Collatz e indecidibilidad

V. Memoria en valuaciones: la cota de borrado, los límites de la simulación de contadores y el ciclo de -17

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

El mecanismo de Conway guarda la memoria de una máquina de registros en las valuaciones p-ádicas de un único entero. Este escrito determina qué queda de ese mecanismo en las funciones tipo Collatz de tipo primo relativo. Se demuestra que solo la rama de la clase 0 puede ser lineal (Lema 2.1) y que toda otra rama borra las valuaciones grandes, llevándolas por debajo de una constante que depende solo de la función (Teorema 3.2). En consecuencia, una valuación grande solo sobrevive dentro de una racha de la clase 0, donde la función ejecuta una única instrucción: transferir unidades de la valuación d-ádica a las valuaciones de los primos que dividen a m_0 (Teorema 4.1). Las valuaciones grandes pueden reaparecer, pero cargadas desde la proximidad p-ádica del estado al cero p-ádico de la rama, no transferidas. Esto resuelve el Problema 5.3 del escrito III para los contadores codificados en valuaciones: son contadores de un solo uso. Como segunda parte, se relacionan los ciclos enteros conocidos de la función de Collatz con las aproximaciones racionales de $\log_2 3$: el ciclo de -17 corresponde a la fracción intermedia $11/7$, y una heurística basada en la entropía binaria explica por qué los ciclos enteros son escasos. Se discute el estatus de esa heurística, que es cualitativa, y se corrige su versión ingenua mediante la cota clásica del mínimo de un ciclo. Una enumeración exhaustiva de las palabras de paridades de longitud hasta 22 encuentra exactamente los cinco ciclos enteros conocidos.

1. Introducción

En la construcción de Conway [7, 8], el estado de una máquina de registros se codifica como $N = p_q \prod_j p_j^{r_j}$, y cada instrucción multiplica por una fracción. Los registros son valuaciones: $r_j = \nu_{p_j}(N)$. Todas las ramas son lineales, sin término independiente, y por eso las valuaciones se conservan salvo las modificaciones que cada fracción introduce deliberadamente.

El escrito II [2] mostró que las funciones de tipo primo relativo no admiten secciones de origen único, y el escrito III [3] planteó, como Problema 5.3, si una función de ese tipo puede simular al menos una máquina de un solo contador. Este escrito responde a esa pregunta para la codificación natural de Conway, la de los contadores en valuaciones, y estudia a continuación el origen aritmético de los ciclos enteros de la función de Collatz.

Recordamos que una función de tipo primo relativo con módulo $d \geq 2$ es

$$T(x) = \frac{m_i x - r_i}{d} \qquad \text{si } x \equiv i \pmod{d},$$

con $m_i \neq 0$, $\gcd(m_i, d) = 1$ y $m_i i \equiv r_i \pmod{d}$. Para un primo p y $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\nu_p(x)$ denota la valuación p-ádica, y ponemos $\nu_p(0) = \infty$.

2. La rama lineal

Lema 2.1. *Si $r_i = 0$, entonces $i \equiv 0 \pmod{d}$. En consecuencia, a lo sumo una rama de T es lineal, la de la clase 0, y lo es si y solo si $r_0 = 0$.*

Demostración. Si $r_i = 0$, la condición $m_i i \equiv r_i \pmod{d}$ da $m_i i \equiv 0 \pmod{d}$, y como m_i es invertible módulo d, $i \equiv 0 \pmod{d}$. □

Lema 2.2 (Rachas de la clase 0)**.** *Supongamos $r_0 = 0$ y sea $x \neq 0$. Sea $\nu_d(x)$ el mayor $k \geq 0$ con $d^k \mid x$. Entonces los iterados $x, T(x), \ldots, T^{\nu_d(x)-1}(x)$ están en la clase 0, el iterado $T^{\nu_d(x)}(x)$ no lo está, y*

$$T^j(x) = \frac{m_0^j\, x}{d^j} \qquad (0 \leq j \leq \nu_d(x)).$$

Demostración. Por inducción, mientras los iterados estén en la clase 0 se aplica la rama lineal. El iterado $m_0^j x/d^j$ está en la clase 0 si y solo si $d^{j+1} \mid m_0^j x$, y como $\gcd(m_0, d) = 1$, esto equivale a $d^{j+1} \mid x$, es decir, a $j < \nu_d(x)$. □

Una racha de la clase 0 ejecuta, por tanto, un único bucle de FRACTRAN: *mientras d divida a x, multiplica x por m_0/d*. Para cada primo p, la valuación cambia en cada paso de la racha en la cantidad fija

$$\delta_p = \nu_p(m_0) - \nu_p(d),$$

negativa si $p \mid d$, positiva si $p \mid m_0$ y nula en otro caso.

