Palabras de Grundy en las órbitas de Collatz

Un lenguaje de tipo finito y el árbol inverso de 1

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Se leen los valores de Grundy del juego de Collatz con atajo, recogidos en la OEIS como A400826, a lo largo de las órbitas de la función ordinaria de Collatz, y se estudia el conjunto de palabras de longitud k que se obtienen. El factor 00 solo aparece en el paso $1 \to 4$. Las palabras que no lo contienen son exactamente las que evitan 00, 11, 12, 22 y 202; forman un lenguaje de tipo finito, reconocido por un autómata de siete estados, y su número es $a(k+2)$, donde a es la sucesión A097333, que cumple $a(n) = a(n-1) + a(n-3)$. La demostración combina ese autómata con la realización aritmética de cualquier sucesión finita de exponentes entre impares. Cada una de esas palabras aparece en una clase residual de densidad positiva. Las palabras que contienen 00 están formadas por la palabra de un número que llega a 1 en exactamente p pasos seguida de la del ciclo trivial, de modo que la complejidad total es $a(k+2) + \sum_{p \le k-2} B(p)$, donde $B(p)$ cuenta las palabras distintas de los números con tiempo total de parada p. Esta segunda parte depende del árbol inverso de 1; se calcula exactamente hasta $p = 40$ y no se conoce para ella una fórmula cerrada. Ningún resultado depende de la conjetura de Collatz.

1. Introducción

En [1] se estudia el juego imparcial con atajo asociado a la iteración de Collatz: desde n par se pasa a $n/2$, desde $n > 1$ impar se puede pasar a $3n+1$ o directamente a $(3n+1)/2$, y la posición 1 no tiene opciones. Cuando la órbita de n llega a 1, el Teorema 3.3 de [1] da en forma cerrada el valor de Grundy de n. La sección 3.1 de [1] define con la misma fórmula una función aritmética γ sobre todos los enteros positivos, sin hipótesis de terminación, y el Teorema 3.8 demuestra que es la única solución global de las ecuaciones mex con la condición $\gamma(1) = 0$. Sus valores forman la sucesión A400826 de la OEIS [3]. En [2] se determina la complejidad de factores de γ, es decir, el número de bloques distintos de valores $\gamma(n)\gamma(n+1)\cdots\gamma(n+k-1)$ sobre enteros consecutivos.

Aquí se lee γ a lo largo de las órbitas. Sea C la función de Collatz, $C(n) = n/2$ si n es par y $C(n) = 3n+1$ si n es impar, y sea

$$W_k(n) = \gamma(n)\,\gamma(C(n))\cdots\gamma(C^{k-1}(n)), \qquad P_C(k) = \bigl|\{W_k(n) : n \ge 1\}\bigr|.$$

Si la órbita de n llega a 1, $W_k(n)$ es la sucesión de los valores de Grundy de las posiciones que recorre una partida del juego con atajo en la que ambos jugadores hacen solo jugadas simples. Las palabras $W_k(n)$ están definidas para todo n y todo k, y ningún resultado de este escrito depende de la conjetura de Collatz.

Se demuestra que el factor 00 solo aparece en el paso $1 \to 4$ (lema 4.1), que las palabras sin ese factor forman un lenguaje de tipo finito con un número de palabras dado por la sucesión A097333 (teoremas 4.4 y 5.1), y que las palabras con 00 se describen mediante el árbol inverso de 1 (teorema 7.1). La primera parte depende solo de propiedades locales de las valoraciones; la segunda registra qué ramas del árbol de Collatz llegan a 1.

2. Definiciones y bloques entre impares

Para un entero positivo n escribimos $\nu_2(n)$ para su valoración 2-ádica. Según [1, sección 3.1],

$$\gamma(n) = \begin{cases} \nu_2(n) \bmod 2, & n = 2^v,\ v \geq 0, \\ 1 - (\nu_2(n) \bmod 2), & n \text{ par, no potencia de 2}, \\ 2, & n > 1 \text{ impar},\ \nu_2(n+1) \text{ impar}, \\ 1, & n > 1 \text{ impar},\ \nu_2(n+1) \text{ par}. \end{cases}$$

En particular $\gamma(1) = 0$. Una palabra es una sucesión finita de símbolos de $\{0, 1, 2\}$, y $W_0(n)$ es la palabra vacía.

