígenes* de la función de Collatz, y se formulan las preguntas abiertas que orientarán el programa. Todo lo que no está demostrado se señala expresamente como tal.

1. Dos sentidos de «indecidible»

La afirmación «la conjetura de Collatz es indecidible» admite dos lecturas que conviene separar desde el principio.

Sentido algorítmico. Un *problema*, es decir, una familia infinita de preguntas parametrizada por una entrada, es indecidible si no existe un algoritmo que responda correctamente a todas ellas. Una afirmación concreta no puede ser indecidible en este sentido: o es verdadera o es falsa, y uno de los dos algoritmos triviales («responde sí», «responde no») acierta. La indecidibilidad algorítmica tiene sentido para *familias* de funciones tipo Collatz, o para la pregunta «¿llega a 1 la órbita de n?» con n variable y una función fija.

Sentido lógico. Una afirmación es indecidible en un sistema formal (por ejemplo, la aritmética de Peano PA o la teoría de conjuntos ZFC) si el sistema no demuestra ni ella ni su negación. Este es el único sentido con contenido para la conjetura de Collatz propiamente dicha.

Los dos sentidos están relacionados, pero no son intercambiables: la indecidibilidad algorítmica de una familia no implica la independencia lógica de ninguno de sus miembros.

2. La forma lógica de la conjetura

Sea C la función de Collatz. La conjetura se escribe

$$\forall n \geq 1 \; \exists k \geq 0 \quad C^k(n) = 1,$$

donde la relación $C^k(n) = 1$ es decidible. Es, por tanto, un enunciado Π_2^0. Su negación afirma la existencia de un n cuya órbita no alcanza el 1, lo que ocurre si la órbita entra en un ciclo que no contiene el 1 o si no está acotada.

Proposición 2.1. *Si la conjetura de Collatz fuera independiente de* PA*, entonces en los enteros positivos no existiría ningún ciclo que no contenga el* 1*.*

Demostración. Si existiera un ciclo $n_0 \mapsto n_1 \mapsto \cdots \mapsto n_p = n_0$ que no contiene el 1, la afirmación «n_0 pertenece a un ciclo que no contiene el 1» sería un enunciado Σ_1^0 verdadero (basta exhibir los números $n_0, \ldots, n_{p-1}$ y comprobar las igualdades). Por la Σ_1^0-completitud de PA, este enunciado sería demostrable en PA, y con él la negación de la conjetura, en contra de la independencia. □

Así, si la conjetura fuera independiente de PA, en los enteros reales solo cabrían dos posibilidades: que fuera verdadera, o que fuera falsa por la existencia de una órbita no acotada. Esta observación es conocida; la incluimos porque delimita el terreno del programa.

3. La construcción de Conway

3.1. Funciones tipo Collatz

Definición 3.1. Una *función tipo Collatz* de módulo m es una función $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ para la que existen racionales $a_0, \ldots, a_{m-1}$, $b_0, \ldots, b_{m-1}$ tales que

$$g(n) = a_i\, n + b_i \qquad \text{si } n \equiv i \pmod{m},$$

con $g(n) \in \mathbb{Z}$ para todo n. La función de Collatz es de este tipo con $m = 2$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $b_0 = 0$, $a_1 = 3$, $b_1 = 1$.

En la literatura estas funciones reciben varios nombres: aplicaciones de Collatz generalizadas, funciones periódicamente lineales, funciones afines por clases de restos o, en el trabajo de Kaščák, algoritmos de operador lineal de un estado.

3.2. Máquinas de registros

Una máquina de registros (o máquina de Minsky) tiene un número finito de registros con valores naturales y un programa finito de instrucciones de dos tipos: sumar 1 a un registro y pasar a otra instrucción; o, si el registro no es cero, restarle 1 y pasar a una instrucción, y si es cero, pasar a otra. Minsky [10] demostró que estas máquinas calculan todas las funciones parcialmente recursivas.