3. La cota de borrado

Definición 3.1. Para cada primo p sea

$$C_p = \max\{\nu_p(r_i) : r_i \neq 0\},$$

con $C_p = 0$ si todos los r_i no nulos son primos con p.

Teorema 3.2 (Cota de borrado)**.** *Sea p un primo y sea $x \equiv i \pmod{d}$ con $r_i \neq 0$. Si $\nu_p(x) > C_p$, entonces*

$$\nu_p\big(T(x)\big) = \nu_p(r_i) - \nu_p(d) \leq C_p.$$

Demostración. Como $\nu_p(m_i x) \geq \nu_p(x) > C_p \geq \nu_p(r_i)$, la valuación de la diferencia $m_i x - r_i$ es la del término de menor valuación, $\nu_p(r_i)$. Dividir por d resta $\nu_p(d)$. □

Toda rama no lineal borra, pues, las valuaciones grandes: después de ella no queda ninguna huella del valor que tenían.

Proposición 3.3 (Carga)**.** *Sea $x \equiv i \pmod{d}$ con $r_i \neq 0$ y sea p un primo que no divide a m_i. Entonces*

$$\nu_p\big(T(x)\big) = \nu_p\left(x - \frac{r_i}{m_i}\right) - \nu_p(d),$$

donde $r_i/m_i \in \mathbb{Z}_p$ es el cero p-ádico de la rama i, es decir, la preimagen p-ádica de 0 por esa rama.

Demostración. $m_i x - r_i = m_i\,(x - r_i/m_i)$, y m_i es una unidad p-ádica. □

Tras una rama no lineal, las valuaciones grandes pueden reaparecer, pero su valor mide la proximidad p-ádica del estado anterior al cero p-ádico r_i/m_i de la rama, es decir, a la preimagen p-ádica de 0: se cargan a partir de las cifras p-ádicas de x, no se transfieren de valuaciones anteriores.

Ejemplo 3.4 (La función de Collatz)**.** Para T, con $d = 2$, $m = (1, 3)$ y $r = (0, -1)$, se tiene $C_p = 0$ para todo p. La rama lineal es $x \mapsto x/2$, con $\delta_2 = -1$ y $\delta_p = 0$ para p impar: las rachas solo descuentan. La rama impar borra toda valuación impar ($\nu_p(T(x)) = 0$ si $p \mid x$, p impar), que es la afirmación $\gcd(x, T(x)) = 1$ del escrito I [1]. Para $p = 2$, la Proposición 3.3 da $\nu_2(3x + 1) = \nu_2(x - \theta)$ con $\theta = -1/3$, la fórmula de la longitud de las rachas del escrito sobre parejas y ternas [5].

Ejemplo 3.5 (Una transferencia)**.** La función $S(x) = 3x/2$ para x par y $S(x) = (x-1)/2$ para x impar es de tipo primo relativo, con $m = (3, 1)$ y $r = (0, 1)$. Partiendo de $x = 2^{10} \cdot 5$, la racha de la clase 0 dura diez pasos y lleva el estado a $3^{10} \cdot 5 = 295\,245$, con $\nu_3 = 10$: es el programa de suma de Conway. El paso siguiente es impar y da 147 622, con $\nu_3 = 0$ y $\nu_5 = 0$: el contador acumulado se ha borrado.

4. Contadores de un solo uso

Teorema 4.1. *Sea T de tipo primo relativo, sea p un primo y sea (x_t) una órbita de T con $x_t \neq 0$. Supongamos que $\nu_p(x_t) > C_p$ para cierto t.*

1. *Si $r_0 \neq 0$ o $x_t \not\equiv 0 \pmod{d}$, entonces $\nu_p(x_{t+1}) \leq C_p$.*
2. *Si $r_0 = 0$ y $x_t \equiv 0 \pmod{d}$, sea $s = t + \nu_d(x_t)$ el final de la racha de la clase 0. Para $t \leq j \leq s$,*
$$\nu_p(x_j) = \nu_p(x_t) + (j - t)\,\delta_p,$$
y $\nu_p(x_{s+1}) \leq C_p$ siempre que $\nu_p(x_s) > C_p$.