Lema 2.1. *Sean $u, v > 1$ impares con $3u + 1 = 2^e v$ y $e \geq 1$. Entonces*

$$\gamma(u) = \begin{cases} 3 - \gamma(v), & e = 1, \\ 2, & e \geq 2, \end{cases} \qquad \gamma(2^j v) = \begin{cases} 0, & j \text{ impar}, \\ 1, & j \text{ par}, \end{cases} \quad (1 \leq j \leq e).$$

Demostración. Si $e = 1$, se tiene $v + 1 = \frac{3}{2}(u + 1)$, luego $\nu_2(u + 1) = \nu_2(v + 1) + 1$ y las etiquetas 1 y 2 se intercambian. Si $e \geq 2$, entonces $u \equiv 1 \pmod 4$, $\nu_2(u + 1) = 1$ y $\gamma(u) = 2$. Como $v > 1$ es impar, los números $2^j v$ no son potencias de 2 y su valoración es j. □

Lema 2.2. *Sean $q \geq 0$, $e_1, \ldots, e_q \geq 1$ y $b \in \{1, 2\}$. Existen infinitas sucesiones de impares $n_0, \ldots, n_q > 1$ tales que*

$$3n_{i-1} + 1 = 2^{e_i} n_i \quad (1 \leq i \leq q), \qquad \gamma(n_q) = b.$$

Demostración. Para $q = 0$ basta tomar $n_0 \equiv 1 \pmod 4$ si $b = 2$ y $n_0 \equiv 3 \pmod 8$ si $b = 1$, con $n_0 > 1$. Sea $q \geq 1$. Dado n_q, definimos hacia atrás los racionales $n_{i-1} = (2^{e_i} n_i - 1)/3$. Se tiene $n_i = (2^{E_i} n_q - R_i)/3^{q-i}$, con $E_i = e_{i+1} + \cdots + e_q$ y R_i entero que solo depende de los exponentes. Como 2 es invertible módulo 3^q, la condición $n_0 \in \mathbb{Z}$ define una única clase de n_q módulo 3^q, y por el teorema chino de los restos podemos imponer además $n_q \equiv 1 \pmod 4$ si $b = 2$, o $n_q \equiv 3 \pmod 8$ si $b = 1$; en ambos casos n_q es impar y $\gamma(n_q) = b$.

Todos los n_i son entonces enteros. En efecto, si n_{i-1} es entero, $n_i = (3n_{i-1} + 1)/2^{e_i}$ es un racional cuyo denominador es una potencia de 2, y por la expresión anterior su denominador es también una potencia de 3; por tanto es entero. Para $i < q$, $n_i = (2^{e_{i+1}} n_{i+1} - 1)/3$ tiene numerador impar, así que n_i es impar, y de ahí $\nu_2(3n_{i-1} + 1) = e_i$ exactamente. Por último, $n_{i-1} \geq (2n_i - 1)/3$ da, por inducción, $n_i \geq (2/3)^{q-i} n_q - 1$; si $n_q > 3^q$, todos los n_i son mayores que 1. La clase de n_q contiene infinitos elementos mayores que 3^q. □

3. Un autómata de siete estados

Los estados siguientes describen la posición de un número dentro de un bloque entre dos impares consecutivos de la órbita. Cada estado emite la etiqueta indicada.