3.3. Los registros como exponentes primos

La idea de Conway es guardar toda la configuración de la máquina en un único entero,

$$N = p_q \cdot 2^{r_1} 3^{r_2} 5^{r_3} \cdots,$$

donde los registros son exponentes de primos distintos y el estado de control q se codifica por la presencia de otro primo p_q. Las instrucciones se convierten en multiplicaciones por fracciones:

- «en el estado A, suma 1 a r_1 y pasa a B» es multiplicar por $2p_B/p_A$;
- «en el estado A, si $r_1 > 0$ réstale 1 y pasa a B» es multiplicar por $p_B/(2p_A)$, fracción que da un entero si y solo si $2p_A \mid N$;
- la rama «si es cero, pasa a C» es la fracción p_C/p_A, colocada después en la lista.

Conway formalizó esta idea en el lenguaje FRACTRAN [3]: un programa es una lista finita de fracciones $f_1, \ldots, f_r$, y en cada paso N se sustituye por Nf_j, donde j es el primer índice con $Nf_j \in \mathbb{Z}$; si no hay ninguno, el programa se detiene.

Proposición 3.2. *Todo programa FRACTRAN es una función tipo Collatz con $b_i = 0$ para todo i, cuyo módulo es el mínimo común múltiplo de los denominadores.*

Demostración. Qué fracción es la primera aplicable depende solo de qué denominadores dividen a N, y esto depende solo de N módulo el mínimo común múltiplo de los denominadores. □

Teorema 3.3 (Conway [2])**.** *Para toda función parcialmente recursiva f existe una función tipo Collatz g tal que, partiendo de 2^n, la primera potencia de 2 posterior que aparece en la órbita de g es $2^{f(n)}$ (y no aparece ninguna si $f(n)$ no está definida). En consecuencia, no existe un algoritmo que decida, dadas g y n, si la órbita de n alcanza una potencia de 2 prefijada.*

Tomando f universal se obtiene una función g *fija* para la que el problema de alcanzar un valor dado, con la entrada n variable, es indecidible (véase también [11]). Existen, pues, funciones tipo Collatz individuales con problema de terminación indecidible.

Ejemplo 3.4 (PRIMEGAME)**.** El programa de Conway

$$\tfrac{17}{91},\ \tfrac{78}{85},\ \tfrac{19}{51},\ \tfrac{23}{38},\ \tfrac{29}{33},\ \tfrac{77}{29},\ \tfrac{95}{23},\ \tfrac{77}{19},\ \tfrac{1}{17},\ \tfrac{11}{13},\ \tfrac{13}{11},\ \tfrac{15}{2},\ \tfrac{1}{7},\ \tfrac{55}{1}$$

genera, partiendo de 2, exactamente las potencias 2^p con p primo, en orden creciente. Hemos comprobado computacionalmente que los exponentes obtenidos son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ en unos 11 361 pasos. Como función tipo Collatz, su módulo es $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 29 = 6\,469\,693\,230$.

4. La versión para todas las entradas: Kurtz y Simon

El teorema de Conway se refiere solo a entradas de la forma 2^k. La conjetura de Collatz, en cambio, se refiere a todos los enteros positivos. Kurtz y Simon [5] cerraron esta distancia.

Teorema 4.1 (Kurtz–Simon, 2007)**.** *El problema de decidir, dada una función tipo Collatz g, si para todo entero positivo x existe i con $g^{(i)}(x) = 1$, es Π^0_2-completo.*

La dificultad técnica es que, en la construcción de Conway, los enteros que no son de la forma 2^k no representan computaciones legítimas: son «basura», y el comportamiento de g sobre ellos no guarda relación con la máquina simulada. La solución de Kurtz y Simon es una *doble simulación*: una simulación exterior avanza la máquina original, y una simulación interior, arrancada de nuevo en cada paso y controlada por un reloj que garantiza su terminación, comprueba la coherencia de la exterior. Desde una configuración arbitraria, la incoherencia se detecta y la máquina se detiene; solo una computación auténtica e infinita puede no detenerse. Así, la máquina modificada se detiene desde toda configuración si y solo si la original es total.