Demostración. El caso 1 es el Teorema 3.2, pues la rama aplicada no es lineal. En el caso 2, el Lema 2.2 da la forma de los iterados dentro de la racha y la variación de la valuación; en x_s, que ya no está en la clase 0, se aplica una rama no lineal y de nuevo el Teorema 3.2. □

Corolario 4.2. *En una función de tipo primo relativo, un valor de una valuación mayor que C_p sobrevive, a lo sumo, hasta el final de la racha de la clase 0 en que se encuentra, y durante esa racha solo puede ejecutarse el bucle "mientras $d \mid x$, multiplica por m_0/d". Ningún contador codificado en una valuación puede conservar un valor mayor que C_p a través de una instrucción distinta de ese bucle.*

Observación 4.3 (Estado del Problema 5.3 del escrito III). Una máquina de contadores con control no trivial necesita conservar el valor de un contador mientras ejecuta otras instrucciones, por ejemplo mientras comprueba si otro contador es cero. El Corolario 4.2 muestra que eso es imposible para contadores codificados en valuaciones, más allá de una constante. La memoria de las funciones de tipo primo relativo en las valuaciones es de *un solo uso*: se carga desde las cifras del estado (Proposición 3.3), se descuenta o se transfiere en una única racha y se borra. Esto resuelve el Problema 5.3 para la codificación de Conway. No excluye codificaciones de otro tipo, por ejemplo en la magnitud del estado o en patrones de cifras, que siguen abiertas.

Observación 4.4. En un programa FRACTRAN todas las ramas son lineales y C_p no desempeña ningún papel; por eso las valuaciones funcionan como registros permanentes. El Lema 2.1 muestra que la condición de tipo primo relativo reduce el número de ramas lineales a una como máximo, y el Teorema 3.2 convierte cada rama restante en un borrado. Es una segunda explicación, local y elemental, de la exclusión del mecanismo de Conway que el escrito II obtuvo por un argumento de recurrencia.

5. Los ciclos enteros y las aproximaciones de $\log_2 3$

En esta sección T es la función de Collatz acelerada. Un ciclo de T de longitud K con $o \geq 1$ pasos impares y elementos impares $a_1, \ldots, a_o$ cumple [1]

$$2^K = \prod_{j=1}^{o} \Big(3 + \frac{1}{a_j}\Big).$$

Proposición 5.1. *Si el ciclo está formado por enteros positivos,* $2^K > 3^o$*. Si está formado por enteros negativos,* $2^K < 3^o$*.*

Demostración. Si $a_j \geq 1$, cada factor es mayor que 3. Si $a_j \leq -1$, cada factor está en $[2, 3)$. □

Así, los ciclos positivos corresponden a fracciones K/o mayores que $\log_2 3 \approx 1{,}58496$, y los negativos a fracciones menores. El desarrollo en fracción continua es

$$\log_2 3 = [1; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, \ldots],$$

con reducidas 1, 2, 3/2, 8/5, 19/12, 65/41, etc.

(K, o)	$2^K - 3^o$	K/o	Posición respecto de $\log_2 3$	Ciclo
$(1, 1)$	-1	1	reducida, por debajo	$\{-1\}$
$(2, 1)$	1	2	reducida, por encima	$\{1, 2\}$
$(3, 2)$	-1	1,5	reducida, por debajo	$\{-5, -7, -10\}$
$(11, 7)$	-139	1,571…	intermedia, por debajo	ciclo de -17

La fracción $11/7 = (3 + 8)/(2 + 5)$ es la fracción intermedia entre las reducidas 3/2 y 19/12, construida con la reducida 8/5.

Los tres primeros son unimodulares y proceden de la ecuación de Catalan [4]. El ciclo de -17 ya apareció en la Observación 3.3 del escrito IV como el único ciclo conocido que no es unimodular; aquí se analiza con más detalle. No es unimodular: su punto -17 se escribe $-17 = 2363/(-139)$ con $2363 = 17 \cdot 139$, y es entero porque 139 divide al numerador $\varphi(s)$ de su palabra.

5.1. Una heurística de entropía binaria

Para cada par (K, o) hay $\binom{K}{o}$ palabras, que forman aproximadamente $\binom{K}{o}/K$ collares (clases por rotación). Adoptamos el siguiente *modelo*: los numeradores $\varphi(s)$ de los distintos collares se comportan como enteros aleatorios independientes y uniformemente distribuidos módulo $D = |2^K - 3^o|$. Bajo este supuesto, el número esperado de collares con ciclo entero es

$$E(K, o) \approx \frac{1}{K\,D} \binom{K}{o}.$$

Para los pares unimodulares el valor $E = 1$ no es una predicción del modelo sino un hecho: todo collar da un ciclo entero. Para los demás pares, el modelo predice *cuántos* ciclos cabe esperar, no *cuáles*: no distingue un collar de otro.