Estado	Etiqueta	Significado	Sucesores
A	1	impar de etiqueta 1	B
B	0	par de valoración 1 tras A	C
C	2	impar de etiqueta 2	D, E, G
D	0	par de valoración 1 tras C	A
E	1	par de valoración par	F
F	0	par de valoración impar, tras E	A, C, E
G	0	par de valoración impar ≥ 3 tras C	E

Un impar de etiqueta 1 cumple $u \equiv 3 \pmod 4$, de modo que $e = 1$, y por el lema 2.1 el impar siguiente tiene etiqueta 2: es el camino $A \to B \to C$. Desde un impar de etiqueta 2 caben tres posibilidades: $e = 1$, y el impar siguiente tiene etiqueta 1 ($C \to D \to A$); $e \geq 2$ par ($C \to E$); o $e \geq 3$ impar ($C \to G \to E$). Dentro de un bloque con $e \geq 2$ las valoraciones decrecen de uno en uno y alternan los estados E y F; desde F el bloque continúa ($F \to E$) o termina, si la valoración es 1, en un impar de cualquier etiqueta ($F \to A$, $F \to C$), pues tras un bloque con $e \geq 2$ el lema 2.1 no impone condición al impar siguiente.

Lema 3.1. *Todo camino finito del autómata es la sucesión de estados de un tramo de órbita que no contiene* 1 *ni potencias de* 2*, y sus etiquetas son las del tramo.*

Demostración. Todo estado par lleva, siguiendo sus sucesores, a A o a C, y procede, siguiendo sus predecesores, de A o de C: B procede de A; D, E y G, de C; y F, de E. Podemos, pues, ampliar el camino por ambos extremos hasta que empiece y termine en A o C. El camino ampliado determina los exponentes $e_1, \ldots, e_q$ de los bloques sucesivos y la etiqueta b del último impar. El lema 2.2 da impares $n_0, \ldots, n_q > 1$ con esos exponentes y $\gamma(n_q) = b$. Por el lema 2.1, las etiquetas de los pares de cada bloque son las de los estados, y las de los impares se obtienen hacia atrás a partir de b con la misma regla que impone el autómata. Ningún número del tramo es 1 ni potencia de 2, y el camino original es un subtramo. □

4. El lenguaje sin 00

Lema 4.1. *Si $\gamma(x) = \gamma(C(x)) = 0$, entonces $x = 1$. En consecuencia, el factor* 00 *aparece en $W_k(n)$ exactamente en las posiciones i con $C^i(n) = 1$ e $i \leq k - 2$.*

Demostración. Si $\gamma(x) = 0$ y $x \neq 1$, o bien x es par, no potencia de 2 y de valoración impar, o bien $x = 2^v$ con $v \geq 2$ par. En el primer caso, si la valoración es 1, $C(x)$ es impar mayor que 1 y su etiqueta es 1 o 2; si es al menos 3, $C(x)$ es par, no potencia de 2 y de valoración par, con etiqueta 1. En el segundo caso $C(x) = 2^{v-1}$ tiene etiqueta 1. Recíprocamente, $\gamma(1) = \gamma(4) = 0$. □

Lema 4.2. *Ninguna palabra $W_k(n)$ contiene los factores* 11*,* 12*,* 22 *ni* 202*.*

Demostración. Sea $\gamma(x) = 1$. Si $x > 1$ es impar, $\nu_2(x + 1) \geq 2$, luego $x \equiv 3 \pmod 4$ y $C(x) = 3x + 1$ es el doble de un impar mayor que 1, con etiqueta 0. Si x es par y no es potencia

de 2, su valoración es par y $x/2$ tiene valoración impar y etiqueta 0. Si $x = 2^v$, v es impar y $\gamma(2^{v-1}) = 0$. Esto excluye 11 y 12. La etiqueta 2 solo corresponde a impares, cuyo sucesor es par; esto excluye 22.

Sea $\gamma(x) = 2$, con $x > 1$ impar, y sea $e = \nu_2(3x + 1)$. Si $e = 1$, la palabra sigue con 0 y con la etiqueta del impar $(3x + 1)/2 > 1$, que es 1 por el lema 2.1. Si $e \geq 3$ es impar, $3x + 1$ no es potencia de 2, porque $2^e \equiv 2 \pmod 3$; su etiqueta es 0, y la de $(3x + 1)/2$, de valoración par, es 1. Si $e \geq 2$ es par y $3x + 1$ no es potencia de 2, su etiqueta es 1. Si $3x + 1 = 2^e$, con e necesariamente par, las etiquetas siguientes son $\gamma(2^e) = 0$ y $\gamma(2^{e-1}) = 1$. En ningún caso aparece 202. □

Para la inclusión contraria leemos las palabras en el autómata. Para una palabra w, sea $S(w)$ el conjunto de estados en que puede terminar un camino del autómata cuyas etiquetas forman w.