Observación 4.2. La conjetura de Collatz y el problema de Kurtz–Simon tienen exactamente la misma forma lógica, $\forall x\, \exists i$. El resultado muestra que la familia alcanza el máximo grado de dificultad posible para esa forma. No dice nada sobre la función $3n + 1$ en particular. El precio de tratar todas las entradas es una estructura interna de autovigilancia (registros duplicados, relojes, comprobaciones) que exige módulos grandes.

Observación 4.3. La versión del artículo disponible en la página de J. Simon es un borrador fechado en diciembre de 2006, incompleto en la sección del resultado principal. La referencia citable es la versión publicada en las actas de TAMC 2007.

5. El módulo más pequeño conocido

Kaščák [4] definió los *algoritmos de operador lineal de un estado* de módulo m: según el resto $r = x \bmod m$, o bien el cálculo se detiene, o bien x se sustituye por $\lfloor (ax + b)/c \rfloor$, con constantes que dependen solo de r. Construyó uno universal con módulo 396. En el modelo de Kaščák se admiten términos independientes $b \neq 0$.

La función de Collatz tiene módulo 2. Entre 2 y 396 se extiende un territorio en el que, hasta donde hemos podido averiguar, no se conoce ni una cota inferior para el módulo de las funciones universales ni un resultado de indecidibilidad. El panorama técnico de referencia sobre este territorio es el capítulo de Michel y Margenstern [9].

6. La frontera desde abajo: los castores atareados

La competición de los castores atareados (*busy beavers*), introducida por Radó en 1962, busca las máquinas de Turing con n estados que más pasos dan antes de detenerse partiendo de una cinta en blanco. Michel [8] observó que las máquinas pequeñas que alcanzan valores enormes lo hacen, en su mayoría, simulando funciones tipo Collatz, y que el problema de su parada para entradas generales es un problema abierto de teoría de números.

El ejemplo más significativo es *Antihydra*, una máquina de 6 estados y 2 símbolos descubierta en junio de 2024 en el marco del proyecto colaborativo bbchallenge [1]. Su parada equivale a la siguiente pregunta: iterando $H(n) = \lfloor 3n/2 \rfloor$ a partir de $n = 8$, ¿llegará en algún momento el número de valores impares obtenidos a superar el doble del número de valores pares? Un modelo probabilístico sugiere que la probabilidad de que la máquina se detenga es minúscula, pero no hay demostración. En consecuencia, el valor exacto de la función de castor atareado para 6 estados depende de la solución de un problema tipo Collatz.

Observación 6.1. Los problemas tipo Collatz aparecen así en la frontera de la computabilidad por los dos lados: desde arriba, como familias universales (Conway, Kurtz–Simon, Kaščák); desde abajo, en máquinas diminutas de las que no se sabe si son universales.

7. La valoración actual

Lagarias [7] resume la situación así: Conway sugirió que el problema $3x + 1$ podría estar cerca del umbral de la indecidibilidad; no se sabe si es indecidible y no se conoce ningún método para abordar esa cuestión. Lagarias añade que la función $3x + 1$ parece escapar a los métodos que codifican computadores universales, pero que podría codificar un problema indecidible por otro mecanismo, y propone como ejemplo la pregunta de si existe algún n cuyos iterados por T permanecen por encima de 1 durante al menos $100 \log n$ pasos.

8. Una observación estructural: los dos orígenes

Esta sección contiene una observación propia de este programa. Sus enunciados están demostrados, pero su interpretación es heurística y se señala como tal.