Para los pares con o/K cerca de $\log 2/\log 3 \approx 0{,}631$ se tiene $\binom{K}{o} \approx 2^{K H(o/K)}$, donde $H(u) = -u \log_2 u - (1 - u) \log_2(1 - u)$ es la entropía binaria y $H(\log 2/\log 3) \approx 0{,}950$, y $D \approx 2^K \varepsilon$ con $\varepsilon = |K \log 2 - o \log 3|$. Así,

$$E(K, o) \approx \frac{2^{-0{,}05\,K}}{K\,\varepsilon}.$$

El déficit de entropía $1 - H(\log 2/\log 3) \approx 0{,}05$ bits por paso es la razón heurística de la escasez de ciclos.

El modelo ingenuo no basta. Si se suma $E(K,o)$ sobre *todos* los pares, la suma diverge: para o/K claramente menor que $\log 2/\log 3$ se tiene $D \approx 2^K$, y la suma sobre o de $\binom{K}{o}/(K\,2^K)$ es del orden de $1/K$, cuya serie diverge. El modelo ingenuo predeciría infinitos ciclos. El fallo está en que ignora el tamaño de los elementos del ciclo, que la ecuación de ciclo controla.

Lema 5.2 (Cota del mínimo)**.** *Sea un ciclo de T formado por enteros positivos, de longitud K con o pasos impares, y sea $\varepsilon = K\log 2 - o\log 3 > 0$. Entonces su elemento mínimo m cumple*

$$m < \frac{o}{3\,\varepsilon}.$$

Demostración. El elemento mínimo de un ciclo de T es impar, porque la mitad de un elemento par es menor que él. De la ecuación de ciclo,

$$\frac{2^K}{3^o} = \prod_{j=1}^{o}\Big(1+\frac{1}{3a_j}\Big) \le \Big(1+\frac{1}{3m}\Big)^o,$$

y tomando logaritmos, $\varepsilon \le o\log(1+1/(3m)) < o/(3m)$. □

Este argumento es el punto de partida de las cotas clásicas de longitud de ciclos [9, 12]. Combinado con la verificación computacional de la conjetura, que alcanza valores muy superiores a 10^{18} [11], excluye todos los pares (K,o) para los que $o/(3\varepsilon)$ no supera la cota verificada. A título de ilustración, hemos calculado que para $K \le 10^5$ el máximo de $o/(3\varepsilon)$ es aproximadamente $1{,}45\cdot 10^9$, alcanzado en $(K,o) = (75\,235,\ 47\,468)$; por tanto, no hay ciclos positivos no triviales con $K \le 10^5$. Las cotas conocidas son mucho más fuertes [9, 12].

El modelo corregido. Restringido a los pares compatibles con la cota del mínimo y la verificación, es decir, aquellos con ε extraordinariamente pequeño, el modelo da $E(K,o) \approx 2^{-0{,}05K}/(K\varepsilon)$. Por la teoría de Baker de formas lineales en logaritmos [6], ε está acotado inferiormente por una potencia negativa de K, de modo que el factor exponencial domina y la suma converge, con términos despreciables para los pares que sobreviven a la verificación.

Estatus de la heurística. La conclusión es *cualitativa*: bajo el supuesto de independencia y uniformidad de los numeradores, cabe esperar un número finito de ciclos enteros, concentrados en longitudes pequeñas. La convergencia es robusta en un sentido preciso, porque un decaimiento exponencial vence a cualquier cota polinómica, por pobre que sea la constante de Baker. Pero los valores numéricos de $E(K,o)$ dependen por completo del supuesto de independencia, que no está demostrado y que podría fallar precisamente por estructuras aritméticas como las del Problema 6.3. Esta línea de razonamiento es conocida en la literatura [10]; la presentamos para situar el ciclo de -17.