Lema 4.3. *Sea w una palabra no vacía que evita* 00, 11, 12, 22 *y* 202. *Entonces $S(w)$ es no vacío y depende solo del final de w:*

$$S(w) = \begin{cases} \{A, E\}, & w \text{ termina en } 20, \\ \{A, C, E\}, & w \text{ termina en } 0 \text{ y no en } 20, \\ \{F\}, & w \text{ termina en } 21, \\ \{B, F\}, & w \text{ termina en } 1 \text{ y no en } 21, \\ \{D, E, G\}, & w \text{ termina en } 2. \end{cases}$$

Además, $S(w)$ es vacío para toda palabra que contenga alguno de esos cinco factores.

Demostración. Para las palabras de longitud 1 se comprueba directamente: los estados de etiqueta 0, 1 y 2 son $\{B, D, F, G\}$, $\{A, E\}$ y $\{C\}$, y sus sucesores son $\{A, C, E\}$, $\{B, F\}$ y $\{D, E, G\}$. Al leer un símbolo más se pasa al conjunto de los sucesores de los estados de $S(w)$ que emiten ese símbolo, lo que da la tabla siguiente, en la que $\varnothing$ indica el conjunto vacío:

$S(w)$	0	1	2
$\{A, C, E\}$	$\varnothing$	$\{B, F\}$	$\{D, E, G\}$
$\{A, E\}$	$\varnothing$	$\{B, F\}$	$\varnothing$
$\{B, F\}$	$\{A, C, E\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{F\}$	$\{A, C, E\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{D, E, G\}$	$\{A, E\}$	$\{F\}$	$\varnothing$

Los conjuntos vacíos aparecen exactamente al formar uno de los factores 00, 11, 12, 22 o 202, y en los demás casos el conjunto obtenido es el que corresponde al nuevo final de la palabra. La afirmación se sigue por inducción sobre la longitud. □

Teorema 4.4. *Para todo $k \geq 1$, el conjunto L_k^* de las palabras $W_k(n)$, $n \geq 1$, que no contienen* 00 *es*

$$L_k^* = \{w \in \{0, 1, 2\}^k : \ w \text{ evita } 00, 11, 12, 22 \text{ y } 202\}.$$

Cada palabra de L_k^* es la palabra de un tramo de órbita que no contiene 1 *ni potencias de* 2.

Demostración. Una palabra de L_k^* no contiene 00 por definición, y los demás factores están excluidos por el lema 4.2. Recíprocamente, si w evita los cinco factores, el lema 4.3 da un camino del autómata con etiquetas w, y el lema 3.1 lo realiza en una órbita sin pasar por 1 ni por potencias de 2. □

5. Enumeración

Sea $A(k) = |L_k^*|$. Clasificamos las palabras del lenguaje según las cinco clases finales del lema 4.3: sean x_k, y_k, u_k, v_k y w_k los números de palabras de longitud k que terminan, respectivamente, en 0 sin terminar en 20, en 20, en 1 sin terminar en 21, en 21 y en 2. Por la tabla de la demostración del lema 4.3,

$$x_{k+1} = u_k + v_k, \quad y_{k+1} = w_k, \quad u_{k+1} = x_k + y_k, \quad v_{k+1} = w_k, \quad w_{k+1} = x_k,$$

con $(x_1, y_1, u_1, v_1, w_1) = (1, 0, 1, 0, 1)$.

Teorema 5.1. *Se tiene $A(1) = 3$, $A(2) = 5$, $A(3) = 7$ y $A(k) = A(k-1) + A(k-3)$ para $k \geq 4$. En consecuencia,*

$$\sum_{k\geq 1} A(k)x^k = \frac{3x + 2x^2 + 2x^3}{1 - x - x^3}, \qquad A(k) = a(k+2) = \sum_{j=0}^{k+2} \binom{k+2-j}{\lfloor j/2 \rfloor},$$

donde a es la sucesión A097333.