8.1. El criterio del origen común

Una rama afín $n \mapsto a_i n + b_i$ con $a_i \neq 1$ tiene un único punto fijo racional, $p_i = b_i/(1 - a_i)$.

Proposición 8.1. *Sea g una función tipo Collatz cuyas ramas tienen todas $a_i \neq 1$. Existe una traslación $n = y + c$, con $c \in \mathbb{Q}$, que convierte todas las ramas en puramente multiplicativas (esto es, con término independiente nulo) si y solo si todas las ramas tienen el mismo punto fijo.*

Demostración. Trasladando, la rama i se convierte en $y \mapsto a_i y + (a_i c + b_i - c)$, cuyo término independiente se anula si y solo si $c = b_i/(1 - a_i) = p_i$. Esto debe ocurrir para todo i a la vez. □

En FRACTRAN todas las ramas fijan el 0: hay un único origen. Para la función de Collatz acelerada,

$$T(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (3n+1)/2, & n \text{ impar}, \end{cases}$$

la rama par fija el 0 y la rama impar fija el -1. Hay *dos orígenes*, y ninguna traslación elimina el término independiente.

8.2. Cada rama borra la memoria factorial de la otra

Proposición 8.2. *1. Medido desde el origen 0: si n es par, $v_p(n/2) = v_p(n)$ para todo primo impar p; si n es impar, $\gcd(n, T(n)) = 1$.*

2. Medido desde el origen -1, con $y = n + 1$: la rama impar se escribe $y \mapsto 3y/2$ y conserva $v_p(y)$ para todo primo $p \geq 5$; la rama par se escribe $y \mapsto (y+1)/2$ y cumple $\gcd(y, (y+1)/2) = 1$.

Demostración. Si d divide a n y a $(3n + 1)/2$, divide a $3n + 1$ y por tanto a 1. Si n es impar, $T(n) + 1 = (3n + 3)/2 = \frac{3}{2}(n + 1)$. Si n es par, $T(n) + 1 = n/2 + 1 = (y + 1)/2$, y todo divisor común de y y $(y + 1)/2$ divide a $y + 1$, luego a 1. Las afirmaciones sobre valuaciones son inmediatas. □

La memoria de Conway, que guarda los registros en la factorización, sobrevive a una rama y es borrada por completo por la otra, desde cualquiera de los dos orígenes.

Observación 8.3 (Advertencia). El borrado de la factorización *no es un criterio intrínseco.* Si se traslada un programa FRACTRAN mediante $y = n + 1$, se obtiene una función $h(y) = a_i y + (1 - a_i)$ en cada clase, y todo divisor común de y y $h(y)$ divide al numerador de $1 - a_i$; el máximo común divisor está acotado y, sin embargo, la función sigue siendo universal, porque solo se ha movido el origen. Lo intrínseco es la existencia de *dos orígenes distintos usados de forma entrelazada.* Formular esta condición de modo que excluya casos triviales (por ejemplo, una rama con otro punto fijo que nunca se ejecuta) es parte del problema.

8.3. Dónde vive la información en Collatz

Dos resultados clásicos precisan que, en la función de Collatz, la información no reside en la factorización, sino en las cifras binarias. Terras [12] demostró que las paridades de los primeros k pasos de T dependen solo de n mód 2^k, y que la correspondencia es biyectiva. Lagarias [6] mostró que, sobre los enteros 2-ádicos, T es conjugada al desplazamiento de Bernoulli mediante el vector de paridades.

Observación 8.4 (Heurística). Un número leído por sus restos en una base b, con operaciones de añadir y quitar cifras, se comporta como una pila; una sola pila no basta para la universalidad, que requiere dos pilas o dos contadores. Conway obtiene varios contadores usando primos distintos en un mismo número. La función de Collatz tiene un solo número y dos bases, 2 y 3, que interactúan mediante acarreos. La pregunta de si esa interacción,

a través de los dos orígenes, puede funcionar como una segunda pila es una formulación posible de la frontera. No es un resultado; es una orientación.