(K, o)	$2^K - 3^o$	$E(K, o)$	Ciclos enteros primitivos
$(2, 1)$	1	1 (exacto)	1
$(3, 2)$	-1	1 (exacto)	1
$(5, 3)$	5	0,40	0
$(8, 5)$	13	0,54	0
$(11, 7)$	-139	0,22	1
$(13, 8)$	1631	0,06	0
$(16, 10)$	6487	0,08	0
$(19, 12)$	-7153	0,37	0
$(21, 13)$	$502\,829$	0,02	0
$(22, 14)$	$-588\,665$	0,02	0

En esta tabla, el ciclo de -17 aparece con una esperanza heurística de algo más de un quinto: dentro del modelo, un golpe de suerte aritmético, pero no uno extraordinario. El modelo no explica por qué ese collar concreto, y no otro, da un ciclo entero; esa es la pregunta del Problema 6.3.

Observación 5.3 (Verificación computacional). Entre todas las palabras de paridades de longitud $K \leq 22$, las que generan ciclos enteros de T son exactamente las de los cinco ciclos conocidos, $\{0\}$, $\{-1\}$, $\{1, 2\}$, $\{-5, -7, -10\}$ y el ciclo de -17, y sus potencias. El cálculo es directo: para las $2^{23} - 2$ palabras no vacías de longitud $K \leq 22$ se calcula el numerador $\varphi(s)$ mediante $\varphi(s0) = \varphi(s)$ y $\varphi(s1) = 3\varphi(s) + 2^{|s|}$, se comprueba si $2^K - 3^o$ lo divide y se agrupan los puntos enteros obtenidos en órbitas.

6. Preguntas abiertas

Problema 6.1. *¿Puede una función de tipo primo relativo simular una máquina de un solo contador con el contador codificado en la magnitud del estado o en un patrón de cifras, en lugar de en una valuación?*

Problema 6.2. *¿Existe una función de tipo primo relativo cuyo mecanismo de carga (Proposición 3.3) permita encadenar rachas de modo que el valor cargado en cada una dependa de forma controlada del valor de la anterior?*

Problema 6.3. *¿Por qué divide* 139 *a los numeradores del ciclo de* -17*? Más en general, ¿qué propiedad aritmética de un collar de palabras hace que* $2^K - 3^o$ *divida a su numerador cuando* $|2^K - 3^o| > 1$*?*

7. Resumen

Resultado	**Estatus**	**Relación con los problemas**
Solo la clase 0 puede ser lineal (Lema 2.1); sus rachas ejecutan un único bucle (Lema 2.2)	Demostrado	Base del Problema 5.3 del escrito III
Cota de borrado (Teorema 3.2)	Demostrado	Resuelve el Problema 5.3 para valuaciones
Carga desde la proximidad p-ádica (Proposición 3.3)	Demostrado	Motiva el Problema 6.2
Contadores de un solo uso (Teorema 4.1)	Demostrado	Deja abierto el Problema 6.1
Signo de los ciclos y aproximaciones de $\log_2 3$ (Proposición 5.1)	Demostrado	Sitúa el ciclo de -17
Cota del mínimo (Lema 5.2)	Demostrado (argumento clásico)	Corrige la heurística
Heurística de entropía binaria	Cualitativa, bajo supuesto de independencia	Motiva el Problema 6.3
Ciclos enteros con $K \leq 22$	Verificación computacional	Confirma los cinco ciclos conocidos

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. I. Estado de la cuestión y preguntas abiertas*, septiembre de 2026.

[2] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. II. Secciones de origen único y funciones de tipo primo relativo*, septiembre de 2026.

[3] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. III. Conservación de la medida y computación*, septiembre de 2026.

[4] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. IV. Catalan, los dos orígenes y la contracción en la iteración de Collatz*, septiembre de 2026.

[5] M. Cerdá Bennassar, *Parejas, ternas y reservas. Estructura aritmética del modelo material de Collatz*, septiembre de 2026.

[6] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975.

[7] J. H. Conway, Unpredictable iterations, en *Proceedings of the 1972 Number Theory Conference*, Universidad de Colorado, Boulder, 1972, 49–52.

[8] J. H. Conway, FRACTRAN: a simple universal programming language for arithmetic, en T. M. Cover y B. Gopinath (eds.), *Open Problems in Communication and Computation*, Springer, 1987, 4–26.

[9] S. Eliahou, The $3x+1$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths, *Discrete Mathematics* 118 (1993), 45–56.

[10] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem: an overview, en J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x+1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010.

[11] T. Oliveira e Silva, Empirical verification of the $3x+1$ and related conjectures, en J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x+1$ *Problem*, American Mathematical Society, 2010, 189–207.

[12] J. Simons y B. de Weger, Theoretical and computational bounds for m-cycles of the $3n+1$ problem, *Acta Arithmetica* 117 (2005), 51–70.