Demostración. Las palabras de las clases $\{A, C, E\}$ y $\{D, E, G\}$ admiten dos prolongaciones, y las de las otras tres clases, una. Por tanto $A(k) = A(k-1) + x_{k-1} + w_{k-1}$. Aplicando dos veces las relaciones anteriores,

$$x_{k-1} + w_{k-1} = (u_{k-2} + v_{k-2}) + x_{k-2} = (x_{k-3} + y_{k-3} + w_{k-3}) + (u_{k-3} + v_{k-3}) = A(k-3)$$

para $k \geq 4$. Los valores iniciales se obtienen de las relaciones, y la función generadora, de la recurrencia. La sucesión A097333 está definida por $a(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n-j}{\lfloor j/2 \rfloor}$ y tiene función generadora $(1 + x)/(1 - x - x^3)$ [3]; cumple, pues, la misma recurrencia, y $a(3) = 3$, $a(4) = 5$, $a(5) = 7$. □

Los primeros valores son $3, 5, 7, 10, 15, 22, 32, 47, 69, 101, 148, 217, 318, 466, 683, 1001, \ldots$ Como $(1 + x)/(1 - x - x^3)$ es el producto de $1 + x$ por la función generadora de A000930, se tiene también $A(k) = N(k+2)+N(k+1)$, donde N es la sucesión A000930 [3]. La razón $A(k+1)/A(k)$ tiende a la raíz real de $\lambda^3 = \lambda^2 + 1$, aproximadamente 1,4656.

6. Clases residuales

Proposición 6.1. *Cada palabra $w \in L_k^*$ es la palabra $W_k(m)$ de todos los enteros positivos m de una clase residual módulo una potencia de 2. En particular, el conjunto de esos m tiene densidad positiva.*

Demostración. Por el teorema 4.4 existe n con $W_k(n) = w$ cuyos k primeros iterados no son 1 ni potencias de 2. Sea H el mayor de ellos y sea B tal que $2^B > H + 1$. Si $m \equiv n \pmod{2^{B+k}}$, los iterados $C^j(m)$ y $C^j(n)$ tienen la misma paridad y son congruentes módulo 2^{B+k-j} para $j < k$, pues cada paso conserva la congruencia o reduce su módulo a la mitad. Son, por tanto, congruentes módulo 2^B. Como $C^j(n)$ y $C^j(n) + 1$ son menores que 2^B, sus valoraciones son menores que B y coinciden con las de $C^j(m)$ y $C^j(m) + 1$. Además, $C^j(m)$ no es potencia de 2: una potencia de 2 menor que 2^B congruente con $C^j(n)$ módulo 2^B sería igual a $C^j(n)$, y una potencia mayor es congruente con 0. Las etiquetas coinciden, y la clase tiene densidad $2^{-(B+k)}$. □

7. Complejidad total y árbol inverso de 1

Para $n \geq 1$ sea $d(n)$ el menor $p \geq 0$ con $C^p(n) = 1$, si existe, y para $p \geq 0$ sean

$$M(p) = \big|\{n \geq 1 : d(n) = p\}\big|, \qquad B(p) = \big|\{W_p(n) : d(n) = p\}\big|.$$

Como cada preimagen de m por C es $2m$ o $(m-1)/3$, se tiene $n \leq 2^{d(n)}$, y ambos conjuntos son finitos. La sucesión M es A005186 [3], y $B(p) \leq M(p)$.

Teorema 7.1. *Para todo $k \geq 1$,*

$$P_C(k) = a(k+2) + \sum_{p=0}^{k-2} B(p),$$

donde la suma es vacía si $k = 1$.