Los dos puntos 0 y -1 ya aparecieron en los escritos anteriores del modelo material: el valor de Grundy del juego con atajo depende de $\nu_2(n)$ y de $\nu_2(n+1)$, sus distancias 2-ádicas a los dos orígenes [14, 13].

9. Preguntas abiertas del programa

Se enumeran las preguntas que orientan el programa. Las dos primeras son preguntas conocidas de la literatura; las siguientes son propias.

Problema 9.1. *¿Cuál es el menor módulo m para el que existe una función tipo Collatz universal? Se sabe que $m \leq 396$ [4].*

Problema 9.2 (Lagarias)**.** *¿Es decidible la existencia de un n cuyos iterados por T permanecen por encima de 1 durante al menos $100 \log n$ pasos?*

Problema 9.3. *¿La construcción de Kaščák usa un único origen, en el sentido de la Proposición 8.1, o varios? Si usa uno solo, ¿existe alguna función universal cuyas ramas tengan puntos fijos distintos y se usen todas de forma esencial?*

Problema 9.4. *Formular una clase de funciones tipo Collatz «de varios orígenes» que excluya los casos triviales, y decidir si contiene funciones universales. En particular, estudiar las familias de módulo 2 de la forma $n \mapsto n/2$ para n par y $n \mapsto qn+1$ para n impar, con q impar.*

Problema 9.5. *¿Qué capacidad mínima de autovigilancia, en el sentido de la doble simulación de Kurtz–Simon, puede tener una función tipo Collatz de módulo pequeño?*

Observación 9.6. Ninguna de estas preguntas presupone que la conjetura de Collatz sea indecidible. Su objetivo es entender dónde está la frontera y a qué distancia de ella se encuentra la función $3n+1$, lo cual es compatible con cualquier respuesta a la conjetura.

Referencias

[1] The bbchallenge Collaboration, *Determination of the fifth Busy Beaver value*, arXiv:2509.12337, 2025.

[2] J. H. Conway, Unpredictable iterations, en *Proceedings of the 1972 Number Theory Conference*, Universidad de Colorado, Boulder, 1972, 49–52.

[3] J. H. Conway, FRACTRAN: a simple universal programming language for arithmetic, en T. M. Cover y B. Gopinath (eds.), *Open Problems in Communication and Computation*, Springer, 1987, 4–26.

[4] F. Kaščák, Small universal one-state linear operator algorithm, en *Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'92)*, Lecture Notes in Computer Science 629, Springer, 1992, 327–335.

[5] S. A. Kurtz y J. Simon, The undecidability of the generalized Collatz problem, en *Theory and Applications of Models of Computation (TAMC 2007)*, Lecture Notes in Computer Science 4484, Springer, 2007, 542–553.

[6] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem and its generalizations, *American Mathematical Monthly* 92 (1985), 3–23.

[7] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem: an overview, en J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x+1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010.

[8] P. Michel, Problems in number theory from busy beaver competition, *Logical Methods in Computer Science* 11(4:10) (2015).

[9] P. Michel y M. Margenstern, Generalized $3x+1$ functions and the theory of computation, en J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x+1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010, 105–128.

[10] M. L. Minsky, Recursive unsolvability of Post's problem of "tag" and other topics in the theory of Turing machines, *Annals of Mathematics* 74 (1961), 437–455.

[11] C.-F. Nyberg-Brodda, The word problem for one-relation monoids: a survey, *Semigroup Forum*, 2021; arXiv:2105.02853.

[12] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arithmetica* 30 (1976), 241–252.

[13] M. Cerdá Bennassar, *Parejas, ternas y reservas. Estructura aritmética del modelo material de Collatz*, septiembre de 2026.

[14] M. Cerdá Bennassar, *El juego de Collatz en el sentido de Conway. Valores de Grundy locales y terminación global*, septiembre de 2026.