Demostración. Las palabras sin 00 son $a(k+2)$ por los teoremas 4.4 y 5.1. Sea $W_k(n)$ una palabra con 00. Por el lema 4.1, la órbita de n pasa por 1 en alguna posición $i \leq k-2$; sea p la primera. Entonces $d(n) = p$, y como la órbita sigue después por el ciclo $1, 4, 2$,

$$W_k(n) = W_p(n)\, u_{k-p},$$

donde u_j es el prefijo de longitud j de $001001\cdots$. La palabra $W_p(n)$ no contiene 00, por el lema 4.1, y si $p \geq 1$ termina en $\gamma(2) = 1$, porque el único predecesor de 1 es 2. Por tanto, el primer factor 00 de $W_k(n)$ empieza en la posición p, y la palabra determina p y $W_p(n)$. Recíprocamente, para cada $p \leq k-2$ y cada n con $d(n) = p$, la palabra $W_k(n)$ contiene 00 y es de esa forma. Las palabras con 00 están, pues, en biyección con los pares formados por un $p \leq k-2$ y una palabra de $\{W_p(n) : d(n) = p\}$. □

Comentario 7.2. Por el teorema anterior, $P_C(k+1) - P_C(k) = a(k+3) - a(k+2) + B(k-1)$ para $k \geq 1$, de modo que la complejidad total determina por diferencias la contribución del árbol inverso.

Los valores de $B(p)$ se obtienen recorriendo el árbol inverso de 1 por niveles. Cada m tiene la preimagen $2m$, y también la preimagen impar $(m-1)/3$ cuando $m \equiv 4 \pmod 6$ y $m > 4$; para $m = 4$ esa preimagen es 1, que ya está en el nivel 0. Distintos números de un mismo nivel pueden dar la misma palabra. La primera coincidencia está en $p = 7$: $W_7(3) = W_7(20) = 1020101$, porque las etiquetas no distinguen un impar de etiqueta 1, como 3, de un par de valoración 2, como 20. La tabla 1 recoge $M(p)$, $B(p)$ y la razón $\rho(p) = B(p)/M(p)$ para $p \leq 40$, y la tabla 2, los primeros valores de $P_C(k)$.

p	$M(p)$	$B(p)$	$\rho(p)$	p	$M(p)$	$B(p)$	$\rho(p)$	p	$M(p)$	$B(p)$	$\rho(p)$
0	1	1	1,000	14	18	13	0,722	28	460	327	0,711
1	1	1	1,000	15	24	17	0,708	29	578	419	0,725
2	1	1	1,000	16	29	21	0,724	30	732	531	0,725
3	1	1	1,000	17	36	25	0,694	31	926	670	0,724
4	1	1	1,000	18	44	32	0,727	32	1174	847	0,721
5	2	2	1,000	19	58	41	0,707	33	1489	1067	0,717
6	2	2	1,000	20	72	50	0,694	34	1879	1350	0,718
7	4	3	0,750	21	91	63	0,692	35	2365	1698	0,718
8	4	3	0,750	22	113	80	0,708	36	2988	2149	0,719
9	6	5	0,833	23	143	102	0,713	37	3780	2701	0,715
10	6	5	0,833	24	179	126	0,704	38	4788	3414	0,713
11	8	7	0,875	25	227	161	0,709	39	6049	4295	0,710
12	10	9	0,900	26	287	205	0,714	40	7628	5408	0,709
13	14	11	0,786	27	366	263	0,719				

Cuadro 1: Números con tiempo total de parada p y palabras distintas que producen.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(k+2)$	3	5	7	10	15	22	32	47	69	101
$\sum B(p)$	0	1	2	3	4	5	7	9	12	15
$P_C(k)$	3	6	9	13	19	27	39	56	81	116
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a(k+2)$	148	217	318	466	683	1001	1467	2150	3151	4618
$\sum B(p)$	20	25	32	41	52	65	82	103	128	160
$P_C(k)$	168	242	350	507	735	1066	1549	2253	3279	4778

Cuadro 2: Descomposición de la complejidad total según el teorema 7.1.

No se conoce una fórmula cerrada para $B(p)$. Con los 41 valores de la tabla, el algoritmo de Berlekamp–Massey muestra que ninguna recurrencia lineal de coeficientes constantes y orden a lo sumo 20 los genera todos; esto no excluye una recurrencia de orden mayor. Hay una razón estructural para esperar que el recuento sea irregular: la existencia de las ramas del árbol inverso depende de restos módulo 3, pues m solo tiene preimagen impar si $m \equiv 4 \pmod 6$, mientras que las etiquetas dependen de valoraciones 2-ádicas. Por ejemplo, $21 = (2^6 - 1)/3$ es múltiplo de 3 y no tiene preimagen impar, de modo que sus preimágenes forman la sola cadena $42, 84, 168, \ldots$ Esta observación no demuestra que no exista una fórmula sencilla.

8. Conclusiones

Las etiquetas de Grundy leídas a lo largo de las órbitas de Collatz producen dos clases de palabras. Las que no pasan por el paso $1 \to 4$ forman un lenguaje de tipo finito, definido por cinco factores prohibidos y reconocido por un autómata de siete estados cuyas transiciones corresponden a los exponentes entre impares consecutivos. Su número es $a(k+2)$, donde a es la sucesión A097333, y cada una de ellas aparece en una clase residual de densidad positiva. Estas palabras solo registran las valoraciones de cada número y de su sucesor, y el lema 2.2, que realiza cualquier sucesión finita de exponentes, muestra que esa información local no impone otras restricciones.

Las palabras que contienen 00 están formadas por la palabra de un número cuyo tiempo total de parada es p, seguida de la del ciclo trivial, y el teorema 7.1 da la complejidad total como suma de las dos contribuciones. La segunda depende de qué ramas del árbol inverso de 1 existen, lo que está gobernado por restos módulo 3, y de cuántas de ellas se vuelven indistinguibles al leer solo sus etiquetas. Se calcula exactamente hasta $p = 40$, pero no se conoce para ella una fórmula cerrada. La separación entre las dos partes es la misma que se observa en [1] entre el carácter local del valor de Grundy y el carácter global de la terminación.

9. Cuestiones abiertas

Problema 9.1. ¿Existe el límite de $\rho(p) = B(p)/M(p)$ cuando $p \to \infty$? En caso afirmativo, ¿es positivo? En la tabla 1 la razón se mantiene entre 0,69 y 0,73 para $20 \le p \le 40$.

Problema 9.2. ¿Cuál es el crecimiento de $B(p)$? En particular, ¿es $\sum_{p \le k-2} B(p)$ despreciable frente a $a(k+2)$ cuando $k \to \infty$?

Problema 9.3. Clasificar las coincidencias $W_p(n) = W_p(n')$ con $d(n) = d(n') = p$ y $n \neq n'$.

Verificación

El programa `verificar_palabras_grundy.py`, que acompaña a este escrito, usa aritmética entera exacta. Comprueba que el autómata reconoce exactamente el lenguaje del teorema 4.4 y que sus clases finales son las del lema 4.3 para todas las palabras de longitud $k \le 12$; que, al asignar a cada número de una órbita su estado según su paridad, su valoración y la del número anterior, toda transición que aparece en las órbitas de los $n < 2^{20}$ es una arista del autómata y aparecen todos sus caminos de longitud 10, como afirma el lema 3.1; los lemas 4.1 y 4.2 y el teorema 4.4 sobre las órbitas de los $n < 2^{20}$ para $k \le 14$; los valores de $A(k)$ por la recurrencia, por la suma binomial y por A000930 para $k \le 50$; los valores de $M(p)$ y $B(p)$ para $p \le 40$, con $M(p)$ comprobado también por recorrido directo de todos los $n \le 2^{20}$ para $p \le 20$; el resultado del algoritmo de Berlekamp–Massey; y la fórmula del teorema 7.1 frente al recuento directo de las palabras $W_k(n)$, $n < 2^{20}$, para $k \le 14$. Ninguna demostración depende de estos cálculos, salvo los valores de las tablas.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *El juego de Collatz en el sentido de Conway. Valores de Grundy locales y terminación global*, Zenodo, 2026. doi:10.5281/zenodo.23501310.

[2] M. Cerdá Bennassar, *Complejidad de factores de la sucesión de valores de Grundy del juego de Collatz con atajo. Una fórmula exacta para todas las longitudes*, Zenodo, 2026. doi:10.5281/zenodo.23722394.

[3] OEIS Foundation Inc., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `https://oeis.org`; sucesiones A000930, A005186, A097333 y A400826.